Examen final- 2ª evaluación
2º BACHILLERATO

23-II-18

Nombre:____ Curso:_____

ACLARACIONES PREVIAS

- No se permite el uso de calculadoras que representen gráficas.
- Para obtener la puntuación máxima del ejercicio hay que hacer y desarrollar debidamente explicadas todas las soluciones.

1. Calcular la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. (1 punto)

2. a) Enuncia el teorema de Rouché-Frobenius (0.5 puntos)
b) Aplicando el teorema de Rouché Frobenius estudia el siguiente sistema de ecuaciones. Resuélvelo siempre que sea posible. (1,25 puntos)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

3. Una empresa cinematográfica dispone de tres salas, A, B y C. Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 euros, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 euros y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubiesen asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se hubiese obtenido una recaudación de 20 euros más. Calcula el número de espectadores que acudió a cada una de las salas. (1,25 puntos)

4. Calcular el área encerrada entre las parábolas $y = x^2 - 4x + 13$ e $y = 2x^2 - 8x + 16$. (1 punto)

5. Calcular la primitiva de la función $f(x) = \ln(1 - x^2)$ cuya gráfica pasa por el punto (0.1). (1,5 puntos)

6. Calcule, por transformaciones elementales (sin emplear la regla de Sarrus) y justificando los pasos, este determinante. (1 punto)
$$\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix}$$

7. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro a. (1,25 puntos)
$$\begin{cases} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{cases}$$

8. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Halla el determinante de $AB^{10}A^t$ siendo A^t la matriz traspuesta de A. (1,25 puntos)

EXAMEN FINAL 2ª EVALUACIÓN : 2º BACHILLERATO - 23-II-18

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

$|A| = 9 - 21 = -12 \neq 0$ Luego existe matriz inversa.

Calculo la matriz de adjuntos de A.

$a_{11} = -21$ $\quad a_{12} = -(-3) = 3$ $\quad a_{13} = -1$

$a_{21} = -0 = 0$ $\quad a_{22} = 0$ $\quad a_{23} = -4$

$a_{31} = 9$ $\quad a_{32} = -3$ $\quad a_{33} = 1$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj\,A^{T}}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{12} & 0 & -9/12 \\ -\frac{3}{12} & 0 & \frac{3}{12} \\ \frac{1}{12} & +\frac{4}{12} & -1/12 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/4 & 0 & -3/4 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/12 & 1/3 & -1/12 \end{pmatrix}}$$

2) $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -8 \end{pmatrix}$ como $|A| = -24 - 8 - 6 + 18 + 4 + 16 = 0$ y

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 \neq 0 \Rightarrow \boxed{Rg A = 2}$

$A^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -8 & -7 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -7 \end{vmatrix} = -21 - 2 - 4 + 12 + 1 + 14 = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -8 & -7 \end{vmatrix} = -28 - 3 - 48 + 8 + 8 + 63 = 0$

$\boxed{Rg A^{*} = 2}$

Como $\boxed{Rg A = Rg A^* = 2 < 3}$ (Nº incógnitas) El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO con 1 grado de indeterminación

$$\begin{cases} x + y = 2 - 3z \\ 2x + 3y = 1 - 4z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-3z & 1 \\ 1-4z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{6-9z-1+4z}{1} = \frac{5-5z}{1} = 5-5z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-3z \\ 2 & 1-4z \end{vmatrix}}{1} = \frac{1-4z-4+6z}{1} = \frac{2z-3}{1} = 2z-3$$

$$\boxed{\begin{cases} x = 5 - 5\lambda \\ y = 2\lambda - 3 \\ z = \lambda \end{cases} , \lambda \in \mathbb{R}}$$

Solución

(3) x → Nº de espectadores de la sala A
y → Nº de espectadores de la sala B
z → Nº de espectadores de la sala C.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 720 \\ x + y + z = 200 \\ 4x + 3y + 5z = 740 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{S.C.D}$$

Se resuelve por CRAMER

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 720 & 4 & 5 \\ 200 & 1 & 1 \\ 740 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-300}{-3} = 100$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 720 & 5 \\ 1 & 200 & 1 \\ 4 & 740 & 5 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-240}{-3} = 80$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 720 \\ 1 & 1 & 200 \\ 4 & 3 & 740 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-60}{-3} = 20$$

x = 100 espectadores a la sala A

y = 80 espectadores a la sala B

z = 20 espectadores a la sala C

4) $y = x^2 - 4x + 13$

$y = 2x^2 - 8x + 16$

Calculo el corte de ambos: $x^2 - 4x + 13 = 2x^2 - 8x + 16$;

a) $2x^2 - 8x + 16 - x^2 + 4x - 13 = 0$; $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{2}{2} = 1. \end{cases}$$

b) Entre $x=1$ y $x=3$ veo qué parábola queda por encima.

$y_1(2) = 2^2 - 4.2 + 13 = 4 - 8 + 13 = 9$

$y_2(2) = 2.2^2 - 8.2 + 16 = 8 - 16 + 16 = 8$

$\left.\right\} f_1(x) > f_2(x)$

c) $$\int_1^3 |x^2 - 4x + 13 - 2x^2 + 8x - 16|\, dx = \int_1^3 |-x^2 + 4x - 3|\, dx =$$

$$= \left[\left| -\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 3x \right|\right]_1^3 = \left| -\frac{3^3}{3} + 2.3^2 - 3.3 - \left(-\frac{1}{3} + 2.1^2 - 3.1\right)\right|$$

$$= \left| -9 + 18 - 9 + \frac{1}{3} - 2 + 3 \right| = \boxed{\frac{4}{3}\, u^2 = A}$$

5) $f(x) = \ln(1-x^2)$

$$\int \ln(1-x^2)\, dx = x\ln(1-x^2) - \int \frac{-2x^2}{1-x^2}\, dx = x\ln(1-x^2) + \int \frac{2x^2}{1-x^2} dx$$

Por partes: $u = \ln(1-x^2)$ $du = \frac{1}{1-x^2} \cdot -2x$

$dv = dx$ $v = x$

$$\int \ln(1-x^2)\,dx = x\ln(1-x^2) + 2\underbrace{\int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx}_{I^*}$$

$$I^* = \int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx \quad \text{Racional.}\; I^* = \int\left(-1 + \frac{1}{1-x^2}\right)dx$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^2} & 1-x^2 \\ \hline -\cancel{x^2}+1 & -1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$I^* = \int -dx + \underbrace{\int \frac{dx}{1-x^2}}_{I^{**}}$$

$$I^{**} = \int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)} = \int \frac{A}{1-x}\,dx + \int \frac{B}{1+x}\,dx$$

$$I^{**} \Rightarrow \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}\,;\; \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A(1+x)+B(1-x)}{(1-x)(1+x)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = A+B \\ 0 = A-B \end{array}\right\} \to A = B \qquad 1 = 2A\,; \quad A = 1/2 \qquad B = 1/2$$

$$I^{**} = \int \frac{1/2}{1-x}\,dx + \int \frac{1/2}{1+x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-dx}{1-x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x|$$

$$I^* = -x - \frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x|$$

$$\boxed{\int \ln(1-x^2)\,dx = x\ln(1-x^2) - 2x - \ln|1-x| + \ln|1+x| + C}$$

PRIMITIVA

Como la gráfica de la primitiva pasa por el punto $(0,1)$

$$0\cdot\ln(1-0^2)-2\cdot 0-\ln|1-0|+\ln|1+0|+C=1.$$

$$\boxed{C=1}$$

Así la primitiva buscada será:

$$\boxed{F(x)=x\ln(1-x^2)-2x-\ln|1-x|+\ln|1+x|+1}$$

⑥ $\begin{vmatrix} 2+a & b & c \\ a & 2+b & c \\ a & b & 2+c \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3^*=C_1+C_2+C_3} \begin{vmatrix} 2+a & b & 2+a+b+c \\ a & 2+b & 2+a+b+c \\ a & b & 2+a+b+c \end{vmatrix}$

$= \xrightarrow{\text{Extraemos factor de } C_3^*} (2+a+b+c)\begin{vmatrix} 2+a & b & 1 \\ a & 2+b & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow$

$\begin{matrix} F_2^*=F_2-F_1 \\ F_3^*=F_3-F_2 \end{matrix}$ $(2+a+b+c)\begin{vmatrix} 2+a & b & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Extraemos factor en } F_2 \text{ y } F_3}$

$(2+a+b+c)\cdot 2\cdot 2\begin{vmatrix} 2+a & b & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Desarrollo por } C_3}$

$4(2+a+b+c)\cdot 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{4\cdot(2+a+b+c)}$

7) $\begin{cases} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = \overset{F_1^* = F_1 - 2F_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a+8 & -1-2a \\ 0 & 4 & -a \end{vmatrix}$$

Desarrollo por C_1 $2\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a+8 & -1-2a \\ 4 & -a \end{vmatrix} = 2\cdot(-a^2 \cancel{-8a} + 4 + \cancel{8a})$

$$= 2\cdot(4-a^2) = 2\cdot(2+a)(2-a) = 0 \begin{cases} \boxed{a=2} \\ \boxed{a=-2} \end{cases}$$ Valores críticos del parámetro

$\to$ Si $\boxed{a \neq 2 \text{ y } a \neq -2} \Rightarrow \boxed{Rg\,A = Rg\,A^* = 3 = \text{Nº de incógnitas}}$

Sistema compatible determinado

$\to$ Si $\boxed{a=2} \Rightarrow Rg\,A = Rg \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = 2$

$$Rg\,A^* = Rg \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$C_4 = C_1$

$\boxed{Rg\,A = Rg\,A^* = 2 < 3 (\text{Nº de incógnitas})} \Rightarrow$ S.C. Indeterm. (1 grado de libertad)

→ Si $\boxed{a=-2}$

$$Rg\,A = Rg\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$Rg\,A^* = Rg\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) = 3$$

$$\begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -8-8 = -16 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{Rg\,A \neq Rg\,A^* \Rightarrow \text{Sistema incompatible}}$$

8º $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{A \cdot B^{10} \cdot A^t}$ siendo A^t la matriz traspuesta de A

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 & -1 \\ -8 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Generalizando

$$B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n \cdot 2^{n-1} & (-2)^{n-1} & (-1)^{n-1} \\ (-2)^{n-1} & (-1)^n \cdot 2^{n-1} & (-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \text{ siendo } n \in \mathbb{N}$$

$$B^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & (-2)^9 & (-1)^9 \\ (-2)^9 & -2^9 & (-1)^9 \\ 0 & 0 & (-1)^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 512 & -512 & -1 \\ -512 & 512 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B^{10} \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 512 & -512 & -1 \\ -512 & 512 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 512 & -512 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 512 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{|A\, B^{10} . A^t| = 0}$ Por contener una fila de 0