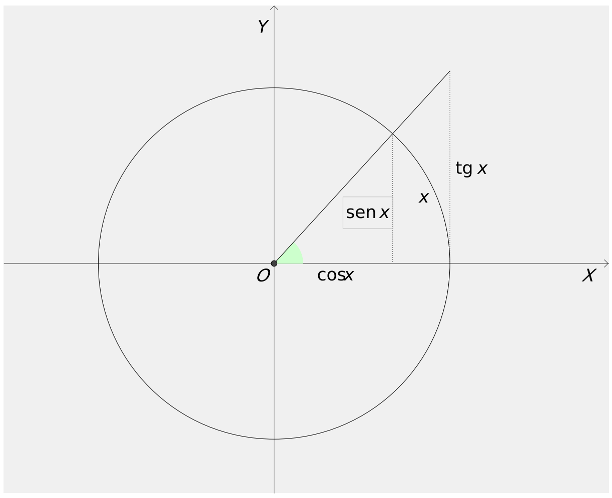
Ejercicio 1. *Define asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.*

Solución:

$$\begin{aligned} x = x_0 \text{ asíntota de } f(x) \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \\ y = y_0 \text{ asíntota de } f(x) \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = y_0 \\ y = mx + b \text{ asíntota de } f(x) \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 2. *Demuestra que cuando x tiende a cero, el límite se* $\operatorname{sen} x$ *entre x es 1.*

Solución:



En la figura se ha representado un ángulo x sobre una circunferencia de radio 1. Si el radio es igual a la unidad, la longitud del arco coincide con la medida del ángulo en radianes. El seno y el coseno del ángulo son iguales a la ordenada y la abscisa del extremo del arco y así se han representado en la figura. También se ha representado un segmento de longitud igual a $\operatorname{tg} x$.

De la figura se deduce que:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

y dividiendo por $\operatorname{sen} x$:

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} \quad \Longrightarrow \quad 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

Cuando $x \to 0$:

$$1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \quad \Longrightarrow \quad 1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$$

y también:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Ejercicio 3. *Explica qué es un punto de discontinuidad evitable y pon un ejemplo.*

Solución:

En un punto de discontinuidad evitable existe el límite de la función pero no coincide con el valor de la función:

$$x_0 \text{ discontinuidad evitable} \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Por ejemplo, $x = 0$ es un punto de discontinuidad evitable de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ porque existe el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

pero no existe la función en ese punto (puesto que se anula el denominador).

Ejercicio 4. *Calcular los puntos de intersección de la parábola $y = 3x^2 - 2x + 3$ y la recta $y = 2x + 2$. Representa gráficamente la parábola y la recta.*

Solución:

Los puntos de intersección se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 2x + 3 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

Así se obtienen los puntos $A_1(1, 4)$ y $A_2\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

Con estos dos puntos se puede representar la recta. Para representar la parábola debemos calcular el vértice y los puntos de corte con los ejes. El vértice es:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{6} = \frac{1}{3}$$

La ordenada del vértice se calcula sustituyendo el valor de la abscisa que hemos obtenido en la ecuación de la parábola. En este caso no es necesario puesto que se trata de uno de los puntos de intersección con la recta. Resulta pues

$$V\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

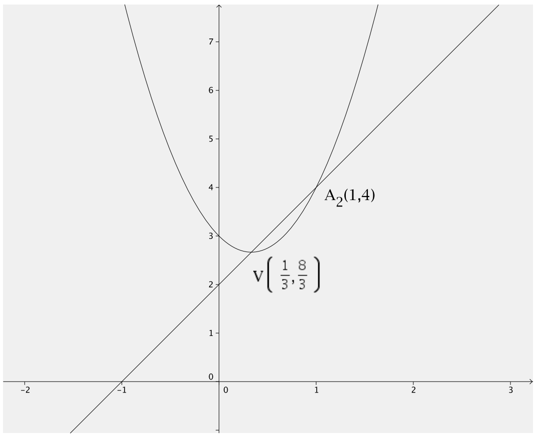
Los puntos de corte con los ejes son las soluciones de los sistemas:

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 2x + 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

que no tiene solución y. por consiguiente no hay puntos de intersección de la parábola con el eje de abscisas. La intersección con el eje de ordenadas es:

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 2x + 3 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad B(0, 3)$$

La representación gráfica es:



Ejercicio 5. *Calcular el dominio de definición de la función* $y = \sqrt{5x - 2 - 2x^2}$.

Solución:

Para que exista la función el radicando debe ser positivo o cero:

$$\text{Dominio } = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -2x^2 + 5x - 2 \geq 0 \right\}$$

Para resolver la inecuación calculamos las raíces. Éstas resultan ser $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 2$. Puesto que el coeficiente de x^2 en el polinomio es negativo, éste será positivo entre las raíces (¿por qué?). El dominio es entonces:

$$\text{Dominio } = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -2x^2 + 5x - 2 \geq 0 \right\} = \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$$

Ejercicio 7. *Calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x \right); \qquad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x - 1}{x^2 + 4} \right)^x$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x} - x \right) &= \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{-2x}{2x} \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x - 1}{x^2 + 4} \right)^x = 0^\infty = 0$$

Ejercicio 8. *Calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x - 2}{3x + 1} \right)^{2x}; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x}$$

Solución:

El primer límite es una indeterminación del tipo 1^∞. Por consiguiente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x} &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{3x-2}{3x+1}-1\right)2x}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{3x-2-3x-1}{3x+1}\right)2x}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{-3}{3x+1}\right)2x}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-6x}{3x+1}}\\ &= e^{-2}\end{aligned}$$

El segundo límite, aplicando las equivalencias $\operatorname{sen} x \sim x$ y $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ resulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$$

Ejercicio 9. *Calcular las asíntotas de la función:*

$$y = \frac{2x+1}{x^2-4}$$

Solución:

Las asíntotas verticales se obtienen entre los valores de x que anulan el denominador:

$x=-2$ es asíntota de la función porque $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{2x+1}{x^2-4}=\infty$

$x=2$ es asíntota de la función porque $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x^2-4}=\infty$

La asintota horizontal se obtiene calculando el límite de la función cuando x tiende a ∞

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2-4}=0 \quad\Longrightarrow\quad y=0 \quad \text{es asíntota}$$

Puesto que hay una asíntota horizontal no buscamos asíntotas oblicuas.

Ejercicio 10. *Calcular la asíntota de la función*

$$y = \frac{x^3+3}{x^2+1}$$

Solución:

Esta función no tiene asíntotas verticales puesto que el denominador no se hace cero para ningún valor de x. Además, no tiene asíntota horizontal puesto que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3}{x^2+1}=\infty$$

Busquemos entonces la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3}{x^3+x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+3}{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3-x^3-x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x+3}{x^2+1} = 0$$

Por consiguiente, la asíntota oblicua es $y=x$.
