EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Escribe la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación: $xy = arcsen\left(\frac{x}{2}\right)$ en el punto de abscisa x = 1

2. Haz un estudio de todas las asíntotas de la función: $f(x) = \frac{1-e^x}{x^2}$

3. Halla los valores **exactos** de los puntos de inflexión de la curva $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$

4. Considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{1-x} & \text{Si } x \le 0 \\ 1 - sen(2x) & \text{Si } x > 0 \end{cases}$ siendo ***a*** un nº real

   a) Halla razonadamente el dominio de *f(x)*

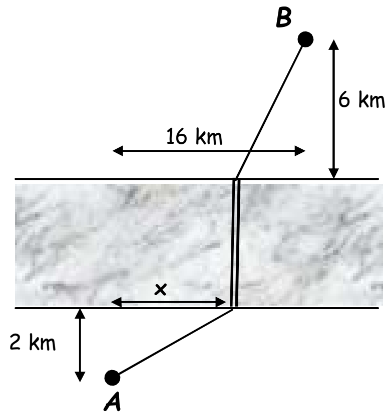
   b) Estudia para qué valores de '***a***' la función *f(x)* resulta ser continua en *x* = 0

   c) Estudia para qué valores de '***a***' la función *f(x)* resulta ser derivable en *x* = 0

5. Una estalactita tiene la forma de un cono invertido de base circular cuya altura crece de manera constante 3mm cada siglo mientras que el radio de su base decrece a un ritmo constante de 0,5mm cada siglo. Calcule su tasa de variación de su volumen en el momento que mide 200mm de alto y 40mm de radio.

6. Se quiere construir una carretera entre dos pueblos ***A*** y ***B*** separados por un río de anchura ***k***, las distancias son las que muestra el dibujo. Las condiciones del diseño son las siguientes:

   - La longitud final de la carretera debe ser mínima.
   - El puente sobre el río debe estar situado en el espacio del río entre los pueblos ***A*** y ***B*** y ser perpendicular a sus orillas como muestra el gráfico.



   a) Demuestra que la distancia entre ***A*** y ***B*** sigue la función:

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2 - 32x + 292} + k$$

   b) Utiliza la calculadora gráfica para explicar a qué distancia, ***x*** en el dibujo, debemos construir el puente. Haz un esbozo de la gráfica. ¿Influye la constante ***k*** en el valor de ***x*** encontrado? Razona la respuesta.

   c) ¿Cuál sería la peor solución, esto es, la que necesitase una carretera de mayor longitud?

(1)

$$xy = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$1\cdot y + x\cdot y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2} \quad ; \quad xy' = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} - y \quad ; \quad xy' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} - y \quad ;$$

$$y' = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} - y\right)$$

$$x = 1 \to 1\cdot y = \arcsin\frac{1}{2} \quad ; \quad y = \pi/6$$

$$\to y' = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{\sqrt{4-1}} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}-\pi}{6}$$

Recta Normal : $\boxed{y - \frac{\pi}{6} = -\frac{6}{2\sqrt{3}-\pi}(x-1)}$

(2)

$$f(x) = \frac{1-e^x}{x^2}$$

$$\mathrm{dom} f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2x} = \frac{-1}{0} = \infty \Rightarrow \boxed{\text{Asíntota Vertical } x=0}$$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1-e^x}{x^2} = \frac{1-0}{+\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{Asíntota Horizontal } y=0 \text{ cuando } x\to -\infty}$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1-e^x}{x^2} = \frac{-\infty}{+\infty}$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-e^x}{2x} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-e^x}{2} = -\infty \to \text{No tiene Asíntota Horizontal cuando } x\to +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1-e^x}{x^3} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-e^x}{3x^2} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-e^x}{6x} = \frac{-\infty}{+\infty} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-e^x}{6} = -\infty \to \text{No tiene Asíntota oblicua cuando } x\to +\infty$$

③ $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x^2)}$

$\ln(x^2) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \longrightarrow \boxed{\text{dom} f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}}$

$$f'(x) = \frac{\ln(x^2) - x\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{\ln^2(x^2)} = \frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x\cdot \ln^{\cancel{2}}(x^2) - (\ln(x^2) - 2)\cdot 2\cancel{\ln(x^2)}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{\ln^{\cancel{4}\,3}(x^2)} =$$

$$= \frac{\frac{2\ln(x^2)}{x} - \frac{4\ln(x^2)}{x} + \frac{8}{x}}{\ln^3(x^2)} = \frac{8 - 2\ln(x^2)}{x\ln^3(x^2)}$$

$f''(x) = 0 \to 8 - 2\ln(x^2) = 0 \;;\; \ln(x^2) = 4 \;;\; x^2 = e^4 \;;\; x = \pm\sqrt{e^4} = \pm e^2$

		$-e^2$		-1		0		1		e^2	
f''	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$
f	Cónc.		Conv.		Cónc.		Conv.		Cónc.		Convexa
		INF								INF	

Puntos de Inflexión: $\boxed{\left(e^2, \frac{e^2}{4}\right) \quad \left(-e^2, -\frac{e^2}{4}\right)}$

④ a] $\dfrac{e^{ax}}{1-x}$ no estaría definido en $x=1$, pero $1 \notin 0$ $\Big\}\Rightarrow \text{dom} f = \mathbb{R}$

$1 - \text{sen}(2x)$ está definido en $\mathbb{R}$

b]
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{e^0}{1-0} = 1 \\ f(0) = \dfrac{e^0}{1-0} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 - \text{sen}\,0 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 0 \text{ para } \boxed{a\in\mathbb{R}}$$

c]
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{ae^{ax}(1-x) - e^{ax}\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{e^{ax}(a - ax + 1)}{(1-x)^2} & \text{si } x<0 \\ -\cos(2x)\cdot 2 & \text{si } x>0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \dfrac{1\cdot(a-0+1)}{1^2} = a+1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -2\cos 0 = -2\end{array}\right\} \begin{array}{l} a+1 = -2 \Rightarrow \boxed{a=-3} \\ \text{Resulta Derivable para } \boxed{a=-3}\end{array}$$

⑤

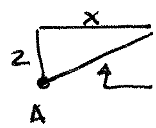
$\dfrac{dH}{dt} = 3$ mm/seg

$\dfrac{dR}{dt} = -0'5$ mm/seg

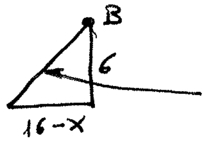
$$V = \frac{\pi R^2 H}{3} \;;\; \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left(2R\frac{dR}{dt}H + R^2\frac{dH}{dt}\right) = \frac{\pi}{3}\left(2RH\cdot(-0'5) + R^2\cdot 3\right) =$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(3R^2 - RH\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} H = 200 \\ R = 40 \end{array}\right| \longrightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left(3 \cdot 40^2 - 40 \cdot 200\right) = -3351 \text{ km}^3/\text{siglo}$$

6) **a)**



$\sqrt{x^2+2^2} = \sqrt{x^2+4}$

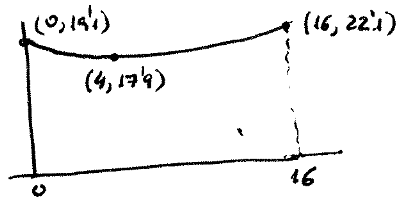


$\sqrt{(16-x)^2+6^2} = \sqrt{x^2-32x+292}$

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2-32x+292} + k \quad ✓$$

b) Al estar únicamente sumando, la constante K no debe influir en la optimización de f(x). Otra manera de entendederlo es que la constante K no aparece en la expresión de f'(x).

En consecuencia introducimos la función $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2-32x+292}$ en la calculadora gráfica, observando:



Deberíamos construir el puente con $\boxed{x = 4 \text{ Km}}$, siendo longitud mínima = 17'9 Km

Comparando los puntos inicial y final del dominio, la peor solución sería con $\boxed{x = 16 \text{ Km}}$ siendo longitud máxima = 22'1 Km