

1. Dada $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ se pide: **a)** Razonar cuál es su Dom(f) **b)** Posible simetría. **c)** Posibles cortes con los ejes. **d)** Tabla de valores apropiada y representación gráfica. **e)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. **f)** Continuidad. **g)** A la vista de la gráfica, indicar su Im(f) **h)** Ecuación de las posibles asíntotas. **i)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ **j)** Calcular la antiimagen de $y=1/2$ (2 puntos)

2. **a)** Dada la siguiente función, representarla y estudiar analíticamente su continuidad, clasificando sus posibles discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x + 7 & \text{si } x \leq -2 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ \frac{5x-18}{2x-8} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- b)** Representar $f(x) = |x^2 - 8x + 7|$ y expresarla como función definida a trozos. (2 puntos)

3. **a)** Calcular: $\log_3 \frac{3}{\sqrt[5]{81}}$ **b)** Ídem: $\ln \frac{\sqrt{e}}{e}$ **c)** Resolver: $4^x - 14 \cdot 2^{x-1} + 12 = 0$

- d)** Ídem: $\log(6x-1) - \log(x+4) = \log x$ (2 puntos)

4. Calcular: **a)** $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$ **b)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$ **c)** $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1})$ (2 puntos)

5. **a)** Hallar la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x=1$ mediante la definición, es decir, mediante un límite.

b) Derivar y simplificar: $y = \frac{3x^6 - x^3 + 6x - 5}{3}$

c) Ídem: $y = (x^2 - 5)(3x - 1) + 7$

d) Ídem: $y = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ (2 puntos)

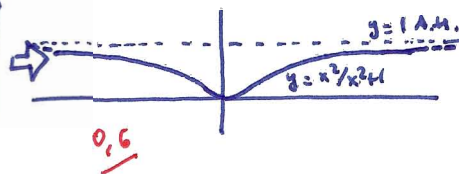
① $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ p.q. $x^2+1 \neq 0 \forall \mathbb{R}$ 0.1

b) $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1} = f(x) \Rightarrow f(x)$ simétrica por 0.2

c) con $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = 0; x^2 = 0; x = 0 \Rightarrow (0,0)$ 0.2/ $\leftarrow$ nos ahorramos el corte con el eje y

d)

x	$-\infty \dots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\dots \infty$
$y = \frac{x^2}{x^2+1}$	$1^- \dots$	0.96	0.94	0.9	0.8	0.5	0	0.5	0.8	0.9	0.94	0.96	1^-



e) $\left. \begin{array}{l} f(x) \neq \forall x < 0 \\ f(x) \neq \forall x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow m(0,0)$ 0.2

f) $f(x)$ continua $\forall x \in \mathbb{R}$, a la vista de la gráfica 0.1

g) $\text{Im}(f) = [0,1)$ 0.1

h) $y = 1$ A.M. 0.1

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1^-$ 0.1

j) $\frac{1}{2} = \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1 = 2x^2; 1=x^2 \Rightarrow x = \pm 1$ 0.3/ (puede comprobarse también en la tabla...)

TOTAL: [2]

② a) $f(x) = \begin{cases} x^2+8x+7 & \text{si } x \leq -2 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ \frac{5x-18}{2x-8} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

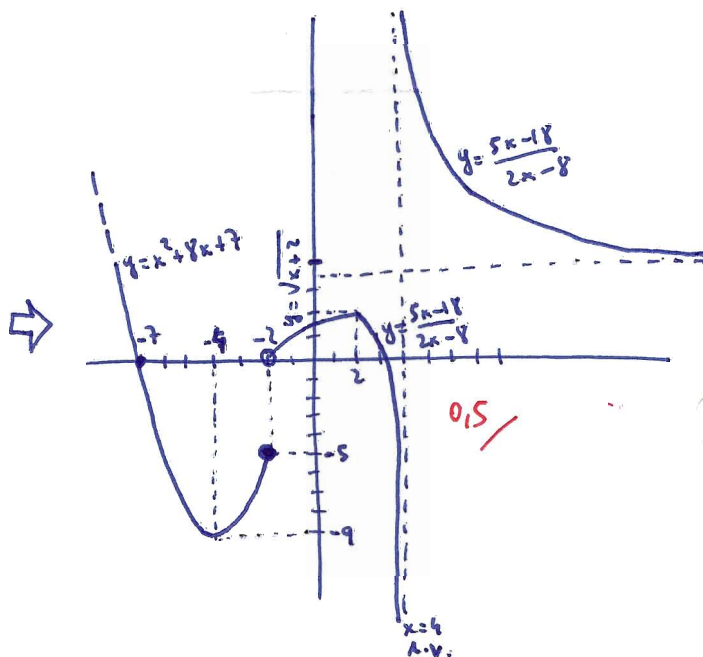
x	$-\infty \dots$	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2
$y = x^2+8x+7$	$\infty \dots$	16	7	0	-5	-8	-9	-8	-5

$\downarrow$
V(-4,-9)

x	-2	-1	0	1	2
$y = \sqrt{x+2}$	0	1	1.41	1.73	2

x	2	3	4	5	6	7	8	$\dots 10000$	$\dots \infty$
$y = \frac{5x-18}{2x-8}$	2	1.5	2	3.5	3	2.83	2.75	$\dots 2.5001$	$\dots 2.5^+$

$\downarrow$
x=4 A.V.



* La 1ª rama es continua, por tratarse de un polinomio

* La 2ª rama tampoco presenta problemas porque el radicando $x+2$ es siempre positivo si $-2 < x \leq 2$

* La 3ª rama va a ser discontinua en $x=4$ (ya que anula el denominador), que está dentro de su particular dominio de definición; para clasificar la discontinuidad hay que hallar el límite:

$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x-18}{2x-8} = \frac{2}{0} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{5x-18}{2x-8} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{5x-18}{2x-8} = \frac{2}{0^+} = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \pm \infty \Rightarrow \text{discontinuidad asintótica en } x=4$ 0.25

* Pasamos a estudiar la continuidad en los puntos de unión de las ramas:

¿continua en $x = -2$?

1) $\exists f(-2) = -5$ (1º: num)

2) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 8x + 7) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x+2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \Rightarrow \text{discontinuidad de salto finito en } x = -2$
0,25

¿continua en $x = 2$?

1) $\exists f(2) = 2$ (2º: num)

2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x-18}{2x-8} = \frac{-8}{-4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$
0,25

TOTAL: $\boxed{2}$ $\rightarrow$ a) 1,25
 $\rightarrow$ b) 0,75

3) coincidencia $\Rightarrow f(x)$ continua en $x = 2$

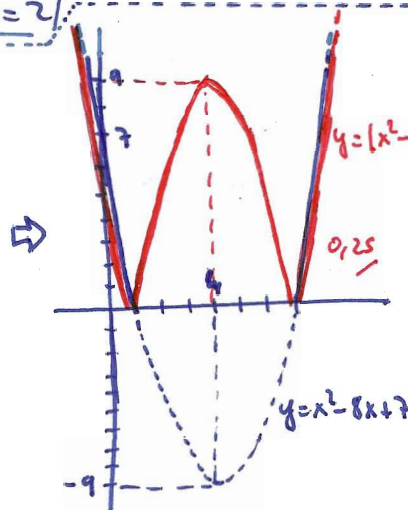
b) $f(x) = |x^2 - 8x + 7|$

6 raíces 1,7 (verlos oje x)

signo $x^2 - 8x + 7$	-8	1	7	∞
$f(x) = x^2 - 8x + 7 $	$x^2 - 8x + 7$	$-x^2 + 8x - 7$	$x^2 - 8x + 7$	

$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow y_v = 16 - 32 + 7 = -9 \rightarrow V(4, -9)$

convertir $y: x=0 \rightarrow y=7$ 0,25



$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 7 & \text{si } x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty) \\ -x^2 + 8x - 7 & \text{si } x \in [1, 7] \end{cases}$
0,25

3) a) $\log_3 \frac{3}{\sqrt[5]{81}} = \log_3 3 - \log_3 \sqrt[5]{81} = 1 - \frac{1}{5} \log_3 81 = 1 - \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{1}{5}$ 0,25

b) $\ln \frac{\sqrt{e}}{e} = \ln \sqrt{e} - \ln e = \frac{1}{2} \ln e - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ 0,25

TOTAL: $\boxed{2}$ $\rightarrow$ 0,25
 $\rightarrow$ 0,25
 $\rightarrow$ 0,75
 $\rightarrow$ 0,75

c) $4^x - 14 \cdot 2^{x-1} + 12 = 0; (2^x)^2 - 14 \cdot \frac{2^x}{2} + 12 = 0; (2^x)^2 - 7 \cdot 2^x + 12 = 0$

canbio de variable $x^2 = t \Rightarrow t^2 - 7t + 12 = 0$ $t = 3 = 2^x \Rightarrow \log 3 = \log 2^x \Rightarrow \log 3 = x \log 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58}$ 0,25
 $t = 4 = 2^x \Rightarrow \boxed{x = 2}$ 0,25

d) $\log(6x-1) - \log(x+4) = \log x; \log \frac{6x-1}{x+4} = \log x \Rightarrow \frac{6x-1}{x+4} = x; 6x-1 = x^2+4x; 0 = x^2-2x+1 \Rightarrow \boxed{x=1}$ 0,5

4) a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-3)^2(x+1)} = \frac{2}{0} = \pm \infty$
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-1}{(x-3)(x+1)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-1}{(x-3)(x+1)} = \frac{2}{0^+} = \infty$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \pm \infty$ 0,25

1 -5 3 9
3 3 -6 -9
1 -2 -3 0

$2 \pm \sqrt{4+12} = \frac{2 \pm 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$
 $\frac{2 \pm 4}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \frac{\infty}{-\infty} = \text{indeterminado} \sim \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \boxed{0^-}$ 0,5

dominante

