

Ejercicio n° 1.- Realiza las siguientes operaciones y **simplifica** al máximo los resultados:

$$a) \frac{(-x^2)^5}{(x^2)^3 \cdot (-x)^2} = \frac{-x^{10}}{x^6 \cdot x^2} = \frac{-x^{10}}{x^8} = -x^2$$

$$b) \frac{1}{5}\sqrt{75} + \sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{243} = \frac{1}{5}\sqrt{3 \cdot 5^2} + \sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3^5} = \frac{5}{5}\sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{3^2}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{9}{2}\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 9\sqrt{3}}{2} = \frac{-5\sqrt{3}}{2} = -\frac{5}{2}\sqrt{3}$$

$$c) \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{(2+\sqrt{2}) \cdot (2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2}) \cdot (2+\sqrt{2})} = \frac{4+4\sqrt{2}+\sqrt{2}^2}{2^2-\sqrt{2}^2} = \frac{6+4\sqrt{2}}{4-2} = \frac{6+4\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{2} + \frac{4}{2}\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}$$

Ejercicio n° 2.- Resuelve las ecuaciones:

$$a) \quad 2 \cdot (2x+1)^2 - 3 \cdot (2x-1)^2 + 5 \cdot (2x-1) \cdot (2x+1) = 0 \rightarrow 2 \cdot (4x^2 + 1 + 4x) - 3 \cdot (4x^2 + 1 - 4x) + 5 \cdot (4x^2 - 1) = 0 \\ \rightarrow 8x^2 + 2 + 8x - 12x^2 - 3 + 12x + 20x^2 - 5 = 0 \rightarrow 16x^2 + 20x - 6 = 0 \rightarrow 8x^2 + 10x - 3 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-3)}}{2 \cdot 8} = \frac{-10 \pm \sqrt{196}}{16} = \frac{-10 \pm 14}{16} = \begin{cases} x_1 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \\ x_2 = \frac{-24}{16} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$b) \quad x + \sqrt{7-3x} = -1 \rightarrow \sqrt{7-3x} = -1-x \rightarrow (\sqrt{7-3x})^2 = (-1-x)^2 \rightarrow 7-3x = (-1)^2 + x^2 - 2 \cdot (-1) \cdot x \rightarrow \\ \rightarrow 7-3x = 1+x^2+2x \rightarrow 0 = x^2+5x-6 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-12}{2} = -6 \end{cases}$$

Comprobación obligatoria :

Si $x = 1 \rightarrow 1 + \sqrt{7-3 \cdot 1} = -1 \rightarrow 1 + \sqrt{4} = -1 \rightarrow 3 \neq -1 \rightarrow$ Luego $x = 1$ no es solución

Si $x = -6 \rightarrow -6 + \sqrt{7-3 \cdot (-6)} = -1 \rightarrow -6 + \sqrt{25} = -1 \rightarrow -1 = -1 \rightarrow$ Luego $x = -6$ es solución

$$c) \quad 2x \cdot (5x-3) \cdot (1-x^2) = 0 \rightarrow \text{Igualamos a 0 cada factor y resolvemos} \\ x = 0 \\ 5x-3=0 \rightarrow x = \frac{3}{5} \\ 1-x^2=0 \rightarrow 1=x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} \rightarrow x=1, x=-1$$

$$d) \quad \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x} = \frac{2-5x}{x^2+3x} \rightarrow \frac{x}{(x+3)x} - \frac{2(x+3)}{x(x+3)} = \frac{2-5x}{x^2+3x} \rightarrow \frac{x-2(x+3)}{x(x+3)} = \frac{2-5x}{x(x+3)} \rightarrow x-2x-6=2-5x \rightarrow \\ \rightarrow x-2x+5x=2+6 \rightarrow 4x=8 \rightarrow x=2 \text{ Es solución puesto que no anula ningún denominador}$$

e) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0 \rightarrow$ Descomponemos en factores el polinomio, usamos el criterio de divisibilidad, el teorema del resto y el método de Ruffini para dividir polinomios

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -3 & -9 & 10 \\ & & 2 & -1 & 10 \\ \hline & 2 & -1 & -10 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -1 & -10 \\ & & -4 & 10 \\ \hline & 2 & -5 & 0 \end{array}$$

$(x-1) \cdot (x+2) \cdot (2x-5) = 0 \rightarrow$ Igualamos a 0 cada factor y resolvemos

$$x-1=0 \rightarrow x=1 \quad x+2=0 \rightarrow x=-2 \quad 2x-5=0 \rightarrow x=\frac{5}{2}$$

Ejercicio n° 3.- Resuelve el sistema de ecuaciones no lineal por el método que estimes más adecuado:

$$\begin{cases} x \cdot y = 15 \rightarrow x = \frac{15}{y} \text{ Por sustitución} \\ 4x^2 - y^2 = 11 \rightarrow 4 \cdot \left(\frac{15}{y}\right)^2 - y^2 = 11 \rightarrow \frac{4 \cdot 225}{y^2} - y^2 = 11 \rightarrow 900 - y^4 = 11y^2 \rightarrow 0 = y^4 + 11y^2 - 900 \end{cases}$$

Re resolvemos la ecuación bicuadrada resolviendo mediante un cambio de variable $t = y^2$; $t^2 = y^4$

$$t^2 + 11t - 900 = 0 \rightarrow t = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-900)}}{2 \cdot 1} = \frac{-11 \pm 61}{2} = \begin{cases} t = \frac{-11+61}{2} = \frac{50}{2} = 25 \\ t = \frac{-11-61}{2} = \frac{-72}{2} = -36 \end{cases}$$

Ahora deshacemos el cambio y averiguamos la variable y

si $t = 25 \rightarrow 25 = y^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{25} \rightarrow y = \pm 5$

si $t = -36 \rightarrow -36 = y^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{-36} \rightarrow y = \text{no es un valor real}$

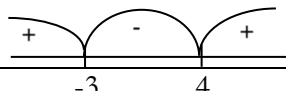
Terminamos averiguando para cada y el valor de x correspondiente:

si $y = 5 \rightarrow x = \frac{15}{5} \rightarrow x = 3$ si $y = -5 \rightarrow x = \frac{15}{-5} \rightarrow x = -3$

El sistema tiene dos soluciones: $(x, y) = (3, 5)$ $(x, y) = (-3, -5)$

Ejercicio n° 4.- Resuelve las inecuaciones, expresando las soluciones en forma de intervalo, si es posible:

a) $x^2 - 2x - 7 > 5 - x \rightarrow x^2 - x - 12 > 0 \rightarrow$ Estudiamos el signo del polinomio, buscamos las raíces del polinomio y lo descomponemos en factores: $x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-12)}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$

$(x-4) \cdot (x+3) > 0$  Solución: $(-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$

b) $\begin{cases} 2x+4 > 0 \rightarrow 2x > -4 \rightarrow x > -2 \\ -2x+7 \geq \frac{x}{2}-3 \rightarrow -4x+14 \geq x-6 \rightarrow -5x \geq -20 \rightarrow x \leq \frac{-20}{-5} \rightarrow x \leq 4 \end{cases}$

Luego la solución del sistema son todos los números mayores que -2 y al mismo tiempo menores o iguales que 4 : $(-2, +\infty) \cap (-\infty, 4] = (-2, 4]$

Ejercicio n° 5.- Un comerciante compra dos bicicletas por 3950 € y las vende por 4222 €. Averigua cuánto pagó por cada una si en la venta de la primera ganó un 20% y en la de la segunda perdió un 8%.

Llamamos $x =$ precio que pagó por la bici 1 $y =$ precio que pagó por la bici 2

$$\begin{cases} x + y = 3950 \\ 1'20x + 0'92y = 4222 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3950 - y \text{ sustituimos} \\ 1'20(3950 - y) + 0'92y = 4222 \rightarrow \text{resolvemos } y = 1850; x = 2100 \end{cases}$$

Solución: Pagó 2100 € por la bici 1 y 1850 € por la bici 2

Ejercicio n° 6.- Un grupo de amigos alquila una furgoneta por 490 € para hacer un viaje. A última hora se apuntan dos más y así se devuelven 28 € a cada uno de los otros. ¿Cuántos fueron de excursión y cuánto pagó cada uno?

Llamamos $x = \text{número de amigos que se iban de viaje}$ $y = \text{precio que pagaba cada uno}$

$$\begin{cases} x \cdot y = 490 \\ (x+2) \cdot (y-28) = 490 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{490}{y} \text{ sustituimos} \\ \left(\frac{490}{y} + 2\right) \cdot (y-28) = 490 \rightarrow \text{resolvemos } 490 - \frac{13720}{y} + 2y - 56 = 490 \rightarrow$$

$$\rightarrow -13720 + 2y^2 - 56y = 0 \rightarrow 2y^2 - 56y - 13720 = 0 \rightarrow y = \frac{56 \pm \sqrt{3136 + 109760}}{4} = \frac{56 \pm 336}{4} = \begin{cases} y = 98 \\ y = -70 \text{ no vale} \end{cases}$$

si $y = 98 \rightarrow x = \frac{490}{98} = 5$ **Solución:** Fueron 7 amigos de viaje y cada uno pagó 70 €

Ejercicio n° 7.- Halla las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 13 m, y su área, 60 m².

Llamamos $x = \text{un lado del rectángulo}$ $y = \text{el otro lado}$

$$\begin{cases} x \cdot y = 60 \\ x^2 + y^2 = 13^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{60}{y} \text{ sustituimos} \\ \left(\frac{60}{y}\right)^2 + y^2 = 169 \rightarrow \text{resolvemos } \frac{3600}{y^2} + y^2 = 169 \rightarrow 3600 + y^4 = 169y^2 \rightarrow y^4 - 169y^2 + 3600 = 0 \end{cases}$$

Aplicamos un cambio de variable $\rightarrow z = y^2 \rightarrow z^2 - 169z + 3600 = 0 \rightarrow z = \frac{169 \pm \sqrt{169^2 - 14400}}{2} = \frac{169 \pm 119}{2} =$

$$\rightarrow \begin{cases} z = 144 \\ z = 25 \end{cases}$$

si $z = 144 \rightarrow \begin{cases} y = 12 \\ y = -12 \text{ no válida} \end{cases} \rightarrow \text{si } y = 12 \rightarrow x = 5$

si $z = 25 \rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -5 \text{ no válida} \end{cases} \rightarrow \text{si } y = 5 \rightarrow x = 12$

Solución: Las dimensiones del rectángulo son 12 m y 5 m