Ejercicio 1. *Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3,-2)$ y $B(6,5)$ en las formas punto-pendiente, explícita y segmentaria.*

Solución:

La pendiente de la recta AB es:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-(-2)}{6-3} = \frac{7}{3}$$

de modo que la ecuación de la recta AB es:

$$y + 2 = \frac{7}{3}\,(x-3)$$

Para calcular la forma explícita de la ecuación se despeja y y se obtiene:

$$y = \frac{7}{3}\,x - 9$$

La ordenada en el origen es -9. Para calcular la abscisa en el origen hallamos el punto de intersección de la recta con el eje de abscisas. Este punto se obtiene resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{7}{3}\,x - 9 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{27}{7}$$

La ecuación en forma segmentaria resulta ser:

$$\frac{x}{\frac{27}{7}} + \frac{y}{-9} = 1$$

Ejercicio 2. *Calcular k para que los puntos $A(-1,3)$, $B(2,k)$ y $C(6,-4)$ estén alineados. Calcular la ordenada en el origen de la recta que pasa por los tres puntos.*

Solución:

Si los puntos están alineados, la pendiente de la recta AB es igual que la pendiente de la recta AC. Entonces:

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{k-3}{2+1} = \frac{k-3}{3} \\ m_{AC} &= \frac{-4-3}{6-(-1)} = -1 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{k-3}{3} = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad k = 0$$

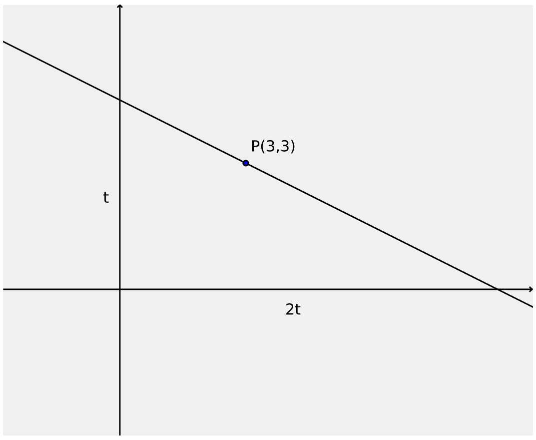
La recta que pasa por los tres puntos tiene pendiente -1. Su ecuación es:

$$y - 3 = -1\,(x+1) \qquad \text{o bien} \qquad y = -x + 2$$

de modo que la ordenada en el origen vale 2.

Ejercicio 3. *Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,3)$ y corta a los ejes de abscisas y ordenadas en los puntos A y B tales que la longitud de OA es doble que la longitud de OB.*

Solución:



La pendiente de la recta puede ser $\frac{1}{2}$ o $\frac{-1}{2}$. Tenemos dos soluciones

$$y - 3 = \frac{1}{2}\,(x - 3); \qquad y - 3 = -\frac{1}{2}\,(x - 3)$$

También podría ocurrir que la recta pase por el origen puesto que en este caso determina sobre ambos ejes segmentos de longitud cero. La solución en este caso, sería:

$$y = x$$

Ejercicio 4. *Calcular el área del triángulo de vértices $A(-2, 5)$, $B(1, -2)$ y $C(7, 10)$.*

Solución:

Podemos tomar como base la distancia AB y como altura la distancia de C a la recta AB. La distancia entre los puntos A y B es:

$$d(A, B) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (5 - (-2))^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$$

La pendiente de la recta AB es:

$$m_{AB} = \frac{-2 - 5}{1 - (-2)} = \frac{-7}{3}$$

de forma que la ecuación de esta recta es:

$$y - 5 = -\frac{7}{3}\,(x + 2) \qquad \text{o bien} \qquad 7x + 3y - 1 = 0$$

La altura del triángulo es la distancia del vértice C a esta recta:

$$d = \frac{7 \cdot 7 + 3 \cdot 10 - 1}{\sqrt{7^2 + 3^3}} = \frac{78}{\sqrt{58}}$$

El área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{58} \cdot \frac{78}{\sqrt{58}} = 39$$

Ejercicio 5. *Dados los puntos $A(1, 3)$ y $B(5, -2)$. Hallar un punto P del eje de abscisas tal que el triángulo APB sea rectángulo en P.*

Solución:

sea $P(x,0)$ el punto que buscamos. Las pendientes de las rectas AP y BP son:

$$m_{AP}=\frac{-3}{x-1};\qquad m_{BP}=\frac{2}{x-5}$$

Como estas rectas deben ser perpendiculares, debe cumplirse que

$$1+m_{AP}m_{BP}=0$$

Sustituyendo

$$1-\frac{3}{x-1}\cdot\frac{2}{x-5}=0\quad\Longrightarrow\quad x^2-6x-1=0\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}x_1=3+\sqrt{10}\\ x_2=3-\sqrt{10}\end{cases}$$

Ejercicio 6. *Calcular el punto simétrico de $P(2,5)$ respecto de la recta $r:2x-3y+6=0$.*

Solución:

Calculamos la perpendicular a la recta r por el punto P. Puesto que la recta r tiene pendiente $\frac{2}{3}$, la perpendicular tendrá pendiente $\frac{3}{2}$. La ecuación de la perpendicular es:

$$y-5=\frac{3}{2}(x-2)\qquad\text{o bien}\qquad 3x+2y-16=0$$

La intersección de la recta r con esta perpendicular (el pie de la perpendicular) es la solución del sistema

$$\begin{cases}2x-3y+6=0\\ 3x+2y-16=0\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad x=\frac{36}{13},\quad y=\frac{50}{13}$$

Este punto es el punto medio entre P y su simétrico P'. Las coordenadas de P' las obtenemos de:

$$\frac{36}{13}=\frac{2+x'}{2}\quad\Longrightarrow\quad x'=\frac{46}{13}$$

$$\frac{50}{13}=\frac{5+y'}{2}\quad\Longrightarrow\quad y'=\frac{35}{13}$$

Ejercicio 7. *Calcular un punto de la recta $x+y-1=0$ equidistante de $A(1,2)$ y de $B(-3,5)$.*

Solución:

Sea P el punto que buscamos. Si equidista de A y B se encontrará en su mediatriz. La ecuación de la mediatriz es:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=(x+3)^2+(y-5)^2\qquad\text{o bien}\qquad 8x-6y+29=0$$

Como P debe encontrarse también sobre la recta $y=-x+1$, será la solución del sistema:

$$\begin{cases}8x-6y+29=0\\ y=-x+1\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad x=-\frac{23}{14},\quad y=\frac{37}{14}$$

Ejercicio 8. *Calcular el centro de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-1,2)$, $B(5,3)$ y $C(3,-4)$.*

Solución:

El centro equidista de los tres puntos. Puede calcularse como la intersección de la mediatriz de AB y de AC. La mediatriz de AB tiene por ecuación:

$$(x+1)^2+(y-2)^2=(x+3)^2+(y-3)^2\qquad\Longrightarrow\qquad 12x+2y-29=0$$

La mediatriz de AC es:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y+4)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 2x - 3y - 5 = 0$$

El centro de la circunferencia es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 12x + 2y - 29 = 0 \\ 2x - 3y - 5 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{97}{40}, \quad y = -\frac{1}{20}$$