Matemáticas I. 1º BACH. COMPLEJOS. VECTORES.

Ejercicio nº 1.- ***(1,5 puntos)***

Halla *a* y *b* para que:

$$\frac{(3+2i)^2 - 2i^5(2+ai)}{1+i} = b + 3i$$

Ejercicio nº 2.- ***(1,5 puntos)***

Calcula:

$$\frac{(-1+i)^4 \cdot \left(\sqrt{3} - i\right)}{i^{20} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^3}$$

Ejercicio nº 3.- ***(1,5 puntos)***

Halla $\sqrt[5]{-1}$ e interpretagráficamente las soluciones.

Ejercicio nº 4.- ***(1,5 puntos)***

Dados los vectores $\vec{u}(2,-1)$, $\vec{v}\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ y $\vec{w}(-1,3)$, calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{w}$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{u}$

<u>Ejercicio nº 5.-</u> (1 punto)

Dados los vectores $\vec{a}(1, x)$ y $\vec{b}\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$:

a) Calcula x para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares.

b) Halla dos vectores unitarios perpendiculares a $\vec{b}$.

<u>Ejercicio nº 6.-</u> (1 punto)

Prueba que si $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{b}$ entonces $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2$.

<u>Ejercicio nº 7.-</u> (2 puntos)

Halla m y n para que los vectores $\vec{a}(m, -4)$ y $\vec{b}(5, n)$ cumplan que $\vec{a}+\vec{b}$ sea ortogonal a $\vec{c}(1, 6)$ y $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{37}$.

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.- ***(1,5 puntos)***

Halla *a* y *b* para que:

$$\frac{(3+2i)^2 - 2i^5(2+ai)}{1+i} = b + 3i$$

Solución:

$$\frac{(3+2i)^2 - 2i^5(2+ai)}{1+i} = \frac{(9+12i-4) - 2i(2+ai)}{1+i} =$$

$$= \frac{5+12i-4i+2a}{1+i} = \frac{5+2a+8i}{1+i} = \frac{(5+2a+8i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} =$$

$$= \frac{5+2a-(5+2a)i+8i+8}{1+1} = \frac{2a+13}{2} + \frac{3-2a}{2}i$$

Para que se cumpla la igualdad, debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2a+13}{2} = b \\ \frac{3-2a}{2} = 3 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema: $a = -\frac{3}{2},\ b = 5$

Ejercicio nº 2.- ***(1,5 puntos)***

Calcula:

$$\frac{(-1+i)^4 \cdot \left(\sqrt{3} - i\right)}{i^{20} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3}$$

Solución:

Pasamos a forma polar $z_1 = -1+i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$, $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$:

$$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad tg\ \alpha_1 = -1 \ \rightarrow \ \alpha_1 = 135° \ \rightarrow \ z_1 = \sqrt{2}_{135°}$$

$$|z_2| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 \qquad tg\ \alpha_2 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \ \rightarrow \ \alpha_2 = 330° \ \rightarrow \ z_2 = 2_{330°}$$

$$|z_3| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1 \qquad tg\ \alpha_3 = \sqrt{3} \ \rightarrow \ \alpha_3 = 240° \ \rightarrow \ z_3 = 1_{240°}$$

Entonces:

$$\frac{(-1+i)^4 \cdot \left(\sqrt{3}-i\right)}{i^{20} \cdot \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3} = \frac{\left(\sqrt{2}_{135°}\right)^4 \cdot 2_{330°}}{1 \cdot \left(1_{240°}\right)^3} = \frac{4_{180°} \cdot 2_{330°}}{1_{0°}} = 8_{510°} = 8_{150°} =$$

$$= 8\left(cos\,150° + i\,sen\,150°\right) = -4\sqrt{3} + 4i$$

Ejercicio nº 3.- (1,5 puntos)

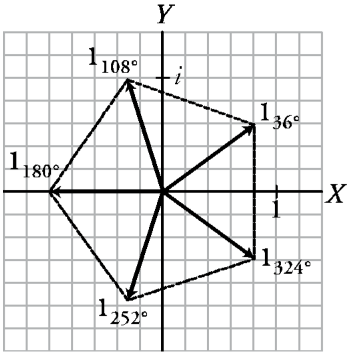
Halla $\sqrt[5]{-1}$ e interpreta gráficamente las soluciones.

Solución:

$$\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{1_{180°}} = 1_{\frac{180°+360°k}{5}} = 1_{36°+72k} \ ; \ k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Las cinco raíces son: $\begin{cases} 1_{36°} \ ; \ 0,81+0,59i \\ 1_{108°} \ ; \ -0,31+0,95i \\ 1_{180°} = -1 \\ 1_{252°} \ ; \ -0,31-0,95i \\ 1_{324°} \ ; \ 0,81-0,59i \end{cases}$

Interpretación gráfica:



Los afijos de las raíces quintas ocupan los vértices de un pentágono regular.

Ejercicio nº 4.- ***(1,5 puntos)***

Dados los vectores $\vec{u}(2,-1)$, $\vec{v}\left(\frac{1}{3},2\right)$ y $\vec{w}(-1,3)$, calcula:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$

b) $(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot\vec{w}$

c) $(\vec{u}\cdot\vec{w})\cdot\vec{u}$

Solución:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(2,-1)\cdot\left(\frac{1}{3},2\right)=2\cdot\frac{1}{3}+(-1)\ 2=\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}$

b) $(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot\vec{w}=\left(2(2,-1)+3\left(\frac{1}{3},2\right)\right)\cdot(-1,3)=\left((4,-2)+(1,6)\right)\cdot(-1,3)=$

$$=(5,4)\cdot(-1,3)=5\cdot(-1)+4\cdot3=-5+12=7$$

c) $(\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{u}=\left((2,-1)\cdot(-1,3)\right)(2,-1)=\left(2\cdot(-1)+(-1)\cdot3\right)(2,-1)=(-2-3)(2,-1)=$

$$=-5\ (2,-1)=(-10,5)$$

Ejercicio nº 5.- ***(1 punto)***

Dados los vectores $\vec{a}(1,x)$ y $\vec{b}\left(\frac{3}{5},\frac{-4}{5}\right)$:

a) Calcula x para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares.

b) Halla dos vectores unitarios perpendiculares a $\vec{b}$.

Solución:

a) Para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\ \rightarrow\ (1,x)\cdot\left(\frac{3}{5},\frac{-4}{5}\right)=0\ \rightarrow\ \frac{3}{5}-\frac{4}{5}x=0\ \rightarrow\ 3-4x=0\quad\rightarrow\ x=\frac{3}{4}$$

b) Un vector perpendicular a $\vec{b}$ es $\vec{c}(4,3)$ cuyo módulo es $|\vec{c}|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$.

El vector $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ es un vector unitario perpendicular a $\vec{b}$ y $\left(\frac{-4}{5},\frac{-3}{5}\right)$ es el otro.

Ejercicio nº 6.- ***(1 punto)***

Prueba que si $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{b}$ entonces $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2$.

Solución:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2$$

Por ser $\vec{a} \perp \vec{b}$, el producto escalar de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es cero $\rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

Por tanto, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + 2\cdot 0 + \left|\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2$.

Ejercicio nº 7.- ***(2 puntos)***

Halla m y n para que los vectores $\vec{a}(m,-4)$ y $\vec{b}(5,n)$ cumplan que $\vec{a}+\vec{b}$ sea ortogonal a $\vec{c}(1,6)$ y $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{37}$.

Solución:

$$\vec{a}+\vec{b} = (m,-4)+(5,n) = (m+5, n-4)$$

Para que $\vec{a}+\vec{b} \perp \vec{c}$, debe ser:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = 0 \quad\rightarrow\quad (m+5, n-4)\cdot(1,6) = 0 \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad m+5+6n-24 = 0 \quad\rightarrow\quad m+6n = 19$$

Para que $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{37}$, debe ser:

$$\sqrt{(m+5)^2+(n-4)^2} = \sqrt{37} \quad\rightarrow\quad (m+5)^2+(n-4)^2 = 37$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} m+6n = 19 \\ (m+5)^2+(n-4)^2 = 37 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow m = 19-6n \\ \rightarrow (24-6n)^2+(n-4)^2 = 37 \rightarrow 576-288n+36n^2+n^2-8n+16 = 37 \end{array}$$

$$37n^2-296n+555 = 0 \quad\rightarrow\quad n = \frac{296\pm\sqrt{5\,476}}{74} = \frac{296\pm 74}{74} = \begin{cases} n = \dfrac{370}{74} = 5 \\ n = \dfrac{222}{74} = 3 \end{cases}$$

Si $n = 5 \rightarrow m = 19 - 30 = -11$

Si $n = 3 \rightarrow m = 19 - 18 = 1$

Por tanto, hay dos soluciones: $m_1 = 11$ y $n_1 = 5$

$m_2 = 1$ y $n_2 = 3$