

Ejercicio nº 1.- (1,5 puntos)

Teniendo en cuenta que $\operatorname{tg} 50^\circ = 1,19$; halla (sin usar las teclas trigonométricas de la calculadora):

a) $\operatorname{sen} 140^\circ$

b) $\operatorname{tg} 230^\circ$

b) $\cos 770^\circ$

Ejercicio nº 2.- (1 punto)

Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$$

Ejercicio nº 3.- (1 punto)

Resuelve la ecuación:

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

Ejercicio nº 4.- (1,5 puntos)

Calcula $\sqrt[4]{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^3}$.

Ejercicio nº 5.- (1 punto)

Dados los vectores $\vec{u}(-1, 4)$ y $\vec{v}(3, m)$:

a) Calcula m para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.

b) Halla un vector unitario perpendicular a $\vec{u}$.

Ejercicio nº 6.- (1 punto)

Halla un vector $\vec{v}$ de módulo $\sqrt{10}$ y que forme con $\vec{u}(1, -2)$ un ángulo de 45° .

Ejercicio nº 7.- (1 punto)

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3)$ y forma un ángulo de 45° con la recta $r : 2x - y + 1 = 0$.

Ejercicio nº 8.- (1,5 puntos)

Halla el área del triángulo de vértices:

$$A(3, 1) \quad B(6, -2) \quad C(0, -4)$$

SOLUCIONES

Ejercicio nº 1.- (1,5 puntos)

Teniendo en cuenta que $\operatorname{tg} 50^\circ = 1,19$; halla (sin usar las teclas trigonométricas de la calculadora):

a) $\operatorname{sen} 140^\circ$

b) $\operatorname{tg} 230^\circ$

c) $\cos 770^\circ$

Solución:

a) $\operatorname{sen} 140^\circ = \operatorname{sen} (90^\circ + 50^\circ) = \cos 50^\circ$

b) $\operatorname{tg} 230^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ + 50^\circ) = \operatorname{tg} 50^\circ = 1,19$

c) $\cos 770^\circ = \cos (2 \cdot 360^\circ + 50^\circ) = \cos 50^\circ$

Hallamos $\cos 50^\circ$ a partir de $\operatorname{tg} 50^\circ$:

$$1 + \operatorname{tg}^2 50^\circ = \frac{1}{\cos^2 50^\circ} \rightarrow 1 + 1,19^2 = \frac{1}{\cos^2 50^\circ} \rightarrow 1 + 1,4161 = \frac{1}{\cos^2 50^\circ} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2,4161 = \frac{1}{\cos^2 50^\circ} \rightarrow \cos^2 50^\circ = \frac{1}{2,4161} \rightarrow \cos 50^\circ \approx 0,64$$

Por tanto:

a) $\operatorname{sen} 140^\circ = \cos 50^\circ = 0,64$

b) $\operatorname{tg} 230^\circ = \operatorname{tg} 50^\circ = 1,19$

c) $\cos 770^\circ = \cos 50^\circ = 0,64$

Ejercicio nº 2.- (1 punto)

Solución:

Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x \end{aligned}$$

Ejercicio nº 3.- (1 punto)

Resuelve la ecuación:

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

Solución:

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

Hay dos soluciones: $z_1 = 2 + i$; $z_2 = 2 - i$

Ejercicio nº 4.- (1,5 puntos)

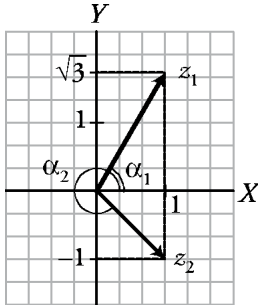
Solución:

Calcula $\sqrt[4]{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^3}$.

Pasemos a forma polar $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ y $z_2 = 1 - i$:

$$|z_1| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2; \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \sqrt{3} \rightarrow \alpha_1 = 60^\circ \rightarrow z_1 = 2_{60^\circ}$$

$$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -1 \rightarrow \alpha_2 = 315^\circ \rightarrow z_2 = \sqrt{2}_{315^\circ}$$



$$\sqrt[4]{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^3} = \sqrt[4]{\left(\frac{2_{60^\circ}}{\sqrt{2}_{315^\circ}}\right)^3} = \sqrt[4]{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)_{-255^\circ}\right]^3} = \sqrt[4]{(\sqrt{2}_{105^\circ})^3} = \sqrt[4]{\sqrt{8}_{315^\circ}}$$

De los infinitos argumentos que admite un número complejo, hemos tomado el que está entre 0° y 360° ; por ello pasamos de -255° a $-255^\circ + 360^\circ = 105^\circ$.

Hallamos las raíces cuartas:

$$\sqrt[4]{\sqrt{8}_{315^\circ}} = \sqrt[4]{\sqrt{8}_{\frac{315^\circ + 360^\circ k}{4}}} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{8}} = \sqrt[8]{8}$$

Las raíces son:

$$\sqrt[8]{8}_{78,75^\circ}, \quad \sqrt[8]{8}_{168,75^\circ}, \quad \sqrt[8]{8}_{258,75^\circ}, \quad \sqrt[8]{8}_{348,75^\circ}, \text{ esto es, } \sqrt[8]{8}_{78^\circ 45'}, \quad \sqrt[8]{8}_{168^\circ 45'}, \quad \sqrt[8]{8}_{258^\circ 45'}, \quad \sqrt[8]{8}_{348^\circ 45'}$$

Ejercicio nº 5.- (1 punto)Dados los vectores $\vec{u}(-1, 4)$ y $\vec{v}(3, m)$:

- Calcula m para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares.
- Halla un vector unitario perpendicular a $\vec{u}$.

Solución:

a) Para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares, su producto escalar ha de ser cero, es decir:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (-1, 4) \cdot (3, m) = 0 \rightarrow -3 + 4m = 0 \rightarrow m = \frac{3}{4}$$

b) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ es $\vec{w}(4, 1)$ cuyo módulo es $|\vec{w}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$.

$$\text{El vector } \left(\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \left(\frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}\right) \text{ es un vector unitario perpendicular a } \vec{u}.$$

Ejercicio nº 6.- (1 punto)

Halla un vector $\vec{v}$ de módulo $\sqrt{10}$ y que forme con $\vec{u}(1, -2)$ un ángulo de 45° .

Solución:

Sea $\vec{v}(x, y)$.

$$|\vec{v}| = \sqrt{10} \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{10} \rightarrow x^2 + y^2 = 10$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{(1, -2) \cdot (x, y)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x - 2y}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 2(x - 2y) = \sqrt{100} \rightarrow 2(x - 2y) = 10 \rightarrow x - 2y = 5$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 5 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{array} \right\} \rightarrow x = 5 + 2y \rightarrow (5 + 2y)^2 + y^2 = 10 \rightarrow 25 + 20y + 4y^2 + y^2 = 10 \rightarrow 5y^2 + 20y + 15 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y^2 + 4y + 3 = 0 \rightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \quad \begin{array}{l} y = -3 \rightarrow x = 5 + 2y = 5 - 6 = -1 \\ y = -1 \rightarrow x = 5 + 2y = 5 - 2 = 3 \end{array}$$

Hay dos soluciones: $\vec{v}_1(-1, -3)$ y $\vec{v}_2(3, -1)$

Ejercicio nº 7.- (1 punto)

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3)$ y forma un ángulo de 45° con la recta $r: 2x - y + 1 = 0$.

Solución:

$r: 2x - y + 1 = 0$, por tanto, su pendiente es 2.

Llamemos m a la pendiente de la recta cuya ecuación queremos calcular:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{2 - m}{1 + m} \right| = 1 \quad \begin{array}{l} \frac{2 - m}{1 + m} = 1 \rightarrow 2 - m = 1 + m \rightarrow 1 = 2m \rightarrow m = \frac{1}{2} \\ \frac{2 - m}{1 + m} = -1 \rightarrow 2 - m = -1 - m \rightarrow 3 = 0 \rightarrow \text{no se puede} \end{array}$$

Hay, por tanto, dos soluciones:

Ecuación de la recta que pasa por $P(-1, 3)$ y $m = \frac{1}{3}$:

$$y = 3 + \frac{1}{3}(x+1) \rightarrow 3y = 9 + x + 1 \rightarrow x - 3y + 10 = 0$$

Ecuación de la recta que pasa por $P(-1, 3)$ y $m = -3$:

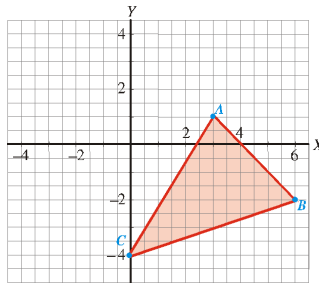
$$y = 3 - 3(x+1) \rightarrow y = 3 - 3x - 3 \rightarrow 3x + y = 0$$

Ejercicio nº 8.- (1,5 puntos)

Halla el área del triángulo de vértices:

$$A(3, 1) \quad B(6, -2) \quad C(0, -4)$$

Solución:



1.º) Tomamos el lado BC como base del triángulo:

$$\text{base} = |\overline{BC}| = |(-6, -2)| = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$$

2.º) La altura es la distancia de A a la recta que pasa por B y C . Por tanto, hallamos la ecuación de dicha recta:

$$\text{pendiente} = \frac{-4 + 2}{0 - 6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$$

$$y = -4 + \frac{1}{3}x \rightarrow 3y = -12 + x \rightarrow r: x - 3y - 12 = 0$$

Entonces, la altura es:

$$\text{altura} = \text{dist}(A, r) = \frac{|3 - 3 - 12|}{\sqrt{1+9}} = \frac{12}{\sqrt{10}}$$

3.º) Por tanto, el área del triángulo es:

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\sqrt{40} \cdot \frac{12}{\sqrt{10}}}{2} = 12 \text{ u}^2$$