1. **[2 puntos]** Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = 6$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} z/2 & z+7 & 3 \\ y/2 & y & 3 \\ x/2 & x-3 & 3 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2. **[2 puntos]** Halla el rango de la siguiente matriz en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & m^2 & 3m \end{pmatrix}$$

3. **[3 puntos]** Estudia el carácter del siguiente sistema usando el teorema de Rouché-Frobenius. Caso de que tenga solución, resuélvelo <u>usando la regla de Cramer</u>.

$$\begin{cases} -2x - z = \\ x + \;\; y + 3z = \\ x - y - 2z = -2 \\ -3y - 2z = 1 \end{cases}$$

4. Se considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 0 \end{cases}$

   a) **[2 puntos]** Discútelo para los distintos valores de *m*.

   b) **[1 punto]** Resuélvelo para $m = 1$.

Soluciones

1. $\begin{vmatrix} z/2 & z+7 & 3 \\ y/2 & y & 3 \\ x/2 & x-3 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x/2 & x-3 & 3 \\ y/2 & y & 3 \\ z/2 & z+7 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x/2 & x & 3 \\ y/2 & y & 3 \\ z/2 & z & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x/2 & -3 & 3 \\ y/2 & 0 & 3 \\ z/2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 6 = -9$

$$\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 1 & 2 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = 6\cdot 0 + 2\cdot 6 = 12$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & m^2 & 3m \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 - 2f_1 \\ f_3 - f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & m^2-3 & 3m-2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3 - f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & m^2-1 & 3m+3 \end{pmatrix}$

   Está claro que si $m=-1$, la última fila se anula, con lo que $r(A)=2$. En caso contrario, si $m\neq -1$, se tiene que $r(A)=3$

3. La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema $\begin{cases} -2x - z = \\ x + \ \ y + 3z = \\ x - y - 2z = -2 \\ -3y - 2z = 1 \end{cases}$ son, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } A|b = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   El rango de la matriz A es tres pues contiene un menor de orden tres distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (8+1) - (-2+6) = 9 - 4 = 5$$

   El rango de la matriz $A|b$ también es tres pues el único menor de orden cuatro es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} f_1 + 2f_2 \\ = \ f_2 - f_3 \ = \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (20-30-6) - (-15+15-16) = 0$$

   Por tanto $r(A) = r(A|b) = 3 = n$ y el sistema es compatible determinado (solución única). Para resolverlo se elimina la última ecuación y, usando la regla de Cramer tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{5} = -1,\ y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{5} = -1,\ z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{5} = 1$$

4. La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema $\begin{cases}(m+2)x+(m-1)y-z=3\\ mx-y+z=2\\ x+my-z=0\end{cases}$ son:

$$A=\begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1\\ m & 1 & 1\\ 1 & m & -1\end{pmatrix} \text{ y } A|b=\begin{pmatrix} m+2 & -1 & -1 & 3\\ m & -1 & 1 & 2\\ 1 & m & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1\\ m & -1 & 1\\ 1 & m & -1\end{vmatrix}=\left(m+2+m-1-m^2\right)-\left(1-m^2+m+m^2+2m\right)=-m^2-m=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0\\ m=-1\end{cases}$$

Por tanto, si $m\neq 0$ y $m\neq -1$, $r\left(A\right)=3=r\left(A\ \ b\right)=n$ y el sistema es compatible determinado.

Si $m=0$, la matriz ampliada es $A|b=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$, cuyo rango es 3 pues contiene un menor de orden tres distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-2+3=1$, por tanto $r\left(A\right)=2\neq 3=r\left(A|b\right)$ y el sistema es incompatible.

Si $m=-1$, la matriz ampliada es $A|b=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3\\ -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, cuyo rango también es 3 pues contiene un menor de orden tres distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3\\ -1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3\\ -1 & -2 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 3\\ -2 & 2\end{vmatrix}=-2+6=4$, por tanto otra vez, en este caso, $r\left(A\right)=2\neq 3=r\left(A|b\right)$ y el sistema vuelve a ser incompatible.

Para $m=1$, el sistema es $\begin{cases} -z=3\\ x-y+z=2\\ x+y-z=0\end{cases}$. Además, se tiene que $|A|=-2$, con lo que, usando la regla de Cramer, las soluciones son las siguientes:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}}{-2}=1,\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}}{-2}=-1,\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}}{-2}=0$$