EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Halla $\lim_{x \to 0^+} x^{senx}$

2. Una curva está definida por la ecuación $8y\ln x - 2x^2 + 4y^2 = 7$. Halle la ecuación de la tangente a la curva en el punto con x = 1 e y > 0

3. Estudia qué puntos de la curva $y^2 = 4x$ son los más cercanos al punto (4, 0)

4. Sea la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 - 4 & \text{si } x < 0 \\ -a(x-2)^2 + 4a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

   a) Determina los valores de a que hacen continua la función en x = 0.

   b) Determina los valores de a que hacen derivable la función en x = 0.

5. Sea $f(x) = \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{12}{x^2-9}$. Se pide:

   a) Dominio de definición

   b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

   c) Comprobar si la función es continua en x=3

   d) Calcular el límite de la función cuando x tiende a -3.

6. a) Dibuje aproximadamente la curva $y = |\ln x| - |\cos x| - 0{,}1$ para $0 < x < 4$, mostrando claramente las coordenadas de los puntos de corte con el eje x y las coordenadas de todos los máximos y mínimos locales.

   b) Halle los valores de x para los cuales $|\ln x| > |\cos x| + 0{,}1$ para $0 < x < 4$

(1)

$$\lim_{x\to0^+} x^{\sin x} = 0^0 = e^{\lim_{x\to0^+}\ln x^{\sin x}} = e^{\lim_{x\to0^+}\sin x\cdot\ln x} = e^{0\cdot\infty} =$$

$$= e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/\sin x}} = e^{-\infty/0} = e^{-\infty/\infty} =$$

$$= e^{\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-\cos x/\sin^2 x}} = e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{-x\cos x}} = e^{\frac{0}{0}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to0^+}\frac{2\sin x\cos x}{-\cos x + x\sin x}} = e^{\frac{0}{-1+0}} = e^0 = \boxed{1}$$

(2)

$8y\ln x - 2x^2 + 4y^2 = 7$

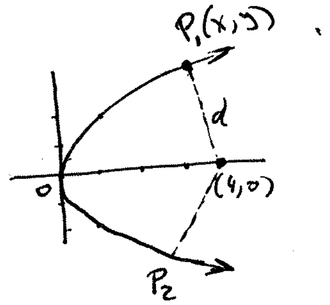
$8y'\ln x + 8y\frac{1}{x} - 4x + 8yy' = 0$; $8y'(\ln x + y) = 4x - \frac{8y}{x}$; $y' = \frac{x - 2y/x}{2(\ln x + y)}$

$x=1 \to 8y\cdot 0 - 2 + 4y^2 = 7 \to 4y^2 = 9 \to y = \begin{cases} 3/2 \\ \cancel{-3/2} \end{cases}$ porque $y>0$

$\to y' = \dfrac{1 - \frac{2\cdot 3/2}{1}}{2(\ln 1 + \frac{3}{2})} = \dfrac{1-3}{3} = -\dfrac{2}{3}$

Recta Tangente : $\boxed{y - \frac{3}{2} = -\frac{2}{3}(x-1)}$

(3)



$d = \left|\begin{matrix} x-4 \\ y \end{matrix}\right| = \sqrt{(x-4)^2+y^2}$

Minimizar $d = \sqrt{(x-4)^2+y^2}$

Siendo $y^2 = 4x$

$d = \sqrt{(x-4)^2+4x} = \sqrt{x^2-8x+16+4x} = \sqrt{x^2-4x+16}$, $x \geq 0$

$d' = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+16}} = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+16}}$

$d' = 0 \Rightarrow \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+16}} = 0$; $x=2$

Mínima distancia para $x=2$.

	0		2	
d'		$-$		$+$
d		$\searrow$		$\nearrow$
			MIN	

$x=2 \to y^2 = 4\cdot 2$; $y = \pm\sqrt{8}$

$\boxed{P_1(2,\sqrt{8}) \quad P_2(2,-\sqrt{8})}$

④ $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2-4 & x<0 \\ -a(x-2)^2+4a & x\geq 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = (0+2)^2-4=0$

$f(0) = -a(0-2)^2+4a = -4a+4a=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -a(0-2)^2+4a = -4a+4a=0$

$\Rightarrow$ f es continua en $x=0$ para cualquier $a\in\mathbb{R}$

b) $f'(x) = \begin{cases} 2(x+2) & x<0 \\ -2a(x-2) & x>0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 2(0+2)=4$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -2a(0-2) = 4a$

$\Rightarrow$ f será derivable en $x=0$ para: $4a=4 \Rightarrow \boxed{a=1}$

y la derivada será $f'(0)=4$

⑤

$$f(x) = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{(x+3)(x-3)} = \frac{2(x+3)-12}{(x+3)(x-3)} = \frac{2x-6}{(x+3)(x-3)} = \frac{2x-6}{x^2-9}$$

a) $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} - \{3,-3\}$

b) $$f'(x) = \frac{2(x^2-9)-(2x-6)\cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{2x^2-18-4x^2+12x}{(x^2-9)^2} = \frac{-2x^2+12x-18}{(x^2-9)^2} = \frac{-2(x^2-6x+9)}{(x^2-9)^2}$$

$f'(x)=0 \rightarrow \frac{-2(x^2-6x+9)}{(x^2-9)^2}=0$; $x^2-6x+9=0$;

$x = \frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2} = \frac{6\pm 0}{2} = 3$. Imposible porque no pertenece al dom f.

		-3		3	
f'	$-$		$-$		$-$
f	$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$

f es decreciente en todo su dominio.

c) f no puede ser continua en $x=3$ por no estar definida en dicho valor de x.

Veamos el tipo de discontinuidad:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}\right) = \cancel{\infty - \infty} = \lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{2}{2x} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

f tiene una discontinuidad <u>EVITABLE</u> en $x=3$

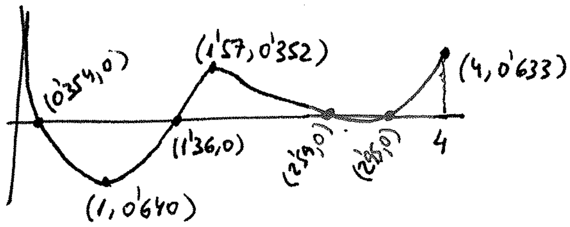
d) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^-} \frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{-6-6}{+0} = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} \frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{-6-6}{-0} = \boxed{+\infty}$

<u>Salto Infinito</u> en $x=-3$

⑥

a) Observado con la calculadora gráfica:



Puntos corte con eje X: (0'354,0)
(1'36,0)
(2'59,0)
(2'95,0)

Máximo local: (1'57, 0'352)

Mínimos locales: (1, 0'640)
(2'59, 0)

b) $|\ln x| > |\cos x| + 0'1 \Rightarrow |\ln x| - |\cos x| - 0'1 > 0$.

Observando los intervalos en los que $f(x) > 0$:

$$\boxed{x \in (0, 0'354) \cup (1'36, 2'59) \cup (2'95, 4)}$$