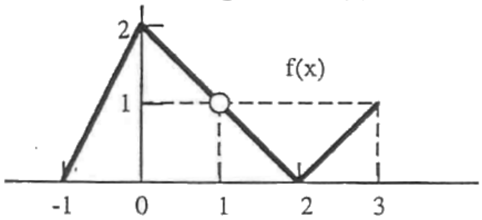
Cálculo Diferencial en las PAU de Asturias

Jun 94

i) Interpreta razonadamente el concepto geométrico de derivada.
ii) Como aplicación del apartado anterior y sin calcular la expresión analítica de f(x), obtener la representación gráfica de f '(x) siendo la gráfica de f(x)



(Nota: el símbolo "o" de la gráfica quiere significar que la función f(x) no está definida en x = 1).
Razona las respuestas.

Sept 94

Dada la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x^3 + 2ax^2 + bx + 3}$

se pide: i) Determinar a y b sabiendo que la función f(x) presenta una discontinuidad evitable en el punto x = 1. ii) Definir una función g(x) que sea continua en x = 1 y que coincida con f(x) en el dominio de definición de ésta.
Razona las respuestas.

Sept 94

Hallar los coeficientes de la ecuación $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para que la curva correspondiente presente en el punto (2, 1) una inflexión con tangente paralela al eje OX, pasando dicha curva por el origen de coordenadas.

Jun 95

i) Esbozar la gráfica de una función f(x) que cumpla, a la vez, que: en $x = -3$ tenga una discontinuidad evitable, en $x = -1$ tenga una discontinuidad de salto (admita límites laterales finitos distintos), en $x = 1$ tenga una discontinuidad asintótica con $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$, y además $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$.
ii) Obtener la expresión analítica de una de tales funciones.
Razona las respuestas.

Sept 95

i) Obtener, de forma razonada, la gráfica de una función continua y = f(x) que cumpla las siguientes condiciones: $f(-2) = f(0) = f(2) = 0$, $f(-1) = 1$, $f(1) = -1$, $f'(-1) = f'(1) = 0$, $f'(x) < 0$ para $|x| < 1$, $f'(x) > 0$ para $1 < |x| < 2$, $f'(x) = -1$ para $|x| > 2$, $f''(x) < 0$ para $-2 < x < 0$, $f''(x) > 0$ para $0 < x < 2$.
ii) ¿ Existe algún punto donde f(x) no sea derivable? ¿ Cuáles son los máximos y mínimos relativos de f(x) ? ¿ Admite la función asíntotas? Justifica todas las respuestas.

Jun 96

i) Dibujar la gráfica de la función f(x) = ln x, atendiendo a los siguientes puntos: dominio de definición, corte con los ejes, asíntotas verticales, intervalos de monotonía e intervalos de concavidad.
ii) A partir de la gráfica anterior, establecer razonadamente cómo serían las gráficas de las funciones: a) $\ln |x|$, b) $|\ln x|$, c) $\ln (x-2)$.
(Nota : ln x es el logaritmo neperiano de x).

Sept 96

Dada la función $f(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{|x| + 1}$

i) Estudiar, a partir de la definición, la continuidad y derivabilidad de f(x) en los puntos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$. ii) Determinar el dominio y la expresión de la función derivada.
Razona las respuestas.

Jun 97

El propietario de un inmueble dispone de 40 apartamentos para alquilar. Piensa que podría alquilarlos todos si el precio del alquiler fuese de 50.000 ptas. mensuales por cada uno de ellos, pero que si el precio fuera superior le quedarían algunos apartamentos sin alquilar. Por experiencia, sabe que por cada 2.500 ptas. que aumente el precio del alquiler de cada apartamento, alquilará un apartamento menos. ¿Cuál debe ser el precio del alquiler de cada apartamento para conseguir la máxima ganancia?

Sept 97

i) Definir mínimo relativo y mínimo absoluto.
ii) Como aplicación, demostrar que para cualquier valor positivo de x, se verifica la desigualdad

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 .$$

Jun 98

i) Calcula para que valor de α la función $f(x)=(x-\alpha)^2+\cos(x)$ tiene un extremo en el punto de abscisa $x=0$.¿De qué tipo de extremo se trata?

ii) Para el valor de α calculado, determina los cortes de la curva con los ejes y los dominios de monotonía.

Sept 98

i) Representa gráficamente las funciones $f(x)=x^2-4x+3$ y $g(x)=|x|$

ii) Utiliza las gráficas anteriores para obtener las de las funciones

$y = f(g(x))$ $y = g(f(x))$

Jun 99

Sea $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

i) Determina los cortes con ejes

ii) Calcula los dominios de monotonía.

iii) Analiza los máximos y mínimos.

iv) Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

v) Esboza la gráfica de la función f

Jun 99

Sea $y=x^2+\alpha$

Calcula el valor de α para el que las tangentes a la curva en los puntos de abscisa de valor absoluto uno, pasan por el origen de coordenadas.

Sept 99

Determina las medidas de los lados de un rectángulo de área 1, de modo que la suma de las longitudes de tres de sus lados sea mínima.

Jun 00

Sea $f: R \to R$ verificando que $f'(x)>0 \quad \forall x \in R$

i) Analiza el crecimiento y decrecimiento de la función $g(x)=f(e^x)$

ii) ¿Tiene algún extremo relativo la función $h(x)=e^{-f(x)}$?. Justifica las respuestas.

Sept 00

Sea $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

De todos los rectángulos con un lado contenido en el eje de abscisas y siendo dos vértices opuestos los puntos P = (-1 , 0) y Q = (x , f(x)) calcula las longitudes de los lados del de área máxima.

Sept 00

Sea $f(x)=(x-1)^2$

Determina la ecuación de la recta **r** que pasa por el punto (0,6) y es paralela a la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 2$.

Jun 01

Sea f la función definida por $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\ge 3 \\ 2x+a & x<3 \end{cases}$

a) Encuentra el valor de a para que f sea continua

b) Comprueba si es derivable en $x=3$ a partir de la definición.

Sept 01

Sea la función $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$

a) Estudia la derivabilidad en x =0.

b) Calcula los puntos de corte con los ejes.

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Calcula los máximos y los mínimos relativos.

e) Haz una representación gráfica aproximada de esta función.

Jun 02

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+3x+5 & x\ge 1 \\ 5x+b & x<1 \end{cases}$

b) Determinar los valores de a y b para que sea continua y derivable en todo número real.

Sept 02

Sea $f(x)=\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{12}{x^2-9}$. Se pide

a) Dominio de definición.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Comprobar si la función es continua en $x=3$.

d) Calcular el límite de la función cuando x tiende a -3.

Jun 03

Sea la función $y=2\sqrt{\dfrac{2}{x}-1}$

a) Indicar su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

b) Realizar una representación gráfica aproximada de la misma.

Sept 03

Determinar los puntos de la curva $y^2=4x$ que están a distancia mínima de $(4,0)$

Jun 04

Dadas las funciones $f(x)=(x+1)^2$, $g(x)=(x-1)^2$ y $h(x)=\operatorname{sen} x$ calcula los siguientes límites

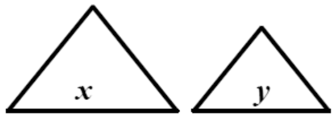
a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{h(x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{g(x)-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+g(x)-2}{(h(x))^2}$

Jun 04

Dibuja aproximadamente la gráfica de la función $f(x)=1-\dfrac{1}{x+1}$ calculando su dominio de definición, sus asíntotas, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión.

Sept 04

Con 60 centímetros de alambre se construyen dos triángulos equiláteros cuyos lados miden x e y ¿Qué valores de x e y hacen que la suma de las áreas de los triángulos sea mínima?



Sept 04

Sea la curva descrita por la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$ para valores de $x>2$. Calcula:

a) La recta tangente a la gráfica en el punto P de la curva de abscisa $x=3$.

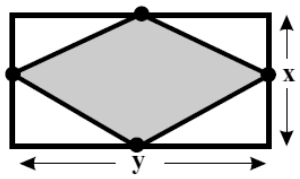
b) El punto de corte entre esa recta tangente y la asíntota horizontal de la curva.

Jun 05

Sea la función con valores reales $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ (se considera sólo la raíz positiva). Calcula: a) La recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(0,0)$.

Jun 05

Se dispone de una tela metálica de 100 metros de longitud para vallar una región rectangular. ¿Cuáles son los valores x e y, dimensiones del rectángulo, que hacen que el área del romboide, formado por la unión de los puntos medios de los lados, sea máxima?

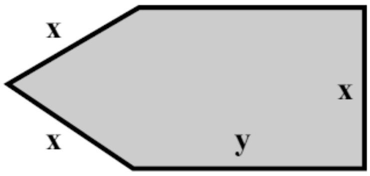


Jun 05

Dibuja aproximadamente la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ calculando su dominio de definición, sus asíntotas, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión.

Sept 05

Se dispone de una tela metálica de 100 metros de longitud para vallar una región como la de la figura. ¿Cuáles son los valores de x e y que hacen que el área encerrada sea máxima?



Sept 05

Sea la función $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2-4 & x<0\\ -a(x-2)^2+4a & x\geq 0\end{cases}$

a) Determina los valores de a que hacen continua la función en $x=0$.

b) Determina los valores de a que hacen derivable la función en $x=0$.

Sept 05 Sea la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$ Calcula:

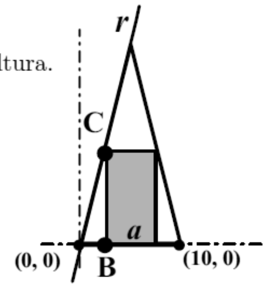
a) Su dominio de definición. Sus máximos y mínimos en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Jun 06 El triángulo isósceles, descrito en la figura, mide $10\,cm$ de base y $20\,cm$ de altura.

a) ¿Cuál es la ecuación de la recta r señalada en la figura que contiene el lado del triángulo?

b) Dado el rectángulo inscrito cuya base mide a, calcula las coordenadas de los puntos B y C en función de a.

c) Halla el valor de a que hace máxima el área del rectángulo.



Jun 06 Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & x \le -2 \\ 2x + 4 & -2 < x \le 0 \\ a \cos x & x > 0 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad en toda la recta real en función de a.

b) Estudia su derivabilidad en toda la recta real en función de a.

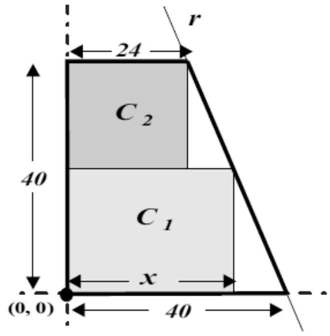
c) Para $a = 4$, haz un dibujo aproximado de su gráfica.

Sept 06 Un campo tiene forma de trapecio rectángulo. La longitud de las bases son: 24m y 40m, y la de su altura 40m. Se divide en dos campos rectangulares C_1 y C_2. Situando el campo en el origen de coordenadas como muestra la figura, calcula:

a) La ecuación de la recta r que contiene el lado inclinado del trapecio.

b) El área de los campos en función de la anchura x de C_1.

c) Se quiere sembrar maíz en el campo C_1 y trigo en C_2. El beneficio del maíz es de 1.2 euros por m^2 y el del trigo 1 euro ¿cuáles son las dimensiones de los campos que hacen el beneficio máximo?



Sept 06 Calcula: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

Jun 07 Calcula: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \left(\frac{2^n - 8}{2^{n+1}}\right)$

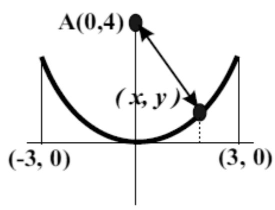
(Se considera la raíz positiva)

Jun 07 Un río describe la curva $y = \frac{1}{4}x^2$ con $x \in [-3, 3]$. En el punto $A(0, 4)$ hay un pueblo:

a) Expresa la función distancia entre un punto cualquiera del río y el pueblo en función de la abscisa x.

b) ¿Cuáles son los puntos de este tramo del río que están más alejados y más cercanos al pueblo? (Sugerencia: estudia los máximos y mínimos del cuadrado de la función hallada en el apartado anterior)

c) ¿Hay algún punto del río que esté a una distancia menor que 2 del pueblo?



Sept 07 Dada la función $y = x^4 e^{-x}$

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

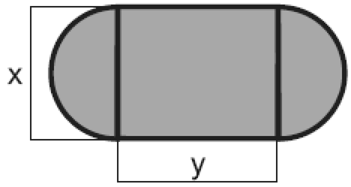
b) Halla, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

c) Dibuja aproximadamente su gráfica.

Sept 07 Dada la función $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ determina las constantes a, b, c, d de manera que simultáneamente:

- Su gráfica pase por el origen de coordenadas y por el punto $(2, 2)$.
- La función posea un punto de inflexión en $x = 0$.
- La función posea un mínimo en $x = 1$.

Jun 08 Se dispone de 200 m de tela metálica y se desea vallar un recinto formado por un rectángulo y dos semicírculos como indica la figura. Determine las dimensiones de x e y para que el área encerrada sea máxima.



Jun 08 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 3, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

a) Determine su dominio de definición, estudie su continuidad y halle las asíntotas.
b) Esboce una gráfica de la función.
c) Halle los puntos donde la recta tangente es paralela a la recta $x + 4y = 0$.

Jun 08 Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) Halle sus asíntotas, máximos y mínimos.
b) Represente gráficamente la función.

Sept 08 Se dispone de una chapa de acero que puede representarse por la región del plano determinada por la parábola $y = -x^2 + 4$ y la recta $y = 1$.

b) Determine las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede obtener a partir de dicha chapa con la condición de que uno de sus lados esté en la recta $y = 1$.

Sept 08 Se considera la función $f(x) = 2 - \dfrac{x}{x^2+1}$

a) Halle los máximos, mínimos y puntos de inflexión
b) Para $x \in [0, 5]$, esboce la gráfica de la función

Sept 08 Calcule los límites:

a) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^4}$ b) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

Jun 09 Se desea construir un prisma recto de base cuadrada cuya área total sea 96 m^2. Determine las dimensiones del lado de la base y de la altura para que el volumen sea máximo.

Jun 09 Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$

a) Determine el dominio de definición, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos, mínimos y puntos de inflexión.
b) Halle las asíntotas y represente aproximadamente la gráfica de la función.

Sept 09 Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 3ax - 6}{x-3}, & \text{si } x < 3, \\ x^2 - 1, & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$ Determine los valores de a para los que la función es continua.

Sept 09 Se considera la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$

a) Estudie el dominio de definición y calcule las asíntotas.
b) Estudie los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad.
c) Halle los máximos, mínimos y puntos de inflexión.
d) Esboce la gráfica de la función.

Jun 10E La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm. Halle las dimensiones de los catetos de forma que el área del triángulo sea máxima.

Jun 10E Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x \ln x & si \quad x > 0 \\ ax^2 + bx + c & si \quad x \leq 0 \end{cases}$

Determine los valores de a, b y c para que la función sea continua, tenga un máximo en $x = -1$ y la tangente en $x = -2$ sea paralela a la recta $y = 2x$

Nota: $\ln x$ denota el logaritmo neperiano de x.

Jun 10G

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax+b & si \quad x<0 \\ 5senx-2\cos x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) Determine el valor de b para que la función sea continua en el punto $x=0$

b) Calcule el valor de a y b para que la función sea derivable en el punto $x=0$

Jun 10G

Se considera la función $y=\dfrac{x^2}{1+x}$

a) Determine las asíntotas de la función anterior.

b) Halle, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

c) Dibuje aproximadamente su gráfica.

Sept 10E

Dada la función $y=5xe^{x-1}$

a) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Halle, si existen, los máximos mínimos y puntos de inflexión.

c) Dibuje aproximadamente su gráfica.

Sept 10E

Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^x$

Sept 10G

Sabiendo que f(x) $=\begin{cases} 4 & si \quad x\leq 0 \\ 4-x^2 & si \quad x>0 \end{cases}$

a) Estudie su continuidad en el punto $x = 0$. (1 punto)

b) Usando la definición de derivada calcule, si existe, la derivada de la función f en $x = 0$.

c) Dibuje la gráfica de la función.

Sept 10G

Calcule $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$

Jun 11E

Una ventana rectangular tiene un perímetro de 12 metros.
Calcule las medidas de los lados del rectángulo para que el área de la ventana sea máxima.

Jun 11E

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 7+ax & si \quad x<1 \\ a\sqrt{x}+\dfrac{b}{x} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

Determine los valores de a y b para que la función sea derivable en todo su dominio.

Jun 11G

Se desea diseñar un libro de forma que cada página tenga 600 cm^2 de área. Sabiendo que los márgenes superior e inferior son de 4cm cada uno y los laterales de 2cm, calcule las dimensiones de cada página para que el área impresa se máxima.

Jun 11G

Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{9x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\tan(x)}$ Nota: *tan* = tangente.

Jul 11E

Dada la curva $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+2x$

a) Obtenga sus máximos, mínimos y puntos de inflexión.

b) Encuentre sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Jul 11E

Calcule:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{(Ln\, x)^2}$ b) $\lim_{x\to 0}(x^4+e^x)^{\frac{1}{x}}$

Jul 11E

De todos los cilindros inscritos en una esfera de radio 1 metro, halle el volumen del que lo tenga máximo.

Jul 11G

Sabiendo que el $\lim_{x\to 0}\frac{3x - m\, senx}{x^2}$ es finito, calcule el valor de m y halle el límite.

Jul 11G

Sea f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=\begin{cases} x^3-x^2 & si\ x\le 1 \\ ax+b & si\ x>1 \end{cases}$

a) Calcule los valores de a y b para que la función sea derivable en todos los números reales.
b) Para esos valores de a y b halle los extremos de la función y dibuje su gráfica.

Jun 12E

Se considera la curva $y=\frac{1}{1+x^2}$

a) Halle el punto de la curva en el que la recta tangente a su gráfica tiene pendiente máxima.

b) Calcule el valor de esa pendiente. (1 punto)

Jun 12E

a) Calcule $\underset{x\to 1}{Lim}\, f(x)$ siendo $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x\ne 1 \\ 3 & \text{si } x=1 \end{cases}$

b) ¿Es la función f derivable en x=1? Justifique su respuesta.

Jun 12G

Halle el rectángulo de mayor área inscrito en una circunferencia de radio 3.

Jun 12G

Obtenga una función polinómica de tercer grado $y=ax^3+bx^2+cx+d$ tal que tenga un mínimo en el punto (1,1) y un punto de inflexión en el punto (0,3).

Jul 12E

El perímetro de una cara lateral de un prisma recto de base cuadrada es de 60 centímetros. Calcule sus dimensiones de forma que su volumen sea máximo.

Jul 12E

Calcule a para que las siguientes funciones tengan el mismo límite en el punto 0.

$f(x)=\frac{senax}{x}$ $g(x)=\frac{\cos^2 x-1}{x^2}$

Jul 12G

Calcule $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

Nota: $\ln x$ denota el logaritmo neperiano de x.

Jul 12G

Sea la función $f: R\to R$ definida por $f(x)=\begin{cases} 4 & si\quad x=0 \\ \frac{m(e^x-1)}{x} & si\quad x\ne 0 \end{cases}$

donde $m\in R$.
a) Calcule m para que la función sea continua en $x=0$.
b) Para el valor de m calculado estudie, usando la definición de derivada, si la función f es derivable en $x=0$.

Jun 13G

Considere la curva $y=\frac{1}{3}x^3-4x^2-\frac{2}{3}x-4$.

a) Halle los puntos de la curva en que la recta tangente es paralela a la recta $0=2x+3y-4$.
b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva en $x=1$. (0,5 puntos)

Jun 13G Calcule $\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{1-x}}$

Jun 13E Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$.

a) Halle las asíntotas de la función f.

b) Halle los máximos y mínimos de la función f.

c) Represente gráficamente la función f.

Jun 13E Calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{tag(3x)}$.

Jul 13G Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

b) $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cot g\ x$. Nota: $\cot g\ x =$ cotangente de x

Jul 13G El coste diario de una máquina que muele trigo para hacer harina depende de las toneladas molidas y viene dado por la función $f(x)=x^3+2x^2-15x+93$ donde x es el número de toneladas molidas.

a) Obtenga la producción diaria óptima para minimizar los costes.

b) ¿Cuál es el coste mínimo diario?

Jul 13E Se considera la función real $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, donde a, b y c son números reales. Encuentre los valores de a, b y c para los que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x=2$ y $x=4$ sean paralelas al eje OX, sabiendo además que el punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ está en el eje OX.

Jul 13E Calcule: a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-senx}$

b) $\lim_{x\to 0}(\dfrac{1}{x})sen(\dfrac{x}{2})$

Jul 13E **Considere la función real de variable real** $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$

a) Calcule la ecuación de sus asíntotas, si existen.

b) Estudie sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como las abscisas de sus extremos relativos, si los tiene, y clasifíquelos.

Jun 14G Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2e^{-x^2}$

a) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Halle, si existen, los máximos y mínimos de la función.

c) Dibuje aproximadamente su gráfica.

Jun 14G Un agricultor hace un estudio para plantar árboles en una finca. Sabe que si planta 24 árboles la producción media de cada uno de ellos será de 600 frutos. Estima que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos.

a) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima?

b) ¿Cuál es esa producción?

Jun 14E Encuentre el punto de la curva $y=\sqrt{x}$ más próximo al punto A(4,0).

Jun 14E Obtenga $\lim_{x\to 0}(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x})$.

Jul 14G

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & si\ x \neq 0 \\ k & si\ x = 0 \end{cases}$

a) Determine razonadamente el valor del parámetro k para que la función sea continua para todos los números reales.

b) Estudie si esta función es derivable cuando $x = 0$, y en caso afirmativo halle $f'(0)$.

Jul 14G

Considere la función $f(x) = ax + 3 + \dfrac{b}{x^2}$.

a) Determine el valor de los números reales a y b para que en el punto de abscisa $x = 1$ su gráfica admita como tangente la recta $y = 3x$.

b) Halle las asíntotas de la curva cuando $a = 1$ y $b = -1$.

Jul 14E

Considere la función $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

a) Determine la recta tangente en el punto en que la función alcanza su máximo relativo.

Jul 14E

Calcule $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

Jul 14E

Considere la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}$.

a) Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos relativos.
b) Determine sus asíntotas.
c) Dibuje la gráfica de $y = f(x)$.

Jun 15G

Obtenga $\lim_{x \to 0} (\cot agx - \dfrac{1}{x})$.

Jun 15G

El propietario de la empresa "Asturfabril" ha estimado que si compra "x" máquinas y contrata "y" empleados, el número de unidades de producto que podía fabricar vendría dado por la función $f(x, y) = 9x \cdot y^2$. Sabiendo que tiene un presupuesto de 22500 €, que cada máquina supone una inversión de 2500 € y cada contrato de un nuevo empleado 1500 €, determine el número de obreros que debe contratar y el número de máquinas que debe comprar para optimizar la producción.

Jun 15E

Calcule a y b, números reales, de forma que la curva $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ pase por el punto (-1,6) y su recta tangente en $x = 1$ forme ángulo 45° con el eje OX.

Jun 15E

Se desea construir un contenedor con forma de paralelepípedo rectangular de 100 m^3 de volumen de manera que el largo de su base sea 4/3 de la anchura x de su base. Se sabe que los precios de un metro cuadrado de suelo, de techo y de pared lateral son, respectivamente, 225 €/m^2, 300 €/m^2 y 256 €/m^2. Determine razonadamente:

a) El valor x de la anchura de la base que minimiza el coste.
b) Dicho coste mínimo.

Jun 15E

Calcule el número real m para que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + mx)}{sen(2x)} = 3$.

Jul 15E

Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \dfrac{x \cos x + b senx}{x^3}$ es un número finito, determine el valor del parámetro b, y calcule el límite.

Jul 15E

Un campo rectangular es cercado y dividido a la mitad mediante una valla que une los puntos medios de dos lados opuestos. Encuentre el área máxima de un campo cercado de la manera anteriormente descrita, si se dispone de 480 metros de valla.

Jul 15E Dada la función $f(x)=x+xe^{-x}$, calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ que sea paralela a la recta $x-y+3=0$.

Jul 15G De todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 cm, encuentre la longitud de los catetos del triángulo que tiene el perímetro máximo.

Jul 15G Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Ln(1+x)-sen\ x}{x.\ sen\ x}$.

Jun 16G a) Calcule los valores de a y b para que la función $f(x)=\dfrac{bx}{x-a}$ tenga como asíntota vertical la recta $x=2$, y como asíntota horizontal la recta $y=3$.

b) Dados a y b distintos de cero, razone si la función tiene algún extremo relativo.

Jun 16G En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que doblándolo convenientemente hagan con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcule razonadamente la cuantía del máximo premio que se puede obtener en este concurso.

Jun 16E Dada la curva $y=x-x\ln(x)$, calcule la recta tangente a dicha curva que es paralela a la recta $x+y+2=0$.

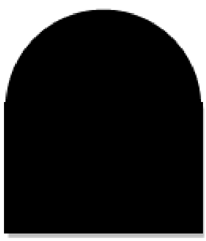
Jun 16E Obtenga el centro C(a,b) y el radio r de la circunferencia $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ para que dicha circunferencia pase por los puntos (1,0) y (0,1) siendo su radio mínimo.

Jul 16G Sabiendo que el $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{m}{2x})$ es finito, calcule el valor del número real m y halle el valor del límite.

Jul 16G Partiendo en dos trozos un alambre recto de 340 centímetros de longitud, se construyen un cuadrado y un rectángulo. Sabiendo que la base del rectángulo mide el doble que su altura, calcule las longitudes de cada uno de los trozos de alambre para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

Jul 16E Encuentre $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec(x)-\cos(x)}{3x^2}$.

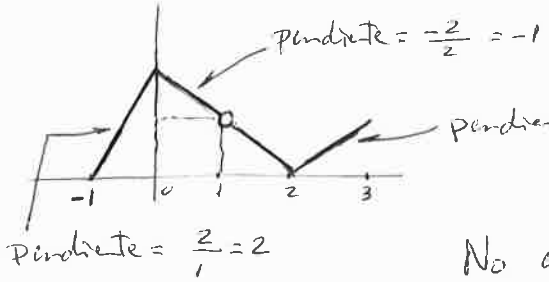
Jul 16E La sección de un túnel tiene la forma de un rectángulo sobre el que se apoya un semicírculo (ver dibujo). Si el perímetro de dicha sección es de 18 metros, ¿cuál es el radio del semicírculo para que el área de la sección sea máxima?



Sección del túnel

Modelo 17 (Es el de Jul 12E) El perímetro de una cara lateral de un prisma recto de base cuadrada es de 60 cm. Calcula sus dimensiones de forma que su volumen sea máximo.

JUN'94 Derivada = Pendiente de la recta Tangente.



$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -1<x<0 \\ -1 & \text{si } 0<x<1 \\ -1 & \text{si } 1<x<2 \\ 1 & \text{si } 2<x<3 \end{cases}$$

No está definida la derivada en los puntos siguientes:

En $x=0$ y en $x=2$ por ser puntos angulosos.

En $x=1$ por no ser continua la función

En $x=-1$ y en $x=3$ por estar definida la función solo por una parte (dcha e izq respect.)

SEPT 94

$$f(x) = \frac{ax^2+b}{x^3+2ax^2+bx+3}$$

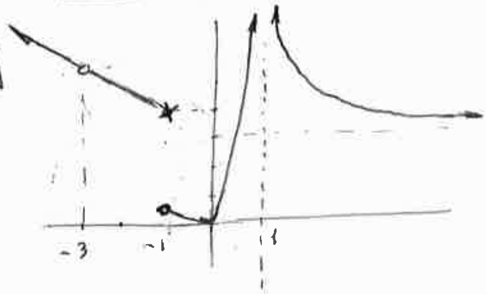
Disunt Evitable en $x=1$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} a\cdot 1^2+b=0 \\ 1^3+2a\cdot1^2+b\cdot1+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ 2a+b=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a=-4 \\ b=4 \end{array}}$

$$f(x) = \frac{4-4x^2}{x^3-3x^2+4x+3} = \frac{4(1+x)(1-x)}{(x-1)(x^2-7x-3)} = \frac{-4(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2-7x-3)}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -8 & 4 & 3 \\ 1 & & 1 & -7 & -3 \\ \hline & 1 & -7 & -3 & 0 \end{array}$$

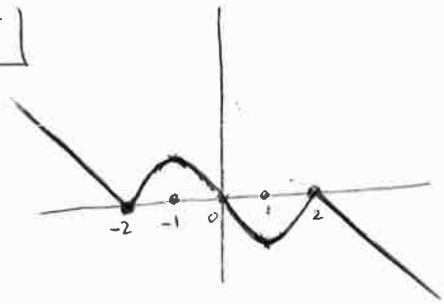
$$\boxed{g(x) = \frac{-4(x+1)}{x^2-7x-3}}$$

JUN 95



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{9-x^2}{x+3} & \text{si } x \leq -1 \\[2ex] \dfrac{3x^2}{(x-1)^2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

SEPT 95



$\left.\begin{array}{l} f'(-1)=0 \\ f'(-1^-)>0 \\ f'(-1^+)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Máximo Relativo en $x=-1$

$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)<0 \\ f'(1^+)>0 \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Mínimo Relativo en $x=1$

$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-)=-1 \\ f'(-2^+)>0 \end{array}\right| \Rightarrow$ f <u>no</u> es derivable en $x=-2$

$\left.\begin{array}{l} f'(2^+)=-1 \\ f'(2^-)>0 \end{array}\right| \Rightarrow$ f no es derivable en $x=2$

Al estar definida f' en $(-\infty,+\infty)$ salvo en $x=\pm 2$ (donde f sí está definida), la función debe ser continua en $(-\infty,+\infty)$, luego no tiene asíntotas verticales.

Las rectas $\begin{matrix} y = 2-x \\ y=-2-x \end{matrix}$ serán asíntotas oblicuas en $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$ respectivamente.

JUN 96 $\quad f(x)=\ln x$

Dominio $=(0,+\infty)$ $\quad\boxed{\text{No corta al eje Y}}$

$y=0 \Rightarrow \ln x = 0 \quad \boxed{x=1} \quad \boxed{(1,0) \text{ Punto corte eje X}}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln 0^+ = -\infty \Rightarrow \boxed{\text{Asíntota vertical } x=0}$

$f'(x)=\frac{1}{x}$

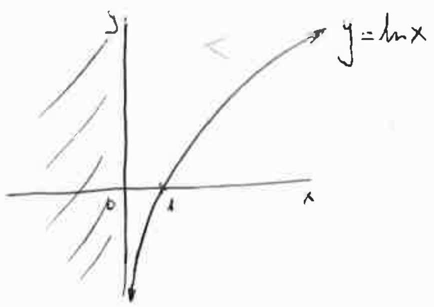
$f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(0,+\infty) \Rightarrow \boxed{\text{No tiene puntos estacionarios}}$

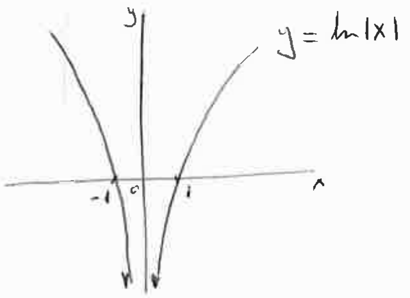
$f'(x)>0 \quad \forall x\in(0,+\infty) \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ es monótona creciente en } (0,+\infty)}$

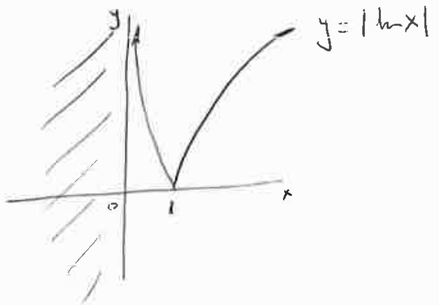
$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$

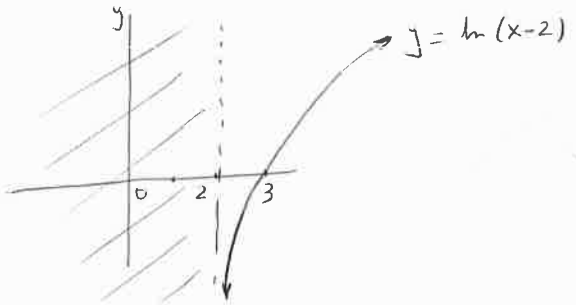
$f''(x)\neq 0 \quad \forall x\in(0,+\infty) \Rightarrow \boxed{\text{No tiene puntos de inflexión}}$

$f''(x)<0 \quad \forall x\in(0,+\infty) \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ es cóncava en } (0,+\infty)}$









SEPT 94 $\quad y=ax^3+bx^2+cx+d \;;\; y'=3ax^2+2bx+c \;;\; y''=6ax+2b$

$P(2,1) \Rightarrow 1=8a+4b+2c+d$

Tangente paralela eje X en $P(2,1) \Rightarrow 0=12a+6b+c$

Inflexión en $P(2,1) \Rightarrow 0=12a+2b$

Origen $\Rightarrow \boxed{0=d}$

$$\left.\begin{matrix} 8a+4b+2c=1 \\ 12a+6b+c=0 \\ 12a+2b=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a=1/32 \\ b=-3/16 \\ c=3/4 \end{matrix}} \Downarrow \boxed{y=\frac{1}{32}(x^3-6x^2+12x)}$$

SEPT 96

$$f(x) = \frac{|x^2-1|}{|x|+1}$$

$|x|+1=0 \Rightarrow |x|=-1$ ✗ $\boxed{\text{Dominio} = (-\infty, +\infty)}$

$\oplus \quad -1 \quad \ominus \quad 1 \quad \oplus$ Signo x^2-1 $\qquad \ominus \quad 0 \quad \oplus$ Signo x

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{-x+1} & \text{Si } x<-1 \\ 0 & \text{Si } x=-1 \\ \dfrac{1-x^2}{-x+1} & \text{Si } -1<x<0 \\ 1 & \text{Si } x=0 \\ \dfrac{1-x^2}{x+1} & \text{Si } 0<x<1 \\ 0 & \text{Si } x=1 \\ \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{Si } x>1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Simplificando}} f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{Si } x<-1 \\ 0 & \text{Si } x=-1 \\ 1+x & \text{Si } -1<x<0 \\ 1 & \text{Si } x=0 \\ 1-x & \text{Si } 0<x<1 \\ 0 & \text{Si } x=1 \\ x-1 & \text{Si } x>1 \end{cases}$$

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{Si } x<-1 \\ 1 & \text{Si } -1<x<0 \\ -1 & \text{Si } 0<x<1 \\ 1 & \text{Si } x>1 \end{cases}}$$

No existe la derivada en $x=-1$, $x=0$, $x=1$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-(-1+h)-1-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}(-1) = \boxed{-1} \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1+(-1+h)-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} 1 = \boxed{1} \end{cases}$$

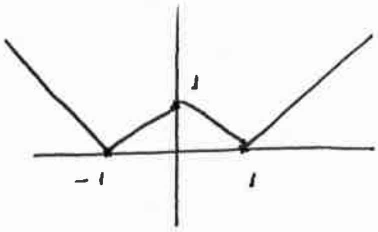
Luego $\nexists f'(-1)$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{1+h-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} 1 = \boxed{1} \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1-h-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{-h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}(-1) = \boxed{-1} \end{cases}$$

Luego $\nexists f'(0)$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{1-(1+h)-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}(-1) = \boxed{-1} \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1+h-1-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} 1 = \boxed{1} \end{cases}$$

Luego $\nexists f'(1)$



JUN 97

Precio Alquiler	Nº Apartamentos Alquilados	Ganancia
50.000	40	50.000 × 40 = 2.000.000
52.500	39	52.500 × 39 = 2.047.500
55.000	38	⋮
57.500	37	
⋮	⋮	

$$\text{Ganancia} = (50.000 + x \cdot 2500) \cdot (40 - x)$$

(x es el nº de apartamentos que quedan sin alquilar)

$(x = 0, 1, 2, 3, \dots 40)$

$$G' = 2500(40 - x) + (50000 + 2500x)\cdot(-1) = 100.000 - 2500x - 50000 - 2500x =$$

$$= 50000 - 5000x$$

$$G' = 0 \Rightarrow x = \frac{50000}{5000} = 10$$

$0 \quad (+) \quad 10 \quad (-) \quad 40$

Signo G'

Máxima ganancia para $x = 10$

Alquilará 30 apartamentos a 75.000 ptas $\Rightarrow$ Ganancia Máxima $= \boxed{2.250.000 \text{ ptas}}$

SEPT 97

$f(x)$ tiene un mínimo <u>absoluto</u> en $x_0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in \text{Dominio}$

$f(x)$ tiene un mínimo <u>relativo</u> en $x_0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in$ Un entorno de x_0

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ Puntos Estacionarios.

$(+) \quad -1 \quad (-) \quad 0 \quad (-) \quad 1 \quad (+)$

Signo $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

Máximo relativo en $x = -1$

Mínimo relativo en $x = 1$

Para los valores de x positivos: $0 \quad (-) \quad 1 \quad (+)$ Signo $f'(x)$ El mínimo relativo de $x = 1$ será absoluto, por lo que:

$$f(x) \geq f(1) \quad \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 1 + \frac{1}{1} = 2 \Rightarrow \boxed{x + \frac{1}{x} \geq 2} \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

JUN 98

$f(x) = (x-\alpha)^2 + \cos x$

$f'(x) = 2(x-\alpha) - \operatorname{sen} x$

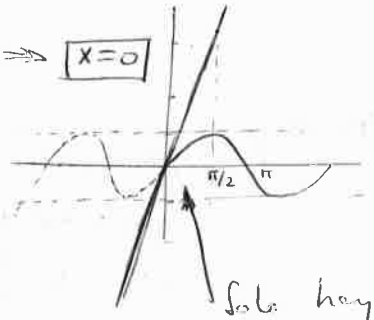
$f(x)$ tiene un extremo en $x=0 \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow -2\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

$f(x) = x^2 + \cos x$

$f'(x) = 2x - \operatorname{sen} x$ $\qquad f'(x)=0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 2x \Rightarrow \boxed{x=0}$

$\ominus \quad 0 \quad \oplus$

Signo $f'(x)$



Solo hay un punto de corte porque en $x=0$ la pendiente de sen x es 1 y la de 2x es 2

Mínimo relativo en $x=0$

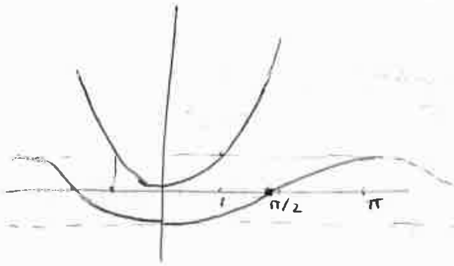
$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ decreciente en } (-\infty, 0) \\ f(x) \text{ creciente en } (0, +\infty) \end{array}}$$

$x=0 \Rightarrow y=1$ $\qquad \boxed{(0,1) \text{ Punto corte con eje } Y}$

$y=0 \Rightarrow x^2 = -\cos x$

No tiene solución

$\boxed{\text{No corta al eje } X}$



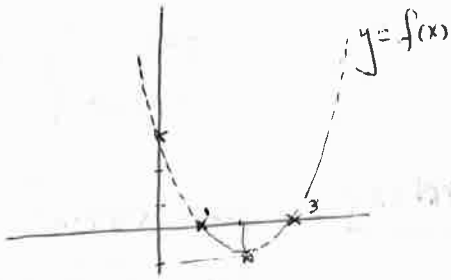
SEPT 98

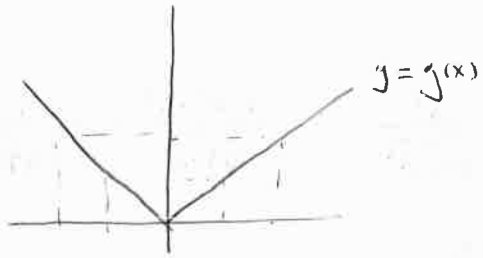
$f(x) = x^2 - 4x + 3$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x-4=0$ $\quad (x=2)$ Punto Estacionario. $\qquad$ Mínimo $(2,-1)$

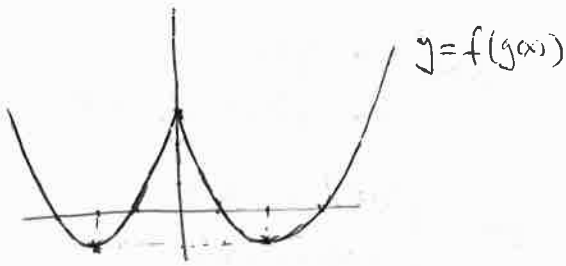
$f(x)=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \qquad x = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{array}{c}(1,0)\\(3,0)\end{array}}$

$x=0 \Rightarrow f(0)=3 \quad \boxed{(0,3)}$

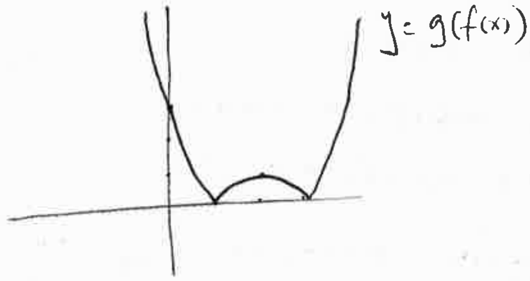




$f(g(x)) = f(|x|) = |x|^2 - 4|x| + 3$



$g(f(x)) = g(x^2-4x+3) = |x^2-4x+3|$



JUN 99

$$y = x^2 + \alpha \qquad y' = 2x$$

$$x = \pm 1 \begin{cases} y = 1+\alpha \\ y' = \pm 2 \end{cases} \qquad \boxed{y = \pm 2(x \mp 1) + 1 + \alpha}$$

Origen Coordenadas: $\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad 0 = \pm 2\cdot(\mp 1) + 1 + \alpha$

$$0 = -2 + 1 + \alpha$$

$$\boxed{\alpha = 1}$$

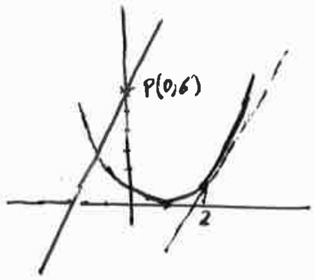
SEPT 00

$$f(x) = (x-1)^2$$

$$f'(x) = 2(x-1)$$

$$x = 2 \Rightarrow f'(2) = 2\cdot(2-1) = 2 \qquad m = 2$$

$$\left.\begin{matrix} P(0,6) \\ m=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y - 6 = 2(x-0) \;;\; \boxed{y = 2x+6}$$



SEPT 04

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \qquad x > 2$$

a) $f'(x) = \dfrac{2(x-2) - (2x+1)}{(x-2)^2} = \dfrac{-5}{(x-2)^2}$

$$x = 3 \begin{cases} f(3) = 7 \\ f'(3) = -5 \end{cases}$$

Recta Tangente: $y - 7 = -5(x-3)$

$$\boxed{y = 22 - 5x}$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{1} = 2 \rightarrow$ A. Horizontal $y = 2$

$$\left.\begin{matrix} y=2 \\ y = 22-5x \end{matrix}\right\} \quad 2 = 22 - 5x \;;\; 5x = 20 \;;\; x = 4 \rightarrow y = \frac{9}{2} \qquad \boxed{P(4, 9/2)}$$

JUN 05

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$x = 0 \begin{cases} y = 0 \\ f'(0) = \dfrac{4}{\sqrt{4}} = 2 \end{cases} \qquad \boxed{y = 2x}$$

SEPT 05

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 - 4 & x < 0 \\ -a(x-2)^2 + 4a & x \geq 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2(x+2) & x < 0 \\ ¿? & x = 0 \\ -2a(x-2) & x > 0 \end{cases}$$

a) $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = (0+2)^2 - 4 = 0 \\ f(0) = -a(0-2)^2 + 4a = -4a + 4a = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -a(0-2)^2 + 4a = -4a + 4a = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ f(x) es continua en $x=0$ $\forall a \in \mathbb{R}$

b) $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 2(0+2) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -2a(0-2) = 4a \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

- Si $a = 1$, f(x) es derivable en $x=0$, $f'(0) = 4$
- Si $a \neq 1$, f(x) no es derivable en $x=0$. La función tiene un punto anguloso en $x=0$.

JUN99

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Dominio = $\mathbb{R}$

$x=0 \Rightarrow y=1$ $(0,1)$ Punto corte eje Y

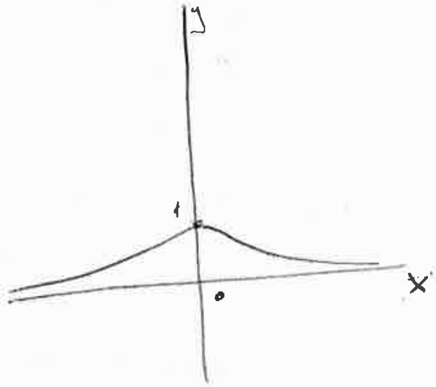
$y=0 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}=0 \Rightarrow 1=0$ No corta al eje X

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$ Punto Estacionario.

$\nearrow \oplus \quad 0 \quad \ominus \searrow$

signo $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$



f(x) es creciente en $(-\infty, 0)$

f(x) es decreciente en $(0, +\infty)$

f(x) tiene un máximo relativo en $x=0$: $(0,1)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ Asíntota Horizontal $y=0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

SEPT99

Area=1	a
b	

$a \cdot b = 1 \longrightarrow b = 1/a$

$S = 2a+b$ mínimo

$S = 2a + \frac{1}{a}$ Dominio = $\cancel{(-\infty, 0)} \cup (0, +\infty)$

$S' = 2 - \frac{1}{a^2}$

$S'=0 \Rightarrow 2 = \frac{1}{a^2} \Rightarrow a = \sqrt{1/2}, \ \cancel{-\sqrt{1/2}}$

$0 \quad \nearrow \oplus \quad \sqrt{1/2} \quad \ominus \searrow$

signo

Suma Máxima para $\boxed{a=\sqrt{\tfrac{1}{2}}} \Rightarrow \boxed{b=\sqrt{2}}$ $\boxed{\text{Rectángulo } \sqrt{\tfrac{1}{2}} \times \sqrt{2}}$

$$S_{MAX} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \sqrt{2}+\sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

JUN 00

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

i)

$g(x) = f(e^x)$

$g'(x) = f'(e^x) \cdot e^x$

$\left.\begin{array}{l} f' > 0 \\ e^x > 0 \end{array}\right| \Rightarrow g'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g(x) \text{ es creciente } \forall x \in \mathbb{R}}$

ii)

$h(x) = e^{-f(x)}$

$h'(x) = -e^{-f(x)} \cdot f'(x)$

$h'(x) = 0 \Rightarrow -e^{-f(x)} \cdot f'(x) = 0$ ⟶ $e^{-f(x)} = 0$ Sin solución
⟶ $f'(x) = 0$ Sin solución

Luego $h(x)$ no tiene extremos relativos

SEPT 00

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Dominio $= [-1, 1]$

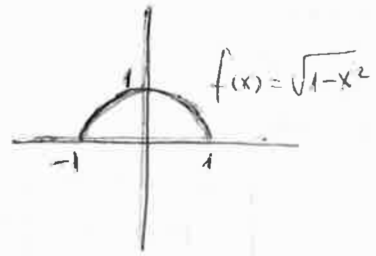
$f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

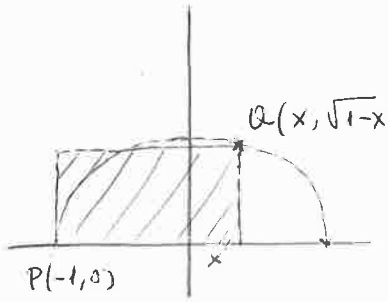
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$-1 \quad \oplus \quad 0 \quad \ominus \quad 1$

Signo $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow$





Area $= (x+1)\sqrt{1-x^2}$ Dominio $= [-1, 1]$

$A' = \sqrt{1-x^2} + (x+1)\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - \dfrac{x^2+x}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= \dfrac{1-x^2-x^2-x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-x-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$A' = 0 \Rightarrow 1 - x - x^2 = 0 \qquad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{-2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{-2}$ ⟶ $\cancel{-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \notin [-1, 1]$
⟶ $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$-1 \quad \oplus \quad \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \ominus \quad 1$

Signo $A' = \dfrac{1-x-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$\boxed{\text{Area máxima para } x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$

$x + 1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$1 - x^2 = 1 - \dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} = 1 - \dfrac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4} = \dfrac{2\sqrt{5}-2}{4} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\text{Area}_{MAX} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} = \boxed{\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}}$

JUN 01

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\geq 3 \\ 2x+a & x<3 \end{cases}$$

a) f continua $\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \Rightarrow 6+a = 9-6 \Rightarrow \boxed{a=-3}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\geq 3 \\ 2x-3 & x<3 \end{cases}$$

b) $$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(3+h)^2-2(3+h)-3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{9}+6h+h^2-\cancel{6}-2h-\cancel{3}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2+4h}{h} = \lim_{h\to 0^+} (h+4) = \boxed{4}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2(3+h)-3-3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{6}+2h-\cancel{3}-\cancel{3}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2 = \boxed{2}$$

Luego f(x) no es derivable en $x=3$

SEPT 01

$f(x) = 1-\sqrt[3]{x^2}$ Dominio $= \mathbb{R}$

$$f'(x) = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2)^2}} = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = -\frac{2x}{3x\sqrt[3]{x}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Luego: $\nexists\, f'(0)$

(Aplicando la definición sería:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{h^2}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} -\sqrt[3]{\frac{h^2}{h^3}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \infty \Rightarrow \nexists\, f'(0)$$)

$f(x) = 1-\sqrt[3]{x^2}$

$x=0 \Rightarrow f(0)=1$ $(0,1)$ Punto corte con eje Y

$y=0 \Rightarrow 0 = 1-\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$ $(1,0)$, $(-1,0)$ Puntos corte con eje X

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}=0 \Rightarrow -2=0$ $\boxed{\text{No hay extremos relativos}}$

+	0	−

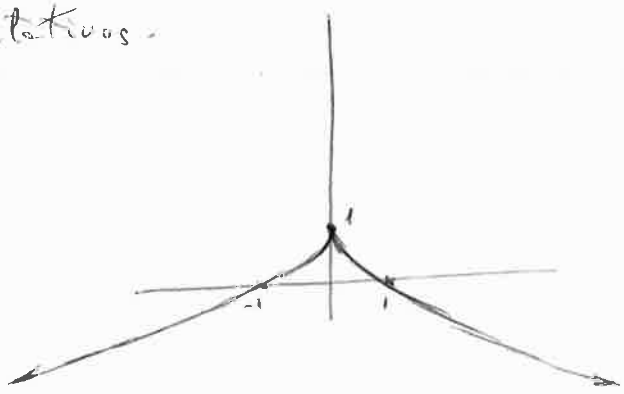
Signo $f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$

f(x) creciente en $(-\infty,0)$
f(x) decreciente en $(0,+\infty)$

En $x=0$ tendremos un máximo absoluto, pero al tratarse de un punto anguloso (no derivable), no apareció entre los extremos relativos.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$



JUN 02

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+3x+5 & x \geq 1 \\ 5x+b & x < 1 \end{cases}$$

Dom $= \mathbb{R} = (-\infty, 1] \cup (1, +\infty)$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ por tratarse de expresiones polinómicas. En $x=1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 5+b$$

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = a+3+5 = a+8$$

Si $5+b = a+8$ $f(x)$ sería continua en $x=1$

Si $5+b \neq a+8$ $f(x)$ no sería continua (ni derivable) en $x=1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax+3 & x > 1 \\ 5 & x < 1 \end{cases}$$

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$ por tratarse de expresiones polinómicas. En $x=1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 5$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = 2a+3$$

Si $5 \neq 2a+3$ $f(x)$ no sería derivable.

$2a+3 \neq 5 \Rightarrow \boxed{a \neq 1}$

$\left.\begin{matrix} a=1 \\ 5+b=a+8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{b=4}$

Si $\left.\begin{matrix} a=1 \\ b=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $f(x)$ continua y derivable en $x=1$

Si $\left.\begin{matrix} a \neq 1 \\ b=a+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $f(x)$ continua pero no derivable en $x=1$

Si $b \neq a+3 \Rightarrow f(x)$ no continua (por lo tanto no derivable) en $x=1$

SEPT 02

$$f(x) = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}$$

Dominio $= \mathbb{R} - \{\pm 3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-3)^2} + \frac{24x}{(x^2-9)^2} = \frac{-2}{(x-3)^2} + \frac{24x}{(x+3)^2(x-3)^2} =$$

$$= \frac{24x - 2(x+3)^2}{(x+3)^2(x-3)^2} = \frac{24x - 2x^2 - 12x - 18}{(x+3)^2(x-3)^2} = \frac{-2x^2+12x-18}{(x+3)^2(x-3)^2} =$$

$$= \frac{-2(x^2-6x+9)}{(x+3)^2(x-3)^2} = \frac{-2(x-3)^2}{(x+3)^2(x-3)^2} = \frac{-2}{(x+3)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2}{(x+3)^2} = 0 \Rightarrow -2 = 0$ $\boxed{\text{No tiene extremos relativos}}$

$\ominus$ -3 $\ominus$ 3 $\ominus$

Signo $f'(x) = \frac{-2}{(x+3)^2}$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} \right) = \left(\frac{2}{0^-} - \frac{12}{0^-} = -\infty + \infty \right) = \lim_{x \to 3^-} \frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{0}{0} =$$

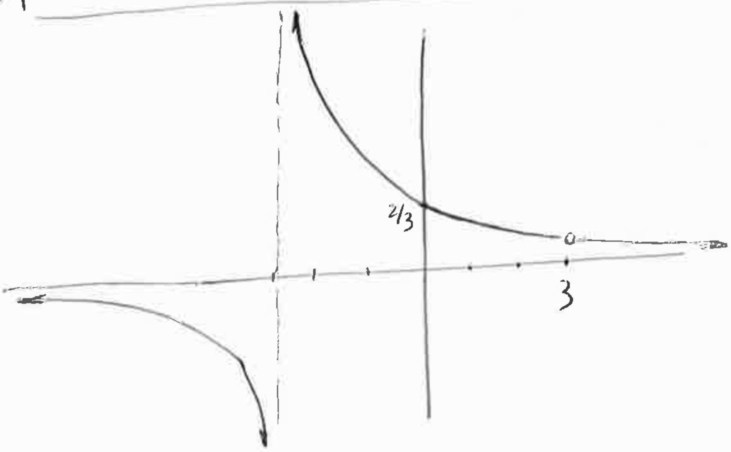
$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{2(x+3) - 12}{x^2-9} =$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{2\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \to 3^-} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \left(\frac{2}{0^+} - \frac{12}{0^+} = +\infty - \infty \right) = \dots = \lim_{x \to 3^+} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$\nexists f(3)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Discontinuidad Evitable en } x=3}$



$x=0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$ $(0, \frac{2}{3})$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x+3} = 0^+$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x+3} = 0^-$$

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{2}{x+3} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} \frac{2}{x+3} = +\infty$$

JUN 03 $\quad y = 2\sqrt{\frac{2}{x}-1}$

$$\frac{2}{x}-1=0 \Rightarrow \frac{2}{x}=1 \Rightarrow x=2$$

$\ominus \quad 0 \quad \oplus \quad 2 \quad \ominus$

signo $\frac{2}{x}-1$

Dominio $= (0,2]$

$$y' = \cancel{2}\,\frac{-\frac{2}{x^2}}{\cancel{2}\sqrt{\frac{2}{x}-1}} = \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}}$$

$y'=0 \Rightarrow -2=0$ $\quad \boxed{\text{No tiene extremos relativos}}$

$0 \quad \xrightarrow{\ \ominus\ } \quad 2$

signo $y' = \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}}$ $\quad \boxed{f(x) \text{ decreciente en } (0,2]}$

$$y' = \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}}$$

$$y'' = -2\,\frac{-\left[2x\sqrt{\frac{2}{x}-1} + x^2\,\frac{-\frac{\cancel{2}}{x^2}}{\cancel{2}\sqrt{\frac{2}{x}-1}}\right]}{x^4\left(\frac{2}{x}-1\right)} = -2\,\frac{-2x\sqrt{\frac{2}{x}-1}+\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{x}-1}}}{2x^3-x^4} =$$

$$= -2\,\frac{-2x\left(\frac{2}{x}-1\right)+1}{(2x^3-x^4)\sqrt{\frac{2}{x}-1}} = -2\,\frac{-4+2x+1}{(2x^3-x^4)\sqrt{\frac{2}{x}-1}} =$$

$$= \frac{-2(2x-3)}{x^3(2-x)\sqrt{\frac{2}{x}-1}}$$

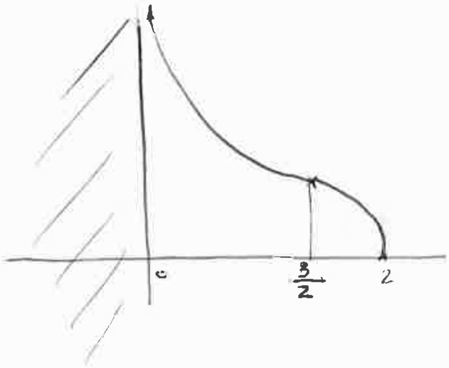
$y''=0 \Rightarrow -2(2x-3)=0 \Rightarrow x=3/2$

$0 \quad$ convexo $\oplus \quad 3/2 \quad$ cóncavo $\ominus \quad 2$

signo $y'' = \frac{-2(2x-3)}{x^3(2-x)\sqrt{\frac{2}{x}-1}}$

$f(x)$ tiene un $\boxed{\text{punto de inflexión en } x=\frac{3}{2}}$ $\quad \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

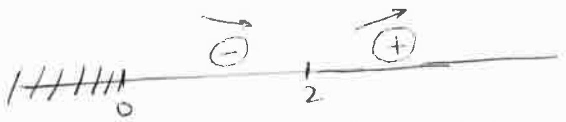
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{\frac{2}{x}-1} = 2\sqrt{+\infty-1} = +\infty$$



SEPT 03 $\quad y^2=4x \longrightarrow P(x,\pm\sqrt{4x})$, $Q(4,0)$ $\left\{ \vec{PQ} = (4-x, \mp\sqrt{4x}) \right.$ $\quad (x\in[0,+\infty))$

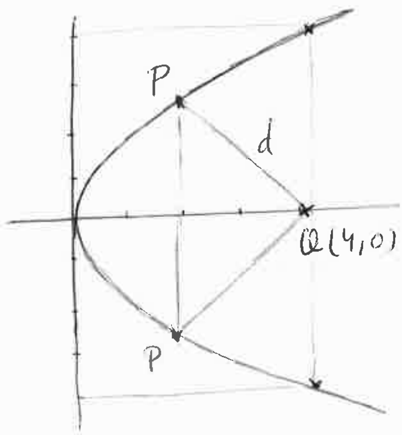
$$d = |\vec{PQ}| = \sqrt{(4-x)^2+(\mp\sqrt{4x})^2} = \sqrt{16-8x+x^2+4x} = \sqrt{16+x^2-4x} =$$
$$= \sqrt{x^2-4x+16}$$

$$d' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+16}} \qquad d'=0 \Longrightarrow x=2$$

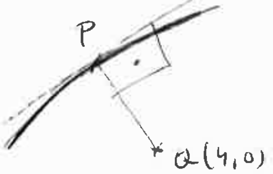


signo $d' = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+16}}$

Mínima distancia para $x=2 \Longrightarrow P=(2,\pm\sqrt{8})$



otra forma: $\quad y^2=4x \to 2yy'=4 \to y'=\frac{2}{y}$



$P(x,\sqrt{4x})$

Pendiente Tangente $= \dfrac{2}{\sqrt{4x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Longrightarrow$ Pendiente Normal $= -\sqrt{x}$ $\Longrightarrow$

$\vec{PQ} = (4-x, -\sqrt{4x}) \Longrightarrow$ pendiente $= \dfrac{-\sqrt{4x}}{4-x}$

$$\Longrightarrow -\sqrt{x} = \frac{-\sqrt{4x}}{4-x} \Longrightarrow \cancel{-\sqrt{x}} = \frac{-2\cancel{\sqrt{x}}}{4-x} \Longrightarrow 4-x=2 \Longrightarrow \boxed{x=2}$$

JUN 04

a) $\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^2-1}{\sin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{2(x+1)}{\cos x} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^2-1}{(x-1)^2-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{2(x+1)}{2(x-1)} = \frac{1}{-1} = \boxed{-1}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^2+(x-1)^2-2}{\sin^2 x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{2(x+1)+2(x-1)}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x \cos x} = \frac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2}{1-0} = \boxed{2}$

JUN 04

$f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$

Dominio $= \mathbb{R} - \{-1\}$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1 - \frac{1}{-0} = +\infty$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1 - \frac{1}{+0} = -\infty$

Discontinuidad salto infinito en $x=-1$
Asíntota vertical $x=-1$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1+0 = 1$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1-0 = 1$

Asíntota Horizontal $y=1$

$x=0 \Rightarrow y = 1-1 = 0 \quad (0,0)$

$y=0 \Rightarrow 0 = 1 - \frac{1}{x+1} ; \quad \frac{1}{x+1} = 1 , \quad 1 = x+1 , \quad x=0 \quad (0,0)$

$f'(x) = -\frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} = 0 , \quad 1 = 0$ No hay máximo / mínimo relativos.

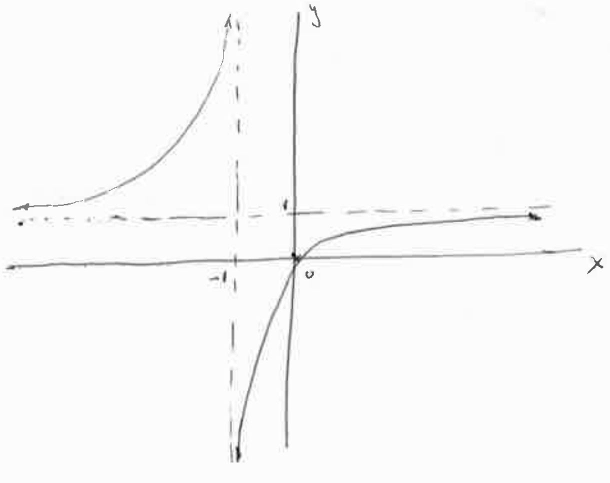
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗		↗
$f'(x)$	+		+

$f(x)$ creciente en $(-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$

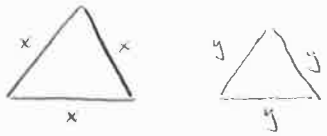
$f''(x) = \frac{-2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3}$

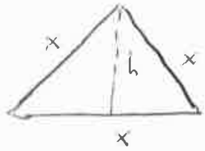
$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2}{(x+1)^3} = 0 , \quad -2 = 0$ No hay punto de inflexión

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	Cóncava		Convexa
$f''(x)$	$-$		$+$



SEPT 04





$$h=\sqrt{x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{x^2-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{\frac{3x^2}{4}}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$3x+3y=60 \longrightarrow y=20-x$$

$$\text{Suma Areas}=\frac{x\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2}}{2}+\frac{y\cdot\frac{y\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2+y^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2+(20-x)^2\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x^2+400-40x+x^2\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2x^2-40x+400\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x^2-20x+200\right)$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(x^2-20x+200)$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-20)$$

$$f'(x)=0 \longrightarrow x=10$$

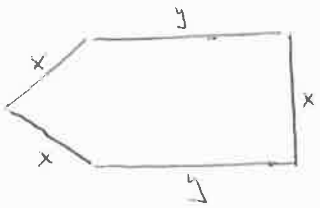
x	0	10	$+\infty$
$f(x)$	↘		↗
$f'(x)$	$-$	0	$+$

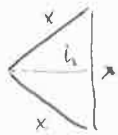
Mínimo para $x=10$

La suma de áreas será mínima para $\boxed{x=10\text{ m}}$, $\boxed{y=10\text{ m}}$

El valor mínimo de la suma de áreas es: $\frac{\sqrt{3}}{2}(100-200+200)=\boxed{50\sqrt{3}\text{ m}^2}$

SEPT 05





$$h=\sqrt{x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$3x+2y=60 \longrightarrow y=\frac{60-3x}{2}$$

$$\text{Area}=\frac{x\cdot x\sqrt{3}/2}{2}+xy=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+xy=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\frac{x(60-3x)}{2}=\frac{x^2\sqrt{3}+120x-6x^2}{4}=\frac{(\sqrt{3}-6)x^2+120x}{4}$$

$$f(x)=\frac{(\sqrt{3}-6)x^2+120x}{4}$$

$$f'(x)=\frac{(\sqrt{3}-6)\cdot 2x+120}{4}$$

$$f'(x)=0 \longrightarrow 2(\sqrt{3}-6)x+120=0, \quad x=\frac{-120}{2(\sqrt{3}-6)}=\frac{60}{6-\sqrt{3}} \longrightarrow y=\frac{60-3\cdot\frac{60}{6-\sqrt{3}}}{2}=$$

$$=\frac{360-60\sqrt{3}-180}{2(6-\sqrt{3})}=\frac{180-60\sqrt{3}}{2(6-\sqrt{3})}=\frac{90-30\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}$$

x	0	$\frac{60}{6-\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f(x)$	↗		↘
$f'(x)$	$+$	0	$-$

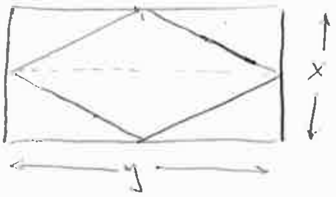
Area Máxima para $\boxed{x=\frac{60}{6-\sqrt{3}}\text{ m}}$ $\boxed{y=\frac{90-30\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}\text{ m}}$

El valor máximo del área es:

$$\frac{(\sqrt{3}-6)\cdot\frac{60^2}{(6-\sqrt{3})^2}+120\cdot\frac{60}{6-\sqrt{3}}}{4}=\frac{-\frac{3600}{6-\sqrt{3}}+\frac{7200}{6-\sqrt{3}}}{4}=$$

$$=\frac{3600}{4(6-\sqrt{3})}=\boxed{\frac{900}{6-\sqrt{3}}\text{ m}^2}$$

JUN 05



$2x + 2y = 100 \longrightarrow y = 50 - x$

$\text{Área} = 2 \cdot \dfrac{y \cdot x/2}{2} = \dfrac{xy}{2} = \dfrac{x(50-x)}{2} = \dfrac{50x - x^2}{2}$

$f(x) = \dfrac{50x - x^2}{2}$

$f'(x) = \dfrac{50 - 2x}{2}$

$f'(x) = 0 \longrightarrow x = 25$

x	0		25		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Área máxima para $\boxed{x = 25\,m} \longrightarrow \boxed{y = 25\,m}$

El valor máximo del área es: $\dfrac{50 \cdot 25 - 25^2}{2} = \dfrac{1250 - 625}{2} = \boxed{\dfrac{625}{2}\,m^2}$

JUN 05 $\quad f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

Dominio $= \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \dfrac{-2}{+0} = -\infty$ | Discontinuidad asintótica en $x = -2$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \dfrac{-2}{-0} = +\infty$ | Asíntota vertical $x = -2$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \dfrac{2}{-0} = -\infty$ | Discontinuidad asintótica en $x = 2$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{2}{+0} = +\infty$ | Asíntota vertical $x = 2$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ | Asíntota Horizontal $y = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$x = 0 \longrightarrow y = 0 \quad (0,0)$

$y = 0 \longrightarrow 0 = \dfrac{x}{x^2-4}, \; 0 = x. \quad (0,0)$

$f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{-x}{x^2-4} = -f(x) \Longrightarrow$ Función simétrica respecto del origen (Impar)

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 4 - x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-x^2 - 4}{(x^2-4)^2}$

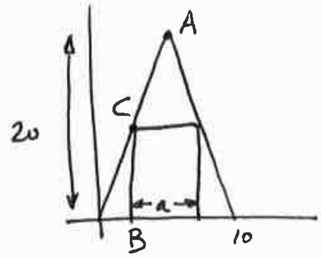
$f'(x) = 0 \longrightarrow \dfrac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = 0, \quad -x^2 - 4 = 0, \quad x^2 = -4$ No tiene máximos/mínimos relativos.

JUN 06

a) $\left.\begin{matrix} A(5,20) \\ O(0,0) \end{matrix}\right| \ \vec{OA} = (5,20) \rightarrow m = 4$

$y - 0 = 4(x-0)$

$\boxed{y = 4x}$



b)

$\boxed{B\left(\frac{10-a}{2}, 0\right)}$

$x = \frac{10-a}{2} \rightarrow y = 4\ \frac{10-a}{2} = 20 - 2a$ $\qquad \boxed{C\left(\frac{10-a}{2}, 20-2a\right)}$

c) Area Rectangulo $= a \cdot (20-2a) = 20a - 2a^2$ $\qquad a \in [0,10]$

$A' = 20 - 4a$

$A' = 0 \rightarrow a = 5$ cm

		5	
A	↗		↘
A'	+		−

$\boxed{\text{Area Maxima para } a = 5 \text{ cm}}$

JUN 06

$$f(x) = \begin{cases} x^2+6x+8 & x \leq -2 \\ 2x+4 & -2 < x \leq 0 \\ a\cos x & x > 0 \end{cases} \qquad D = \mathbb{R}$$

a) x^2+6x-8 es cont. y derivable en $(-\infty, -2)$

$2x+4$ " " " " " $(-2, 0)$

$a\cos x$ " " " " " $(0, +\infty)$

• En $x = -2$:

$$\left.\begin{matrix} \lim_{x \to -2^-} f(x) = 4 - 12 + 8 = 0 \\ f(-2) = 4 - 12 + 8 = 0 \\ \lim_{x \to -2^+} f(x) = -4 + 4 = 0 \end{matrix}\right| \rightarrow f(x) \text{ continua en } x = -2$$

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{matrix} \lim_{x \to 0^-} f(x) = 4 \\ f(0) = 4 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = a \end{matrix}\right| \rightarrow$$

Si $a = 4$ $f(x)$ sería continua en $x = 0$
Si $a \neq 4$ $f(x)$ tendría una discontinuidad de salto finito en $x = 0$

$\boxed{\begin{matrix} \bullet \text{ Si } a = 4 \Rightarrow f(x) \text{ continua en } \mathbb{R} \\ \bullet \text{ Si } a \neq 4 \Rightarrow f(x) \text{ continua en } \mathbb{R} - \{0\}, \text{ salto finito en } x = 0 \end{matrix}}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+6 & x < -2 \\ 2 & -2 < x < 0 \\ -a\operatorname{sen} x & x > 0 \end{cases}$$

• En $x = -2$:

$$\left.\begin{matrix} \lim_{x \to -2^-} f'(x) = -4 + 6 = 2 \\ \lim_{x \to -2^+} f'(x) = 2 \end{matrix}\right| \rightarrow f(x) \text{ es derivable en } x = -2$$

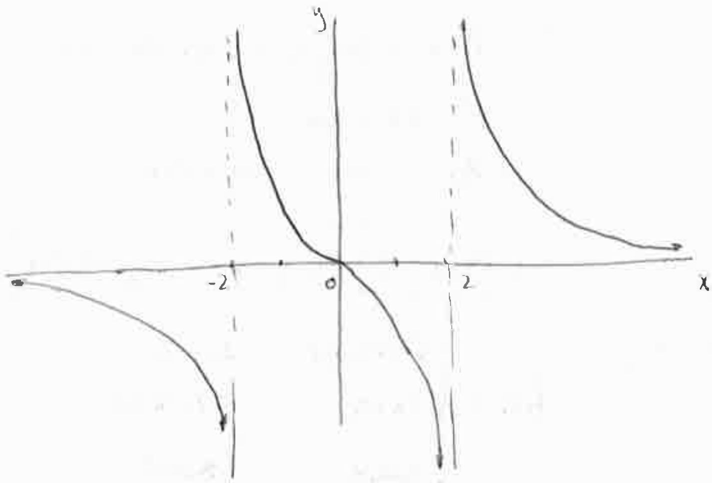
x	$-\infty$		-2		$+2$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	|	$\searrow$	|	$\searrow$	
$f'(x)$		$-$	|	$-$	|	$-$	

$f(x)$ decreciente en todo su dominio

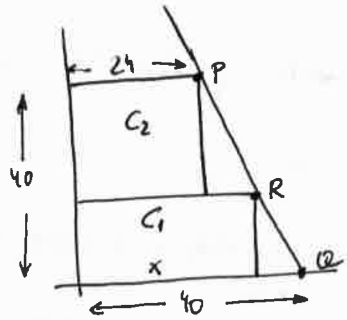
$$f''(x) = \frac{-2x(x^2-4)^2 - (-x^2-4)\cdot 2\cancel{(x^2-4)}\cdot 2x}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-2x^3+8x+4x^3+16x}{(x^2-4)^3} = \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}$$

$$f''(x)=0 \rightarrow \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}=0 \quad , \quad 2x^3+24x=0 \quad , \quad 2x(x^2+12)=0 \begin{cases} x=0 \\ \cancel{x^2=-12} \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		0		$+2$		$+\infty$
$f(x)$		cóncava	|	conv.	PI	cónc.	|	convexa	
$f''(x)$		$-$	|	$+$	0	$-$	|	$+$	



SEPT 06



a) $P(24,40)$

$Q(40,0)$

$\vec{PQ} = (16,-40) \rightarrow m = -\frac{40}{16} = -\frac{5}{2}$

$y-0 = -\frac{5}{2}(x-40)$

$$\boxed{y = \frac{200-5x}{2}}$$

b) $R\left(x, \frac{200-5x}{2}\right)$

$\text{Area } C_1 = x\cdot\frac{200-5x}{2} = \boxed{\frac{200x-5x^2}{2}}$ $\quad x\in[24,40]$

$\text{Area } C_2 = 24\cdot\left(40-\frac{200-5x}{2}\right) = 24\,\frac{80-200+5x}{2} = 24\,\frac{5x-120}{2} = \boxed{60x-1440}$

$x\in[24,40]$

c) $B = 1'2\cdot\frac{200x-5x^2}{2} + 1\cdot(60x-1440) = 120x-3x^2+60x-1440 = -3x^2+180x-1440$

$B' = -6x+180$

$B'=0 \rightarrow x = 30\,m$

		30	
B	$\nearrow$		$\searrow$
B'	$+$		$-$

$\boxed{\text{Máximo beneficio para } x = 30\,m}$

• En $x=0$: Para que una función sea derivable en un punto, debe ser continua en dicho punto, por lo que si $a \neq 4$ sin ningún cálculo $f(x)$ no es derivable. Si $a=4$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \end{array}\right| \rightarrow f(x) \text{ no derivable en } x=0.$$

• Si $a=4 \Rightarrow f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$, en $x=0$ tiene un punto anguloso

• Si $a\neq 4 \Rightarrow f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$, en $x=0$ no es continua

SEPT 06

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1-0-1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \sin x}{2\sin x \cos x} = \frac{1-1+0}{2\cdot 0\cdot 1} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{2\cos^2 x - 2\sin^2 x} = \frac{1-1}{2-0} = \boxed{0}$$

b) $$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x = 1^\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln(1+0)}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\cdot\frac{-2}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-2}{x^2+2x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+2x} = \frac{+\infty}{+\infty} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{2x+2} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \boxed{e^2}$$

JUN 07

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cancel{2x}}{2\sqrt{x^2+1}}}{\cancel{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^n-8}{2^{n+1}}\right) = \frac{2^{+\infty}-8}{2^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n\cdot \cancel{\ln 2}}{2^{n+1}\cdot\cancel{\ln 2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

También: $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n-8}{2^{n+1}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^n}{2^n}-\frac{8}{2^n}}{\frac{2^{n+1}}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{8}{2^n}}{2} = \frac{1-\frac{8}{\infty}}{2} = \frac{1}{2}$$

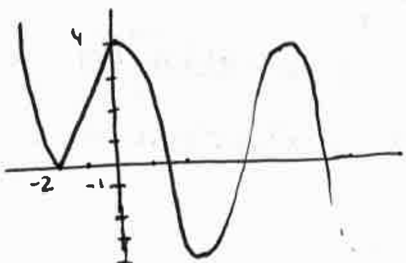
JUN 06 (continuación)

$y = x^2+6x+8$

$x_v = \frac{-6}{+2} = -3 \rightarrow y = -1$

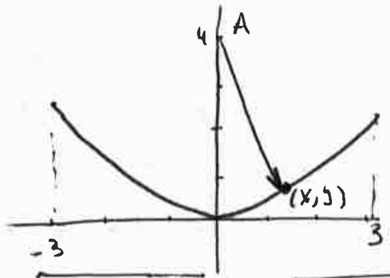
$x=0 \rightarrow y=8$

$y=0 \rightarrow x = \begin{cases} -4 \\ -2 \end{cases}$



JUN 07

$y = \frac{x^2}{4} \qquad x \in [-3,3]$



a) $A(0,4)$, $P(x,y)$ $\Big|$ $\vec{AP} = (x, y-4)$

$$d = |\vec{AP}| = \boxed{\sqrt{x^2 + (y-4)^2}} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{(x^2-16)^2}{16}} = \sqrt{\frac{16x^2 + x^4 - 32x^2 + 256}{16}} =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}}{4}}$$

b) $$d' = \frac{1}{4}\,\frac{4x^3 - 32x}{2\sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}} = \frac{x^3 - 8x}{2\sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}}$$

$d' = 0 \Rightarrow x^3 - 8x = 0 \; ; \quad x(x^2 - 8) = 0 \to x = 0, \; x = \pm\sqrt{8}$

	-3 … $-\sqrt{8}$	$-\sqrt{8}$ … 0	0 … $\sqrt{8}$	$\sqrt{8}$ … 3
d	↘	↗	↘	↗
d'	$-$	$+$	$-$	$+$

Máximo Relativo en $x = 0$
Mínimo " " $x = -\sqrt{8}$
" " " $x = \sqrt{8}$

Para obtener los máximos y mínimos absolutos en $x \in [-3,3]$ tenemos que comparar el valor de la distancia en los extremos relativos con los de los puntos inicial y final del intervalo:

$d(0) = \frac{\sqrt{256}}{4} = 4$ → $\boxed{\text{Máxima Distancia en } x = 0 \to \text{Punto } (0,0)}$

$d(\sqrt{8}) = \frac{\sqrt{192}}{4} = \frac{8\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} = 3'464$

$d(-\sqrt{8}) = 2\sqrt{3} = 3'464$ → $\boxed{\text{Mínimas distancias en } x = \pm\sqrt{8} \to \text{Puntos } (\pm\sqrt{8}, 2)}$

$d(3) = \frac{\sqrt{193}}{4} = 3'473$

$d(-3) = \frac{\sqrt{193}}{4} = 3'473$

c) Tal y como hemos calculado los mínimos, la distancia más corta es $3'464$, por lo que no puede ser menor que 2.

Si intentamos resolver la inecuación:

$$\frac{\sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}}{4} < 2 \; ; \quad \sqrt{x^4 - 16x^2 + 256} < 8 \; ; \quad 0 < x^4 - 16x^2 + 256 < 64$$

$x^4 - 16x^2 + 256 > 0 \; ; \quad x^2 = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 1024}}{2} \; \nexists \quad$ Solución $\mathbb{R}$

$x^4 - 16x^2 + 256 < 64 \; ; \quad x^4 - 16x^2 + 192 < 0 \; ; \quad x^2 = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 768}}{2} \; \nexists \quad \boxed{\text{Ninguna solución}}$

SEPT 07

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad ; \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad ; \quad f''(x) = 6ax + 2b$

$P(0,0) \longrightarrow \boxed{0 = d}$

$Q(2,2) \longrightarrow 2 = 8a + 4b + c$

Inflexión en $x = 0 \longrightarrow 0 = 6a \cdot 0 + 2b \Rightarrow \boxed{b = 0}$

Mínimo en $x = 1 \longrightarrow 0 = 3a + 2b + c$

$\longrightarrow \begin{cases} 8a + c = 2 \\ 3a + c = 0 \end{cases} \quad \boxed{\begin{array}{l} a = 2/5 \\ c = -6/5 \end{array}}$

SEPT 07

$y = x^4 e^{-x}$, $D = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 e^{-x} + x^4 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = x^3 (4 - x) e^{-x}$

$y' = 0 \Rightarrow x^3 (4-x) e^{-x} = 0 \longrightarrow \boxed{x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}}$

	0		4	
$y = x^4 e^{-x}$	↘	↗		↘
$y' = x^3(4-x)e^{-x}$	$-$	$+$		$-$

Mínimo Relativo en $x = 0$
Máximo Relativo en $x = 4$

$f(x)$ creciente en $(0,4)$
$f(x)$ decreciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

$y'' = (12x^2 - 4x^3) e^{-x} + (4x^3 - x^4) e^{-x} \cdot (-1) =$

$= x^2 (12 - 4x - 4x + x^2) e^{-x} =$

$= x^2 (12 - 8x + x^2) e^{-x}$

$y'' = 0 \Rightarrow x^2 (12 - 8x + x^2) e^{-x} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \begin{cases} 0 \\ 2 \\ 6 \end{cases}}$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}$

	0		2		6	
$y = x^4 e^{-x}$	⌣	⌣		⌢		⌣
$y'' = x^2(12-8x+x^2)e^{-x}$	$+$	$+$		$-$		$+$

Inflexión en $x = 2$
Inflexión en $x = 6$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^4 e^{-x} = (-\infty)^4 e^{+\infty} = +\infty \cdot +\infty = +\infty$

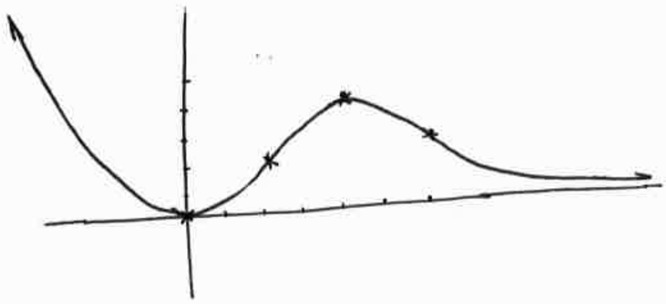
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^4 e^{-x} = (+\infty)^4 \cdot e^{-\infty} = +\infty \cdot 0 =$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{12x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{24x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{24}{e^x} = \frac{24}{+\infty} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Asíntota Horizontal $y = 0$ cuando $x \to +\infty$

	X	y
MIN	0	0
MAX	4	4'7
INF	2	2'2
INF	6	3'2
	$-\infty$	$+\infty$
	$+\infty$	0



SEPT 05

$y = \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$ $\quad \operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ (ya que $\cos x \neq 2 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

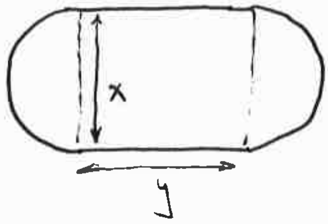
$y' = \frac{\cos x (2 - \cos x) - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2\cos x - \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \longrightarrow x = \begin{cases} \pi/6 \\ 5\pi/6 \end{cases}$ (en el intervalo $[0, 2\pi]$)

	0	$\pi/6$		$5\pi/6$		2π
y'	$+$		$-$		$+$	
y	↗		↘		↗	

Máximo $\left(\pi/6 , \frac{1}{4 - \sqrt{3}}\right)$
Mínimo $\left(5\pi/6 , \frac{-1}{4 - \sqrt{3}}\right)$

JUN 08



$$\text{Area} = x \cdot y + \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = xy + \frac{\pi x^2}{4}$$

$$200 = \text{perímetro} = 2\pi \frac{x}{2} + 2y = \pi x + 2y \;\longrightarrow\; y = \frac{200 - \pi x}{2}$$

$$\text{Area} = x\,\frac{200 - \pi x}{2} + \frac{\pi x^2}{4} = \frac{400x - 2\pi x^2 + \pi x^2}{4} = \frac{400x - \pi x^2}{4}$$

$$\frac{d\,\text{Area}}{dx} = \frac{400 - 2\pi x}{4}$$

$$\frac{d\,\text{Area}}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; 400 = 2\pi x \; ; \; x = \frac{200}{\pi}$$

		$200/\pi$	
$\frac{d\,\text{Area}}{dx}$	$+$		$-$
Area	$\nearrow$		$\searrow$

Máxima área para $\boxed{x = \frac{200}{\pi}\ \text{m} \Rightarrow y = 0\ \text{m}}$

JUN 08

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) $\text{dom} f = \left((-\infty, 2) - \{1\}\right) \cup [2, +\infty) = \mathbb{R} - \{1\}$

$f(x)$ continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ al tratarse de funciones polinómicas y racionales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-\infty} = 0 \;\Rightarrow\; \text{Asíntota Horizontal } y = 0 \text{ cuando } x \to -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

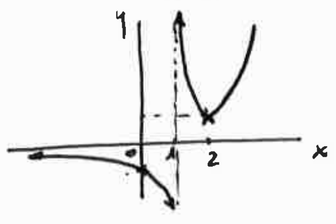
$\Rightarrow$ Asíntota vertical $x = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3) = +\infty \;\longrightarrow\; \text{No hay asíntota cuando } x \to +\infty$$

b) $x = 0 \;\rightarrow\; y = -1$

$y = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{x-1} = 0$ ✗

$\rightarrow\; x^2 - 3 = 0 \; ; \; x^2 = 3 \; ; \; x = \cancel{\pm\sqrt{3}}$ no pertenecen a $[2, +\infty)$



$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{1}{2-1} = 1$$

$$f(2) = 2^2 - 3 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2^2 - 3 = 1$$

$\Rightarrow f(x)$ continua en $x = 2$

c)
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x<2 \\ 2x & \text{si } x>2 \end{cases}$$

$$x + 4y = 0 \longrightarrow y = -\frac{x}{4} \qquad m = -1/4$$

$$f'(x) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{4} \Rightarrow (x-1)^2 = 4 \ ; \ x-1 = \pm 2 \begin{cases} \cancel{x=3} & \text{no pertenece a } (-\infty,2) \\ \boxed{x=-1} \end{cases} \\ 2x = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow x = \cancel{-\dfrac{1}{8}} \quad \text{no pertenece a } [2,+\infty) \end{cases}$$

Punto: $x=-1 \longrightarrow y = \dfrac{1}{-1-1} = -\dfrac{1}{2}$ $\boxed{P(-1,-\frac{1}{2})}$

JUN 08

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$\Rightarrow$ Asíntota Horizontal $y=0$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0 \longrightarrow 1-x^2=0 \ ; \ x=\pm 1$

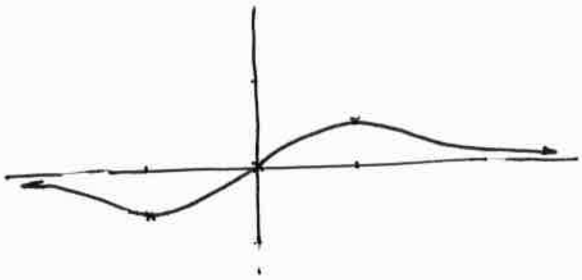
		-1		1	
$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Mínimo Relativo en $x=-1$
Máximo Relativo en $x=1$

$x=0 \longrightarrow y = \dfrac{0}{0^2+1} = 0$ $(0,0)$

$y=0 \longrightarrow 0 = \dfrac{x}{x^2+1} \longrightarrow x=0$ $(0,0)$

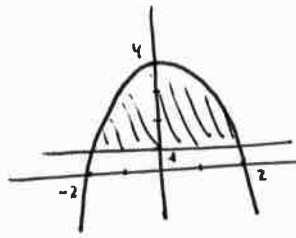
x	y
0	0
1	1/2
-1	-1/2



SEPT 08

a) $y=-x^2+4$

$X_v = -\frac{0}{-2} = 0 \longrightarrow$ vértice $(0,4)$



$x=0 \longrightarrow y=4$

$y=0 \longrightarrow x=\pm 2$

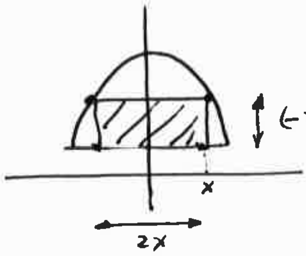
$y=1 \longrightarrow 1=-x^2+4 \ ; \ x^2=3 \ ; \ x=\pm\sqrt{3}$

$$\text{Area} = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (-x^2+4)-1 \, dx = 2\int_0^{\sqrt{3}} (-x^2+3)dx = 2\left(\frac{-x^3}{3}+3x\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\left(-\frac{3\sqrt{3}}{3}+3\sqrt{3}\right) = 2\left(-\sqrt{3}+3\sqrt{3}\right) = \boxed{4\sqrt{3}}$$

b)

$\text{Area} = 2x\cdot(3-x^2) = 6x-2x^3$



$(-x^2+4)-1 = 3-x^2$

$\frac{d\,\text{Area}}{dx} = 6-6x^2$

$\frac{d\,\text{Area}}{dx} = 0 \Rightarrow 6x^2=6 \ ; \ x^2=1 \ ; \ x = \begin{cases} 1 \\ \cancel{-1} \end{cases}$

		1	
$\frac{d\,\text{Area}}{dx} = 6-6x^2$	$+$		$-$
Area	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

Máxima Area para $x=1$; dimensiones: $\boxed{\begin{array}{l}\text{Base} = 2\cdot 1 = 2 \\ \text{Altura} = 3-1^2 = 2\end{array}}$

SEPT 08

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^4} = \frac{1-1}{0^4} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^4+1}}\cdot \cancel{4x^3}}{\cancel{4x^3}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x^4+1}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \frac{1}{0^+} - \frac{1}{e^{+0}-1} = \frac{1}{0^+} - \frac{1}{1^+-1} = \frac{1}{0^+} - \frac{1}{0^+} =$

$= +\infty - \infty =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \frac{e^0-1-0}{0(e^0-1)} = \frac{1-1}{0\cdot(1-1)} = \frac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{1(e^x-1)+x\cdot e^x} = \frac{e^0-1}{e^0-1+0\cdot e^0} = \frac{1-1}{1-1+0} = \frac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x}{e^x+1\cdot e^x+x\,e^x} = \frac{1}{1+1+0} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = \frac{1}{0^-}-\frac{1}{e^{0^-}-1} = \frac{1}{0^-}-\frac{1}{1^- -1} = \frac{1}{0^-}-\frac{1}{0^-} =$$

$$= -\infty-(-\infty) = -\infty+\infty = \text{-----} = \boxed{\tfrac{1}{2}}$$

El restante cálculo es idéntico

SEPT 08

$$f(x) = 2-\frac{x}{x^2+1} \qquad \mathrm{dom} f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{-(x^2+1)+x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

		-1		1	
$f'(x)$	+		−		+
$f(x)$	↗		↘		↗

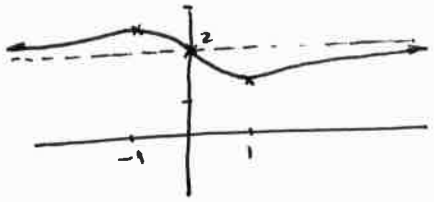
Máximo Relativo en $x=-1$ $P(-1, 5/2)$

Mínimo Relativo en $x=1$ $P(1, 3/2)$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{x}{x^2+1}\right) = 2-\frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{2x}\right) = 2-0 = 2$$

$\Downarrow$

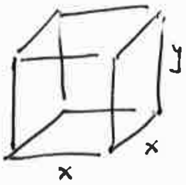
Asíntota Horizontal $y=2$



JUN 09

$96 = \text{Area Total} = 2\cdot x^2+4\cdot x y$

$\text{Volumen} = x^2\cdot y$



$$y = \frac{96-2x^2}{4x} = \frac{48-x^2}{2x}$$

$$\text{Volumen} = x^2\cdot\frac{48-x^2}{2x} = \frac{48x-x^3}{2}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{48-3x^2}{2} \quad ; \quad \frac{dV}{dx}=0 \Rightarrow 3x^2=48 \;;\; x^2=16 \;;\; x = \begin{cases} +4 \\ \cancel{-4} \end{cases}$$

		4	
$\frac{dV}{dx}$	+		−
V	↗		↘

Volumen Máximo para $x=4 \rightarrow y=\frac{48-16}{8}=4$

Dimensiones : $\boxed{\text{Base de 4m de lado} \\ \text{Altura de 4m}}$

Es un cubo.

JUN 09 $\qquad f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-3}$ $\qquad \boxed{\text{dom} f = \mathbb{R}-\{3\}}$

b) $f'(x)=\dfrac{(2x-5)(x-3)-(x^2-5x+7)\cdot 1}{(x-3)^2}=\dfrac{2x^2-6x-5x+15-x^2+5x-7}{(x-3)^2}=\dfrac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$

$f'(x)=0 \rightarrow x^2-6x+8=0$; $x=\begin{cases}2\\4\end{cases}$ Posibles MAX/MIN

	2		3		4	
$f'(x)$	+	−	|	−		+
$f(x)$	↗	↘	|	↘		↗

$f(x)$ es creciente en $(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$
" " decreciente en $(2,3)\cup(3,4)$
" tiene un máximo relativo en $x=2$
" " " mínimo relativo en $x=4$

c) $f''(x)=\dfrac{(2x-6)(x-3)^{\cancel{2}}-(x^2-6x+8)\cdot 2\cancel{(x-3)}}{(x-3)^{\cancel{4}\,3}}=\dfrac{2x^2-6x-6x+18-2x^2+12x-16}{(x-3)^3}=\dfrac{2}{(x-3)^3}$

$f''(x)=0 \Rightarrow 2=0$ ✗ $\boxed{\text{No hay puntos de inflexión}}$

		3	
$f''(x)$	−	|	+
$f(x)$	convexa	|	cóncava

$f(x)$ es convexa en $(-\infty,3)$
" " cóncava en $(3,+\infty)$

a) $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\dfrac{9-15+7}{-0}=\dfrac{1}{-0}=-\infty$
$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\dfrac{1}{+0}=+\infty$ $\quad \boxed{\text{Asíntota Vertical } x=3}$

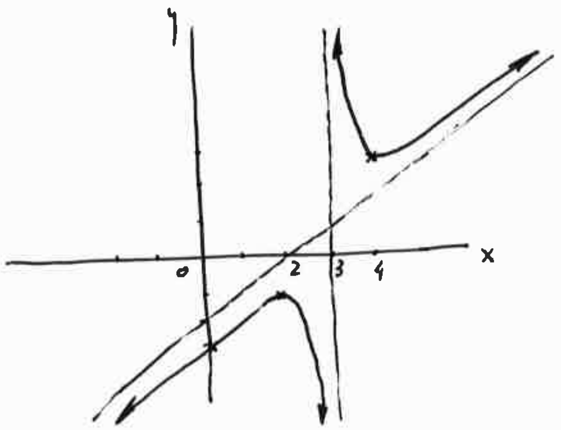
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{+\infty}{+\infty}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x-5}{1}=\dfrac{-\infty}{1}=-\infty$
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{+\infty}{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x-5}{1}=\dfrac{+\infty}{1}=+\infty$ $\quad \boxed{\text{No tiene asíntotas Horizontales}}$

$m=\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+7}{x^2-3x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x-5}{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2}{2}=1$

$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2-5x+7}{x-3}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+7-x^2+3x}{x-3}=$
$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{7-2x}{x-3}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-2}{1}=-2$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Asíntota Oblicua } y=x-2}$

También:
$$\begin{array}{r|l} x^2-5x+7 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^2+3x & \boxed{x-2} \\ \hline -2x+7 & \\ 2x-6 & \\ \hline 1 & \end{array}$$



x	y
2	−1
4	3
0	−7/3

$\boxed{\text{SEPT 09}}$ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-3ax-6}{x-3} & \text{si } x<3 \\ x^2-1 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

$\dfrac{2x^2-3ax-6}{x-3}$ es continua en todos los reales salvo en $x=3$, pero este valor de x no pertenece al intervalo del primer trozo

x^2-1 es continua en todos los reales.

En resumen, la única posible discontinuidad estaría en $x=3$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2-3ax-6}{x-3} = \frac{18-9a-6}{3-3} = \frac{12-9a}{0}$$

Si fuese ∞, no podría ser continua en $x=3$, salvo que sea $\frac{0}{0} \Rightarrow 12-9a=0$; $a=\frac{4}{3}$

- Si $a\neq \frac{4}{3} \Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty \Rightarrow f(x)$ discontinua en $x=3$

- Si $a=\frac{4}{3}$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \dfrac{2x^2-4x-6}{x-3} = \dfrac{18-12-6}{3-3} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 3^-} \dfrac{4x-4}{1} = 8 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x^2-1) = 8 \\ f(3) = 3^2-1 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\boxed{f(x) \text{ continua en } x=3}$ siendo $\boxed{a=\frac{4}{3}}$

$\boxed{\text{SEPT 09}}$ $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ $\boxed{\text{dom} f = \mathbb{R}-\{0\}}$

a)

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{-1}{+0} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{-1}{+0} = -\infty \end{array}\right\} \boxed{\text{Asíntota Vertical } x=0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{x-1}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{-\infty} = 0 \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{x-1}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{+\infty} = 0 \end{array}\right\} \boxed{\text{Asíntota Horizontal } y=0}$$

b) $f'(x) = \dfrac{1\cdot x^2 - (x-1)\cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{x-2x+2}{x^3} = \dfrac{2-x}{x^3}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2-x=0$; $x=2$ Posible MAX/MIN

		0		2	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

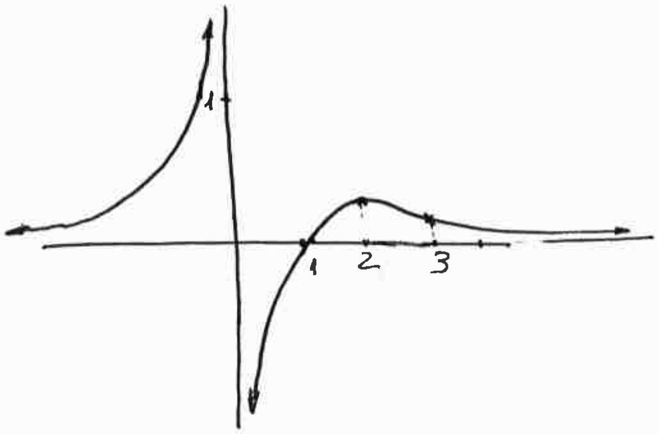
$f(x)$ creciente en $(0, 2)$
" decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
" tiene un máximo relativo en $x=2$

c) $f''(x) = \dfrac{-1\cdot x^{\cancel{3}} - (2-x)\cdot 3\cancel{x^2}}{x^{\cancel{6}\,4}} = \dfrac{-x-6+3x}{x^4} = \dfrac{2x-6}{x^4}$

$f''(x)=0 \Rightarrow 2x-6=0$; $x=3$ Posible punto Inflexión

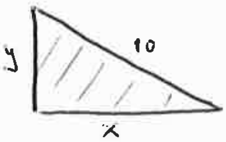
		0		3	
$f''(x)$	$-$		$-$		$+$
$f(x)$	convexa		convexa		cóncava

$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$
" " cóncava en $(3, +\infty)$
" Tiene un punto de inflexión en $x=3$



x	y
2	1/4
3	2/9
1	0

JUNIO 10 fase E



$x^2+y^2=10^2 \longrightarrow y=\sqrt{100-x^2}$

$\text{Area} = \dfrac{x\,y}{2} = \dfrac{x\sqrt{100-x^2}}{2}$ $\quad x\in[0,10]$

$\text{Area}' = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{100-x^2} + x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}\right] = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{100-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}\right] =$

$= \dfrac{1}{2}\,\dfrac{100-x^2-x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \dfrac{50-x^2}{\sqrt{100-x^2}}$

$\text{Area}'=0 \Rightarrow x^2=50 \longrightarrow x=\cancel{\pm}\sqrt{50}$

	0		$\sqrt{50}$		10
Area'		$+$		$-$	
Area		$\nearrow$	MAX	$\searrow$	

$\boxed{\text{Area Máxima para } x=\sqrt{50} \Rightarrow y=\sqrt{100-(\sqrt{50})^2}=\sqrt{50}}$

Junio 10 fase E

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x & \text{si } x>0 \\ ax^2+bx+c & \text{si } x\le 0\end{cases}$$

- $x\ln x$ está definida y es continua en $(0,+\infty)$
- ax^2+bx+c " " " " en $(-\infty, 0)$
- Veamos la continuidad en $x=0$:

$\lim_{x\to0^-} f(x) = a\cdot0^2+b\cdot0+c = c$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x\ln x = 0\cdot\ln 0 = 0\cdot(-\infty) = \lim_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{1/x} = \dfrac{-\infty}{1/0^+} = \dfrac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x\to0^+}\dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to0^+}(-x) =$

$f(0) = a\cdot0^2+b\cdot0+c = c$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=0 \Rightarrow \boxed{c=0}$

$$f'(x)=\begin{cases} \ln x + x\cdot\frac{1}{\cancel{x}} & \text{si } x>0 \\ 2ax+b & \text{si } x<0\end{cases}$$

$f(x)$ tiene un máximo en $x=-1 \Rightarrow f'(-1)=0 \rightarrow 2a(-1)+b=0$; $\boxed{b=2a}$

$f(x)$ tiene en $x=-2$ una tangente paralela a $y=2x \Rightarrow f'(-2)=2 \rightarrow \boxed{-4a+b=2}$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow -4a+2a=2$; $\boxed{a=-1} \Rightarrow \boxed{b=-2}$

Junio 10 fase G

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si } x<0 \\ 5\operatorname{sen}x-2\cos x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

a)

- $ax+b$ está definida y es continua en $(-\infty,0)$
- $5\operatorname{sen}x-2\cos x$ " " " " " $(0,+\infty)$
- Veamos la continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = a\cdot 0+b=b \\ f(0)=5\cdot\operatorname{sen}0-2\cdot\cos 0=-2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=5\cdot\operatorname{sen}0-2\cos 0=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b=-2} \text{ para que } f(x) \text{ sea continua}$$

b)

$$f'(x)=\begin{cases} a & \text{si } x<0 \\ 5\cos x+2\operatorname{sen}x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=a \\ f'(0^+)=5\cdot\cos 0+2\cdot\operatorname{sen}0=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=5}$$ para que $f(x)$ sea derivable en $x=0$, y como es indispensable que sea continua en ese valor de x, tendré que ser $\boxed{b=-2}$

Junio 10 fase G

$$y=\frac{x^2}{1+x}$$

$1+x=0 \rightarrow x=-1 \Rightarrow \boxed{\operatorname{dom} f=\mathbb{R}-\{-1\}}$

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\dfrac{(-1)^2}{1+(-1)}=\dfrac{1}{0}=\infty \Rightarrow$ $\boxed{\text{Asíntota Vertical } x=-1}$

Signos del límite infinito:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2}{1+x}=\frac{(-1)^2}{1+(-1)^-}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2}{1+x}=\frac{(-1)^2}{1+(-1)^+}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

b)

$$y'=\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}$$

$y'=0 \rightarrow \dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}=0$; $x\cdot(2+x)=0 \Rightarrow x = 0,\ -2$

	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
y'	$+$	$-$	$-$	$+$	
y	↗	↘	↘	↗	
		MAX		MIN	

Máximo Relativo en $x=-2$

Mínimo Relativo en $x=0$

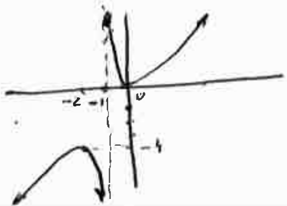
$$y''=\frac{(2+2x)(1+x)^2-(2x+x^2)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{(2+2x)(1+x)-(2x+x^2)\cdot 2}{(1+x)^3}=$$

$$=\frac{2+2x+2x+\cancel{2x^2}-4x-\cancel{2x^2}}{(1+x)^3}=\frac{2}{(1+x)^3}$$

$y''=0 \rightarrow \dfrac{2}{(1+x)^3}=0$; $2=0$ ✗ No tiene inflexiones

c)

x	y
$-\infty$	$+\infty$
-2	-4
-1^-	$-\infty$
-1^+	$+\infty$
0	0
$+\infty$	$+\infty$



NOTA:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x+1 \\ \hline -x^2-x & x-1 \\ -x & \\ x+1 & \\ 1 & \end{array}$$

Tiene la asíntota Oblicua: $\boxed{y=x-1}$

Sept 10
fase E

$y = 5xe^{x-1}$ $\quad \boxed{\text{dom} f = \mathbb{R}}$

a) $y' = 5e^{x-1} + 5xe^{x-1}\cdot 1 = 5\cdot(1+x)e^{x-1}$

$y' = 0 \rightarrow 5(1+x)e^{x-1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+x=0 \ ; \ x=-1 \\ e^{x-1}=0 \ \times \end{cases}$

	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

Es decreciente en $(-\infty,-1)$
Es creciente en $(-1,+\infty)$
Tiene un Mínimo Relativo en $x=-1$

b)

$y'' = 5\cdot 1\cdot e^{x-1} + 5(1+x)e^{x-1}\cdot 1 = 5(2+x)e^{x-1}$

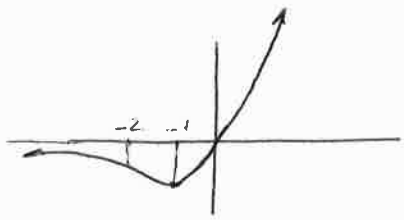
$y'' = 0 \rightarrow 5(2+x)e^{x-1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2+x=0 \ ; \ x=-2 \\ e^{x-1}=0 \ \times \end{cases}$

	$-\infty$	-2	$+\infty$
y''	$-$		$+$
y	Convexa	P.I.	Cóncava

Tiene una inflexión en $x=-2$

c)

x	y
$-\infty$	0
-2	$-10e^{-3}$
-1	$-5e^{-2}$
0	0
$+\infty$	$+\infty$



$\lim_{x\to+\infty} 5xe^{x-1} = 5\cdot(+\infty)\,e^{+\infty} = 5\cdot(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} 5xe^{x-1} = 5\cdot(-\infty)\,e^{-\infty} = -\infty\cdot 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x}{e^{1-x}} = \frac{-\infty}{e^{+\infty}} = \frac{-\infty}{+\infty} =$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{e^{1-x}\cdot(-1)} = \frac{5}{e^{+\infty}\cdot(-1)} = \frac{5}{-\infty} = 0$

Sept 10
fase E

$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x = \left(\frac{2}{2}\right)^{+\infty} = 1^{+\infty}$

$m = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x \Rightarrow \ln m = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right) =$

$= +\infty\cdot\ln 1 = +\infty\cdot 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)}{1/x} = \frac{\ln 1}{1/+\infty} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+3)-\ln(2x-1)}{1/x} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2x+3}\cdot 2 - \frac{1}{2x-1}\cdot 2}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2(2x-1)-2(2x+3)}{(2x+3)(2x-1)}}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\cancel{4x}-4-\cancel{4x}-6}{(2x+3)(2x-1)}}{\frac{-1}{x^2}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-10x^2}{-(2x+3)(2x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10x^2}{4x^2-4x-3} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$\ln m = 5/2 \Rightarrow m = e^{5/2} = \boxed{\sqrt{e^5}}$

Sept 10
fase General

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \le 0 \\ 4 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

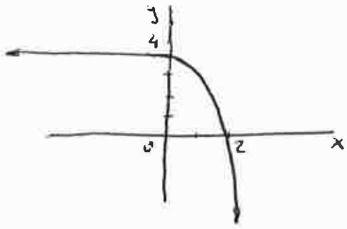
a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 4 \\ f(0) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 4 - 0^2 = 4 \end{array}\right| \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = 0$

b) $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{4-4}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{0}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} 0 = 0$

$\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{(4-h^2)-4}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{-h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} (-h) = -0 = 0$

En consecuencia, existe $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$, por lo que $f(x)$ es derivable en $x = 0 \longrightarrow \boxed{f'(0) = 0}$

c)



Sep 10
fase G

$$\lim_{x \to \pi/2} (1 + 2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = (1 + 2 \cdot 0)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}$$

$$m = \lim_{x \to \pi/2} (1 + 2\cos x)^{1/\cos x}$$

$$\ln m = \lim_{x \to \pi/2} \ln (1 + 2\cos x)^{1/\cos x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{1}{\cos x} \ln (1 + 2\cos x) = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\ln (1 + 2\cos x)}{\cos x} =$$

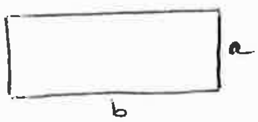
$$= \frac{\ln(1 + 2 \cdot 0)}{0} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\frac{1}{1+2\cos x} \cdot 2(-\cancel{\operatorname{sen} x})}{-\cancel{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{2}{1 + 2\cos x} =$$

$$= \frac{2}{1 + 2 \cdot 0} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

Jun 11
fase E

$P = 2a + 2b = 12$

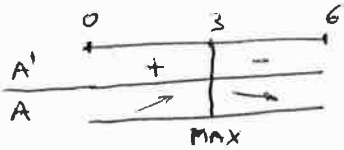
$a + b = 6 \rightarrow b = 6 - a$



Maximizar: $A = ab = a \cdot (6-a) = 6a - a^2 \qquad a \in [0, 6]$

$$\frac{dA}{da} = 6 - 2a$$

$\dfrac{dA}{da} = 0 \Rightarrow 6 - 2a = 0 \; ; \; a = 3$



Máxima Área para $a = 3\,m \Rightarrow b = 3\,m$

Área máxima $= 3 \cdot 3 = \boxed{9\,m^2}$. En realidad se trata de un cuadrado de 3m de lado.

Jun 11 fase E

$$f(x) = \begin{cases} 7+ax & \text{si } x<1 \\ a\sqrt{x} + \dfrac{b}{x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

- $7+ax$ es continua y derivable en $(-\infty,1)$ por ser una expresión lineal.
- $a\sqrt{x}+\frac{b}{x}$ " " " " en $(1,+\infty)$ por estar definida la raíz cuadrada en $(1,+\infty)$ [no lo estaría en $(-\infty,0)$] y $\frac{b}{x}$ [no lo estaría en $x=0$].
- Para que $f(x)$ sea derivable en $x=1$, primero debe ser continua:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} f(x) = 7+a \\ &f(1) = a\sqrt{1}+\frac{b}{1} = a+b \\ &\lim_{x\to 1^+} f(x) = a\sqrt{1}+\frac{b}{1} = a+b \end{aligned}\right\} \Rightarrow 7+\cancel{a}+b=\cancel{a} \Rightarrow \boxed{b=7}$$

- Para que sea derivable, deben coincidir a izquierda y derecha de $x=1$

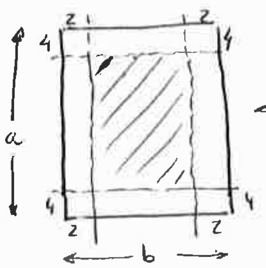
$$f(x) = \begin{cases} 7+ax & \text{si } x<1 \\ a\sqrt{x}+\dfrac{7}{x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases} \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x<1 \\ ¿? & \text{si } x=1 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{x}} - \dfrac{7}{x^2} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &f'(1^-) = a \\ &f'(1^+) = \frac{a}{2\sqrt{1}} - \frac{7}{1^2} = \frac{a}{2} - 7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \frac{a}{2} - 7 \Rightarrow \boxed{a=-14}$$

Jun 11 fase G

Area $=600 \Rightarrow a\cdot b = 600 \rightarrow b = \frac{600}{a}$

Maximizar: Area Impresa $= (a-8)(b-4) = (a-8)\cdot\left(\frac{600}{a}-4\right)$



Casos extremos

$\boxed{a=8,\ b=75}$

$\boxed{b=4,\ a=150}$

$$\frac{dA_I}{da} = 1\cdot\left(\frac{600}{a}-4\right) + (a-8)\cdot\frac{-600}{a^2} =$$

$$= \cancel{\frac{600}{a}} - 4 - \cancel{\frac{600}{a}} + \frac{4800}{a^2} = \frac{4800-4a^2}{a^2} \qquad a\in[8,150]$$

$$\frac{dA_I}{da} = 0 \Rightarrow \frac{4800-4a^2}{a^2} = 0 \Rightarrow a = \cancel{\pm}\sqrt{1200} = 20\sqrt{3}$$

	8	$20\sqrt{3}$	150
A'_I	+	−	
A_I	↗	↘	
		MAX	

El Area Impresa es máxima para $\boxed{a=20\sqrt{3}\text{ cm}} \Rightarrow b = \frac{600}{20\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = \boxed{10\sqrt{3}\text{ cm}}$

Area Impresa máxima $= (20\sqrt{3}-8)(10\sqrt{3}-4) = 600 - 80\sqrt{3} - 80\sqrt{3} + 32 = \boxed{632 - 160\sqrt{3}\text{ cm}^2}$

Jun 11
fase G

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{9x} = \dfrac{3-3}{0} = \dfrac{0}{0} \overset{\text{L'hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{9+x}} - \dfrac{-1}{2\sqrt{9-x}}}{9} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{18\sqrt{9+x}} + \dfrac{1}{18\sqrt{9-x}} \right) = \dfrac{1}{54} + \dfrac{1}{54} = \boxed{\dfrac{1}{27}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tg x} = \left(\dfrac{1}{0^+}\right)^{tg\, 0^+} = (0^+)^{+\infty}$

$m = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tg x} \longrightarrow \ln m = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tg x} = \lim\limits_{x\to 0^+} tg x \cdot \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1/x^2)}{1/tg x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\overset{0}{\ln 1} - \ln x^2}{1/tg x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-2\ln x}{1/tg x} = \dfrac{-\infty}{+\infty} =$ L'hôpital

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-2/x}{-\sec^2 x / tg^2 x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\, tg^2 x}{x \sec^2 x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\dfrac{sen^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{x}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2 sen^2 x}{x} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4 sen x \cos x}{1} = \dfrac{4\cdot 0\cdot 1}{1} = 0$

$\ln m = 0 \Rightarrow m = e^0 = 1 \longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tg x} = 1}$

Jul 11
fase E

$f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x \quad ; \quad dom f = \mathbb{R}$

a) b) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{3} - \dfrac{6x}{2} + 2 = x^2 - 3x + 2$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \quad ; \quad x = 1,\ 2$

	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+		−		+
$f(x)$	↗	MAX	↘	MIN	↗

$\boxed{\text{Máximo Relativo en } x=1} \rightarrow y = \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{2} + 2 = \dfrac{5}{6} \quad \boxed{(1, 5/6)}$

$\boxed{\text{Mínimo Relativo en } x=2} \rightarrow y = \dfrac{8}{3} - \dfrac{12}{2} + 4 = \dfrac{2}{3} \quad \boxed{(2, 2/3)}$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
" " decreciente en $(1, 2)$

$f''(x) = 2x - 3$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = 3/2$

	$-\infty$	3/2	$+\infty$
$f''(x)$	−		+
$f(x)$	convexa	Inf.	cóncava

$\boxed{\text{Punto de Inflexión en } x = \tfrac{3}{2}} \rightarrow y = \dfrac{27}{24} - \dfrac{27}{8} + \dfrac{6}{2} = \dfrac{3}{4} \quad \boxed{(3/2, 3/4)}$

Jul 11
fase E

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\cos(x-1)}{\ln^2 x} = \dfrac{1-\cos 0}{\ln^2 1} = \dfrac{1-1}{0^2} = \dfrac{0}{0} \overset{\text{L'hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{+\operatorname{sen}(x-1)}{2\ln x \, \frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x \operatorname{sen}(x-1)}{2\ln x} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1) + x\cos(x-1)}{2/x} = \dfrac{\operatorname{sen} 0 + 1\cdot\cos 0}{2/1} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (x^4+e^x)^{1/x} = (0+e^0)^{1/0} = 1^\infty$

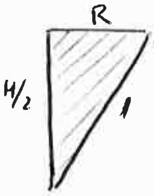
$m = \lim\limits_{x\to 0} (x^4+e^x)^{1/x} \rightarrow$

$\rightarrow \ln m = \lim\limits_{x\to 0} \ln (x^4+e^x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \ln(x^4+e^x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^4+e^x)}{x} =$

$= \dfrac{\ln(0+1)}{0} = \dfrac{0}{0} \overset{\text{L'hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x^4+e^x}\cdot(4x^3+e^x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3+e^x}{x^4+e^x} =$

$= \dfrac{0+e^0}{0+e^0} = 1 \Rightarrow m = e^1 = e \; ; \; \boxed{\lim\limits_{x\to 0} (x^4+e^x)^{1/x} = e}$

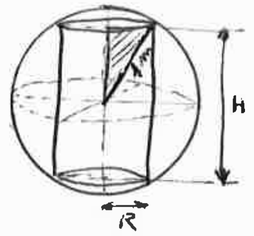
Jul 11
fase E



$\rightarrow 1 = R^2 + \left(\dfrac{H}{2}\right)^2$

$4 = 4R^2 + H^2$

$R^2 = \dfrac{4-H^2}{4}$



Maximizar: $V = \pi R^2 H = \pi \cdot \dfrac{4-H^2}{4} \cdot H = \dfrac{4\pi H - \pi H^3}{4} \; ; \; H \in \left]0,2\right]$

$\dfrac{dV}{dH} = \dfrac{4\pi - 3\pi H^2}{4}$

$\dfrac{dV}{dH} = 0 \Rightarrow \dfrac{4\pi - 3\pi H^2}{4} = 0 \; ; \; H^2 = \dfrac{4\pi}{3\pi} \; ; \; H = \pm\sqrt{4/3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

	0 … $2\sqrt{3}/3$	$2\sqrt{3}/3$ … 2
V'	+	−
V	↗	↘

MAX

Volumen Máximo para $\boxed{H = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\ m} \rightarrow R = \dfrac{1}{4}\sqrt{4 - \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{8}{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}}{6}\ m}$

Volumen Máximo $= \dfrac{1}{4}\left(4\pi \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{3} - \pi\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3\right) = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3} - \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9} = \boxed{\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9}\ m^3}$

Jul 11
fase G

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x - m\operatorname{sen} x}{x^2} = \dfrac{0 - m\cdot 0}{0} = \dfrac{0}{0} \overset{\text{L'hôpital}}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3 - m\cos x}{2x} = \dfrac{3 - m\cdot 1}{0} = \dfrac{3-m}{0} =$

(Si $m \neq 3$ el límite sería ∞, por lo que $\boxed{m=3}$)

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3 - 3\cos x}{2x} = \dfrac{3-3}{0} = \dfrac{0}{0} \overset{\text{L'hôpital}}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{+3\operatorname{sen} x}{2} = \boxed{0}$

Jul 11
fase G

$$f(x)=\begin{cases} x^3-x & \text{si } x\le 1\\ ax+b & \text{si } x>1\end{cases}$$

a) • x^3-x es continua y derivable en $(-\infty,1)$ por ser polinómica.
• $ax+b$ " " " " " $(1,+\infty)$ " " "

Veamos la continuidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} f(x)=1^3-1=0\\ f(1)=1^3-1=0\\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=a\cdot 1+b=a+b\end{array}\right\} \Rightarrow a+b=0\ ;\ b=-a \rightarrow f(x)=\begin{cases} x^3-x & \text{si } x\le 1\\ ax-a & \text{si } x>1\end{cases}$$

Veamos la derivabilidad:

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & \text{si } x<1\\ ¿? & \text{si } x=1\\ a & \text{si } x>1\end{cases}$$

Para que sea derivable en $x=1$ deben de coincidir los valores de $f'(x)$ a izquierda y derecha:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=3\cdot 1^2-1=2\\ f'(1^+)=a\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=2} \Rightarrow \boxed{b=-2} \quad \text{y} \quad f'(1)=2$$

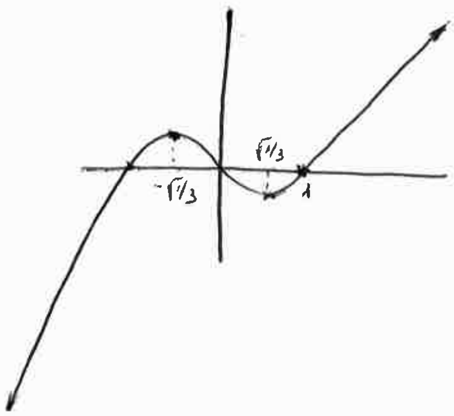
b) $$f(x)=\begin{cases} x^3-x & \text{si } x\le 1\\ 2x-2 & \text{si } x>1\end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & \text{si } x<1\\ 2 & \text{si } x=1\\ 2 & \text{si } x>1\end{cases}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow$
- $3x^2-1=0$ (para $x<1$) $\Rightarrow x=\pm\sqrt{1/3}$ — Ambos son menores que 1
- $2=0$ ✗
- $2=0$ ✗

	$-\infty$		$-\sqrt{1/3}$		$\sqrt{1/3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		−		+		+	
$f(x)$		↗	MAX	↘	MIN	↗		↗	

$f(x)$ tiene un máximo relativo en $x=-\sqrt{\frac{1}{3}} \longrightarrow y=\left(-\sqrt{\frac13}\right)^3+\sqrt{\frac13}=\frac{2\sqrt3}{9}$

$f(x)$ " " mínimo " " $x=+\sqrt{\frac{1}{3}} \longrightarrow y=\left(\sqrt{\frac13}\right)^3-\sqrt{\frac13}=-\frac{2\sqrt3}{9}$



x	y
$-\infty$	$-\infty$
-1	0
$-\sqrt{1/3}$	$\frac{2\sqrt3}{9}$
0	0
$\sqrt{\frac13}$	$-\frac{2\sqrt3}{9}$
1	0
$+\infty$	$+\infty$

JUN 12
fase E

$$y = \frac{1}{1+x^2} \longrightarrow y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

En x, la pendiente de la recta tangente es $\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$$\text{Pendiente} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$P' = \frac{d\,\text{Pendiente}}{dx} = \frac{-2(1+x^2)^{\cancel{2}} + 2x\cdot 2\cdot(\cancel{1+x^2})\cdot 2x}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-2-2x^2+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$P' = 0 \Rightarrow \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} = 0 \;;\; 6x^2-2=0 \;;\; x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

	$-\infty$ … $-\sqrt{\frac13}$	$-\sqrt{\frac13}$ … $\sqrt{\frac13}$	$\sqrt{\frac13}$ … $+\infty$
P'	+	−	+
P	↗	↘	↗

MAX (en $-\sqrt{\frac13}$) MIN (en $\sqrt{\frac13}$)

$\boxed{\text{Pendiente máxima en } x = -\sqrt{\tfrac13}}$ $\longrightarrow$ $P.MAX = \frac{-2\cdot(-\sqrt{\frac13})}{[1+(-\sqrt{\frac13})^2]^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt3}}{\frac{16}{9}} = \boxed{\frac{9}{8\sqrt3}}$

NOTA: En realidad, P' es y'', el punto encontrado es uno de los dos puntos de inflexión de la función.

JUN 12
fase E

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

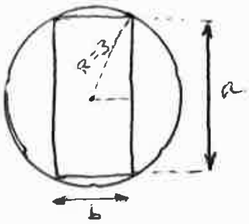
a)

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0} \overset{\text{L'hôpital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1} = \boxed{2}$$

b) Como $f(1) = 3 \neq \lim_{x\to 1} f(x)$, la función no es continua en $x=1$. Tiene una discontinuidad evitable.

Al no ser continua en $x=1$, $\boxed{\text{no será derivable en } x=1}$

JUN 12
fase G



$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 3^2$$

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = 9$$

$$a^2 + b^2 = 36$$

$$b = \sqrt{36-a^2}$$

Maximizar Area $= a\cdot b = a\cdot\sqrt{36-a^2}$; $a \in [0,6]$

$$A' = \frac{dA}{da} = \sqrt{36-a^2} + a\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{36-a^2}}\cdot(-\cancel{2}a) = \sqrt{36-a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{36-a^2}} = \frac{(\sqrt{36-a^2})^2 - a^2}{\sqrt{36-a^2}} = \frac{36-2a^2}{\sqrt{36-a^2}}$$

$$A' = 0 \Rightarrow \frac{36-2a^2}{\sqrt{36-a^2}} = 0 \;;\; 36-2a^2 = 0 \;;\; a^2 = 18 \;;\; a = \cancel{\pm}\sqrt{18}$$

	0 … $\sqrt{18}$	$\sqrt{18}$ … 6
A'	+	−
A	↗	↘

MAX (en $\sqrt{18}$)

$\boxed{\text{Area máxima para } a = \sqrt{18} \longrightarrow b = \sqrt{36-(\sqrt{18})^2} = \sqrt{18}}$

Area Máxima $= \sqrt{18}\,\sqrt{18} = \boxed{18\ u^2}$

JUN 12
fase G

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow y'' = 6ax + 2b$

MIN. en $(1,1) \Rightarrow$ $1 = a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d$; $0 = 3a\cdot 1^2 + 2b\cdot 1 + c$

INF. en $(0,3) \Rightarrow$ $3 = a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d$; $0 = 6a\cdot 0 + 2b$

$$\rightarrow \left.\begin{matrix} a+b+c+d=1 \\ 3a+2b+c=0 \\ \boxed{d=3} \\ 2b=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \boxed{b=0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{matrix} a+0+c+3=1 \\ 3a+2\cdot 0+c=0 \end{matrix}\right\} ; \quad \left.\begin{matrix} a+c=-2 \\ 3a+c=0 \end{matrix}\right\}$$

$$2a = 2$$

$$\boxed{a=1} \rightarrow \boxed{c=-3}$$

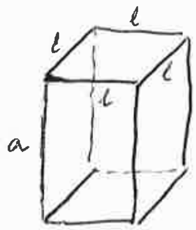
$$\boxed{y = x^3 - 3x + 3}$$

JUN 12
fase E

$2a + 2l = 60$

$a + l = 30$

$a = 30 - l$



Maximizar : $V = l^2 \cdot a = l^2 \cdot (30 - l) = 30l^2 - l^3$; $l \in [0, 30]$

$V' = \frac{dV}{dl} = 60l - 3l^2$

$V' = 0 \Rightarrow 60l - 3l^2 = 0$; $3l(20 - l) = 0$ $\rightarrow l = 0$; $l = 20$

	0 – 20	20 – 30
V'	+	-
V	↗	↘
	MAX	

Volumen máximo para $\boxed{l = 20 \text{ cm} \longrightarrow a = 10 \text{ cm}}$ Vol Máx $= 20^2 \cdot 10 = 4000 \text{ cm}^3$

JUL 12
fase E

- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{a\cdot \cos ax}{1} = a\cdot 1 = a$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \frac{1-1}{0^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x \cos x}{x} = \frac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{1} = \lim_{x\to 0} (-\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) = -1 + 0 = -1$

Por lo tanto : $\boxed{a = -1}$

JUL 12
fase G

$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} = \frac{0-0}{0\cdot 0} = \frac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{1\cdot \ln x + (x-1)\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x \ln x + x - 1} = \frac{1-1}{1\cdot 0 + 1 - 1} = \frac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x} + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\ln x + 2} = \frac{-1}{0+2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

JUL 12
fase G

$$f(x)=\begin{cases} 4 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{m(e^x-1)}{x} & \text{si } x\neq 0 \end{cases}$$

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{m(e^x-1)}{x} = \frac{m(1-1)}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{m e^x}{1} = m \cdot e^0 = m$

$f(0)=4$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{m(e^x-1)}{x} = \frac{m(1-1)}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{m\cdot e^x}{1} = m\cdot e^0 = m$

Si $f(x)$ es continua en $x=0 \Rightarrow \boxed{m=4}$

b) $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \text{Nº Real}$ | Para que sea derivable en $x=0$

Por otro lado, como la derivabilidad necesita de la previa continuidad, 'm' debe ser 4.

$\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{4(e^h-1)}{h}-4}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{4(e^h-1)-4h}{h^2} = \frac{4\cdot(1-1)-0}{0} = \frac{0}{0} =$

$\displaystyle= \lim_{h\to 0^-} \frac{4\cdot e^h-4}{2h} = \frac{4\cdot 1-4}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{4e^h}{2} = \frac{4\cdot 1}{2} = 2$

El límite del cociente incremental cuando $h\to 0^+$ daría el mismo resultado, que al tratarse de un nº real, asegura la derivabilidad en $x=0$: $\boxed{f(x) \text{ sí es derivable en } x=0}$

JUN 13
fase E

$f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

$\text{dom} f = \mathbb{R} - \{-1\}$

a) $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow \boxed{\text{Asíntota vertical } x=-1}$

$\displaystyle\lim_{x\to \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \infty \longrightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x+1 \\ \hline -x^2-x & x-1 \\ -x & \\ x+1 & \\ 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow \boxed{\text{Asíntota oblicua } y=x-1}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0 \longrightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow x=\begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$

		-2		-1		0	
f'	+		−		−		+
f	↗		↘		↘		↗
		MAX				MIN	

f tiene un máximo relativo en $x=-2$
f " " mínimo " " $x=0$

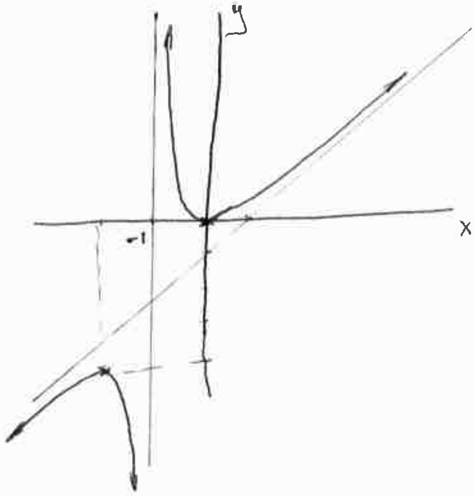
c)

$y=\dfrac{x^2}{x+1}$

x	y
$-\infty$	$+\infty$
-2	-4
-1^-	$-\infty$
-1^+	$+\infty$
0	0
$+\infty$	$+\infty$

$y=x-1$

x	y
1	0
0	-1



JUN13 fase E

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{tg(3x)}=\frac{\ln 1}{tg\,0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+2x}\cdot 2}{\frac{1}{\cos^2(3x)}\cdot 3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2(3x)}{3(1+2x)}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

JUN13 fase G

a) $y=\frac{1}{3}x^3-4x^2-\frac{2}{3}x-4 \longrightarrow y'=\frac{1}{3}3x^2-8x-\frac{2}{3}=x^2-8x-\frac{2}{3}$

$0=2x+3y-4 \longrightarrow y=\dfrac{4-2x}{3} \Rightarrow$ pendiente $=-\frac{2}{3}$

$\Rightarrow x^2-8x-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}\ ;\ x^2-8x=0\ ;\ \boxed{\begin{matrix}x=0\\ x=8\end{matrix}}$

Será paralela en los puntos $(0,-4)\ \left(8,-\frac{284}{3}\right)$

b) $x=1 \to y=\frac{1}{3}-4-\frac{2}{3}-4=-\frac{25}{3}$

$\quad\to y'=1-8-\frac{2}{3}=-\frac{23}{3}$

$y+\frac{25}{3}=-\frac{23}{3}(x-1)\ ;\ 3y+25=-23x+23\ ;$

$\boxed{23x+3y+2=0}$

JUN13 fase G

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{1-x}}=1^{1/0}=1^{\infty}$$

$$A=\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{1-x}} \longrightarrow \ln A=\lim_{x\to 1}\ln(2-x)^{1/1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln(2-x)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{1-x}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2-x}\cdot(-1)}{-1}=1$$

$\ln A=1 \Rightarrow A=e^1=e\ ;\ \boxed{\lim_{x\to 1}(2-x)^{1/1-x}=e}$

JUL 13 fase E

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \longrightarrow f''(x) = 6x + 2a$

Recta Tangente horizontal en $x = 2 \Rightarrow 3\cdot 2^2 + 2a\cdot 2 + b = 0$

" " " " $x = 4 \Rightarrow 3\cdot 4^2 + 2a\cdot 4 + b = 0$

Punto de inflexión pertenece al eje X $\Rightarrow 0 = 6x + 2a$; $x = \frac{-2a}{6} = -\frac{a}{3}$;

$\left(-\frac{a}{3}\right)^3 + a\cdot\left(\frac{-a}{3}\right)^2 + b\cdot\left(\frac{-a}{3}\right) + c = 0$

$12 + 4a + b = 0$
$48 + 8a + b = 0$
$-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c = 0$

$4a + b = -12$
$8a + b = -48$
$4a = -36$; $\boxed{a = -9} \longrightarrow b = -12 + 36 = \boxed{24}$

$c = \frac{a^3}{27} - \frac{a^3}{9} + \frac{ab}{3} = \frac{(-9)^3}{27} - \frac{(-9)^3}{9} + \frac{(-9)\cdot 24}{3} = \boxed{-18}$

JUL 13 fase E

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = \frac{1-1-0}{0-0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{1-1}{1+0} = \boxed{0}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{0}\operatorname{sen} 0 = \infty \cdot 0 = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x/2)}{x} = \frac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x/2)\cdot 1/2}{1} = \frac{1\cdot 1/2}{1} = \boxed{\frac{1}{2}}$

JUL 13 fase E

$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

a) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

$\Rightarrow$ Asíntota Vertical $x = -1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$\Rightarrow$ Asíntota Vertical $x = 1$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{2x} = \lim_{x\to\infty} 3x = \infty \longrightarrow$ No tiene asíntota Horizontal

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 & x^2 - 1 \\ \hline -2x^3 + 2x & 2x \\ 2x & \end{array}$$

$\longrightarrow$ Asíntota oblicua $y = 2x$

b) $f'(x) = \dfrac{6x^2(x^2-1)-2x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{6x^4-6x^2-4x^4}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^4-6x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^2(x^2-4)}{(x^2-1)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x^2(x^2-4)=0 \rightarrow \boxed{x=0}$

$\rightarrow x^2-4=0 \ ; \ \boxed{x=\pm 2}$

		-2		-1		0		1		2	
f'	$+$		$-$		$-$		$-$		$-$		$+$
f	↗		↘		↘		↘		↘		↗
		MAX								MIN	

f es creciente en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$
f es decreciente en $(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2)$
f tiene un máximo relativo en $x=-2$
" " " mínimo " " $x=2$

JUL 13
fase G

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \dfrac{1-1}{1-1} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{+\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\cdot \cancel{2}x} = \dfrac{1}{1+0} = \boxed{1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)\operatorname{ctg} x = (1-1)\cdot \operatorname{ctg} 0 = 0\cdot\infty = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x} =$

$= \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{+\operatorname{sen} x}{1/\cos^2 x} = \dfrac{0}{1} = \boxed{0}$

JUL 13
fase G

$f(x) = x^3+2x^2-15x+93$ $\quad$ dom f $= [0,+\infty)$ ya que x son Toneladas.

$f'(x) = 3x^2+4x-15$

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+4x-15=0$

$x = \dfrac{-4\pm\sqrt{16+180}}{6} = \dfrac{-4\pm 14}{6} \rightarrow 10/6 = 5/3$

$\rightarrow \cancel{-18/6 = -3}$

	0		$5/3$	
f'		$-$		$+$
f		↘		↗
			MIN	

Mínimo coste para $\boxed{x = 5/3 \text{ ton}}$.

$x = 5/3 \longrightarrow f(5/3) = \dfrac{2111}{27} = \boxed{78'19}$

JUN 14
fase General

$f(x) = x^2 e^{-x^2}$ $\quad$ dom f $= \mathbb{R}$

a) $f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x(1-x^2)e^{-x^2}=0 \rightarrow 2x=0 \ ; \ x=0$

$\rightarrow 1-x^2=0 \ ; \ x=\pm 1$

$\rightarrow e^{-x^2}=0$ Absurdo

		-1		0		1	
f'	$+$		$-$		$+$		$-$
f	↗		↘		↗		↘
		MAX				MIN	

f es creciente en $(-\infty,-1) \cup (0,1)$

f es decreciente en $(-1,0) \cup (1,+\infty)$

f tiene un máximo local en $x=-1$

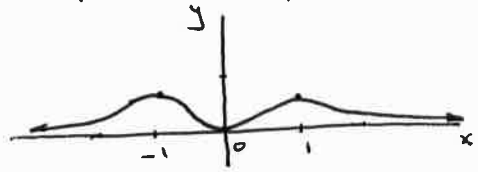
f " " mínimo " " $x=0$

f " " máximo " " $x=1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{2x}}{e^{x^2}\cdot \cancel{2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$ (ya que, al estar x elevada al cuadrado, es simétrica respecto del eje Y)

x	y
-1	e^{-1}
0	0
1	e^{-1}



JUN 14 fase General

Nº árboles	Nº frutos por árbol	Total Producción (frutos)
24	600	$24\cdot 600 = 14\,400$
25	$600-15 = 585$	$25\cdot 585 = 14\,625$
26	$600-2\cdot 15 = 570$	$26\cdot 570 = 14\,820$
⋮	⋮	⋮
$x+24$	$600-15x$	$(x+24)(600-15x)$

$P=(x+24)(600-15x)$ $\quad x =$ nº de árboles por encima de 24.

$P' = 1\cdot(600-15x) + (x+24)\cdot(-15) = 600-15x-15x-360 = 240-30x$

$P'=0 \Rightarrow 240-30x=0$; $x=8$

	0	8	$+\infty$
P	+	−	
P'	↗	↘	
		MAX	

Máxima producción plantando $24+8 = \boxed{32 \text{ árboles}}$, consiguiendo una producción de: $(8+24)\cdot(600-15\cdot 8) = \boxed{15\,360 \text{ frutos}}$

JUN 14 fase Específica

$A(4,0)$, $P(x,\sqrt{x})$ | $\vec{AP} = (x-4,\sqrt{x})$

$d = \sqrt{(x-4)^2+(\sqrt{x})^2} =$

$= \sqrt{x^2-8x+16+x} = \sqrt{x^2-7x+16}$

$$d' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-7x+16}}\cdot(2x-7) = \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}}$$

$d'=0 \Rightarrow 2x-7=0$; $x=3'5$

	0	3'5	$+\infty$
d'	−	+	
d	↘	↗	
		MIN	

Mínima distancia para $x=3'5$.

$\boxed{P(3'5, \sqrt{3'5})}$

JUN 14
fase específica

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\frac{0-0}{0\cdot 0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+x\cdot\frac{1}{1+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\frac{0}{1\cdot 0+0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+\cancel{(1+x)}\cdot\frac{1}{\cancel{1+x}}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+2}=\frac{1}{0+2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

JUL 14
fase General

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ K & \text{si } x=0\end{cases}$$

$\frac{e^x-1}{x}$ está definida y es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ por ser resta y cociente de funciones continuas sin anularse el denominador.

Veamos en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1\\ f(0)=K\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{K=1}$$ para que f sea continua en $x=0$.

Veamos la derivabilidad:

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-(e^x-1)}{x^2}=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\frac{0-1+1}{0^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{e^x}+xe^x-\cancel{e^x}}{2x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$ $\boxed{f \text{ es derivable en } x=0 \text{ siendo } f'(0)=\frac{1}{2}}$

JUL 14
fase General

$$f(x)=ax+3+\frac{b}{x^2}\longrightarrow f'(x)=a+\frac{-b\cdot 2x}{x^4}=a-\frac{2b}{x^3}$$

a)

$x=1 \to y=a+3+b$; $\to y'=a-2b$

$y=3x \longrightarrow y'=3$

$x=1 \to y=3$; $\to y'=3$

$$\left.\begin{array}{l}a+\cancel{3}+b=\cancel{3}\\ a-2b=3\end{array}\right\}$$

$$3b=-3\Rightarrow\boxed{b=-1}\ \boxed{a=1}$$

b) $f(x)=x+3-\frac{1}{x^2}$ $\qquad$ $\text{dom} f=\mathbb{R}-\{0\}$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0+3-\infty=-\infty\Rightarrow\boxed{\text{Asíntota Vertical } x=0}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+3-\frac{1}{x^2}\right)=\infty\longrightarrow$$ No tiene Asíntota Horizontal.

$$f(x)=x+3-\frac{1}{x^2}=\frac{x^3+3x^2-1}{x^2}$$

$$\begin{array}{l|l}x^3+3x^2-1 & x^2\\ \cline{2-2} -x^3 & x+3\\ \hline \quad 3x^2-1 & \\ -3x^2 & \\ \hline \quad -1 & \end{array}\longrightarrow\boxed{\begin{array}{c}\text{Asíntota Oblicua}\\ y=x+3\end{array}}$$

JUL 14 fase Específica

$y = x^3 - 3x^2 + 1$

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \;;\; 3x(x-2) = 0 \;;\; x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$

		0		2	
y'	+		−		+
y	↗		↘		↗
		MAX		MIN	

$x = 0 \begin{cases} \rightarrow y = 1 \\ \rightarrow y' = 0 \end{cases}$ $\boxed{y = 1}$

JUL 14 fase Específica

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x\to 2} \ln \left(\frac{x}{2}\right)^{1/x-2}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x-2} \ln\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x/2)}{x-2}} = e^{\frac{0}{0}} = e^{\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x/2}\cdot 1/2}{1}} = e^{\lim_{x\to 2} \frac{1}{x}} = \boxed{e^{1/2}} = \boxed{\sqrt{e}}$$

JUL 14 fase Específica

$f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}$ $\quad \text{dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$

a) $$f'(x) = \frac{(3x^2+6x)\cdot x^{\cancel{2}} - (x^3+3x^2-4)\cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}} = \frac{3x^3 + 6\cancel{x^2} - 2x^3 - 6\cancel{x^2} + 8}{x^3} = \frac{x^3+8}{x^3}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 8 = 0 \;;\; x^3 = -8 \;;\; x = -2$

		−2		0	
f'	+		−		+
f	↗		↘		↗
		MAX			

f es creciente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

f es decreciente en $(-2, 0)$

f tiene un máximo local en $x = -2$ $\boxed{(-2, 0)}$

b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$ $\quad \rightarrow$ Asíntota vertical $x = 0$

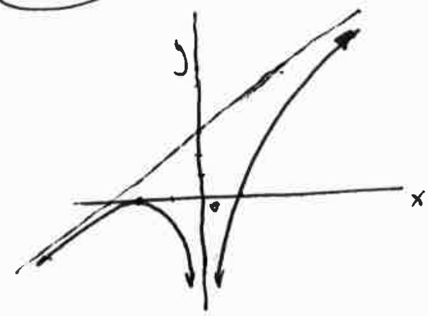
$\lim_{x\to \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+6x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+6}{2} = \infty$ — No tiene Asíntota Horiz.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 4 & x^2 \\ \cline{2-2} -x^3 & x+3 \\ \hline 3x^2 - 4 & \\ -3x^2 & \\ \hline -4 & \end{array}$$

$\longrightarrow$ Asíntota oblicua $y = x + 3$

$y = x + 3$

x	y
0	3
−3	0



$y = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}$

x	y
−2	0
1	0

JUN 15 fase General

$$\lim_{x\to 0} \left(\text{ctg}\, x - \frac{1}{x}\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{tg}\, x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \text{tg}\, x}{x\, \text{tg}\, x} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1 + \text{tg}^2 x)}{\text{tg}\, x + x(1 + \text{tg}^2 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\text{tg}^2 x}{\text{tg}\, x + x + x\,\text{tg}^2 x} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\,\text{tg}\, x\,(1 + \text{tg}^2 x)}{1 + \text{tg}^2 x + 1 + \text{tg}^2 x + x(1 + \text{tg}^2 x)} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$$

JUN 15
fase General

x = nº maquinas
y = nº empleados

Maximizar $f(x,y)=9xy^2$

Siendo $22500 = 1500y + 2500x \longrightarrow x = 9 - \frac{3y}{5}$

$$f(y) = 9\left(9-\frac{3y}{5}\right)\cdot y^2 = 81y^2 - \frac{27}{5}y^3$$

$$f'(y) = 162y - \frac{81}{5}y^2 = \frac{81}{5}y(10-y)$$

$$f'(y)=0 \Rightarrow \frac{81}{5}y(10-y)=0 \; ; \quad y = \begin{cases} 0 \\ 10 \end{cases}$$

	0		10	
f'		+		−
f		↗		↘
			MAX	

Se maximizaría la producción contratando $\boxed{10 \text{ empleados}}$ y comprando $x = 9 - \frac{3\cdot 10}{5} = \boxed{3 \text{ maquinas}}$

JUN 15
fase Específica

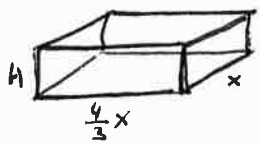
$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2 \longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\left.\begin{array}{l} P(-1,6) \longrightarrow 6 = -1 + a - b + 2 \\ x=1 \longrightarrow m = tg\,45^\circ = 1 \longrightarrow 1 = 3 + 2a + b \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a - b = 5 \\ 2a + b = -2 \end{array}\right\}$$

$$3a = 3$$

$$\boxed{a=1} \quad \boxed{b=-4}$$

JUN 15
fase Específica



$$Coste = 225\cdot x\cdot\frac{4}{3}x + 300\cdot x\cdot\frac{4}{3}x + 256\cdot H\cdot\frac{4}{3}x\cdot 2 + 256\cdot H\cdot x\cdot 2 =$$
$$= 700x^2 + \frac{3584}{3}Hx$$

Minimizar $C = 700x^2 + \frac{3584}{3}Hx$

Siendo $V = x\cdot\frac{4}{3}x\cdot H = 100 \longrightarrow H = \frac{75}{x^2}$

$$C = 700x^2 + \frac{89600}{x}$$

$$C' = 1400x - \frac{89600}{x^2}$$

$$C'=0 \Rightarrow 1400x = \frac{89600}{x^2} \; ; \quad x^3 = 64 \; ; \quad x = \sqrt[3]{64} = 4$$

	0		4		$+\infty$
C'		−		+	
C		↘		↗	
			MIN		

a) Minimizaríamos costes con $\boxed{4\,m}$ de ancho de base

b) El coste mínimo sería: $C_{MIN} = 700\cdot 4^2 + \frac{8960}{4} = \boxed{13440\text{ €}}$

JUN 15
fase Específica

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{\operatorname{sen}(2x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+mx}\cdot m}{\cos(2x)\cdot 2} = \lim_{x\to 0}\frac{m}{2(1+mx)\cos(2x)} =$$
$$= \frac{m}{2\cdot 1\cdot 1} = \frac{m}{2}$$

$$\frac{m}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{m=6}$$

JUL 15
fase específica

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x + b\,\mathrm{sen}\,x}{x^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x + b\cos x}{3x^2} = \frac{1-0+b}{0} = \frac{b+1}{0}$$

Para que el límite no sea infinito, $\boxed{b=-1}$

Empezando de nuevo:

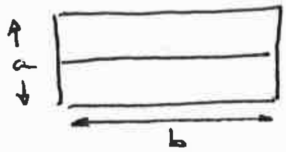
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \mathrm{sen}\,x}{x^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\cos x} - x\,\mathrm{sen}\,x - \cancel{\cos x}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\,\mathrm{sen}\,x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\mathrm{sen}\,x}{3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{3} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

JUL 15
fase Específica

Maximizar $A = b\cdot a$

Siendo $480 = 3b + 2a \rightarrow b = \frac{480-2a}{3}$



$A = \frac{480-2a}{3}\cdot a = 160a - \frac{2a^2}{3}$

$A' = 160 - \frac{4a}{3}$

$A' = 0 \Rightarrow 160 = \frac{4a}{3}$; $a = 120$

	0		120		240
A'		+		−	
A		↗		↘	
			MAX		

Área máxima para $a = 120\,m \longrightarrow A_{MAX} = 160\cdot 120 - \frac{2\cdot 120^2}{3} = \boxed{9600\ m^2}$

JUL 15
fase Específica

$f(x) = x + xe^{-x} \longrightarrow f'(x) = 1 + e^{-x} + xe^{-x}\cdot(-1) = (1-x)e^{-x} + 1$

$x - y + 3 = 0$; $y = x + 3$; $m = 1$

$f'(x) = 1 \Rightarrow (1-x)e^{-x} + \cancel{1} = \cancel{1}$; $(1-x)e^{-x} = 0$ $\rightarrow x = 1$; $\rightarrow e^{-x} = 0$ Absurdo.

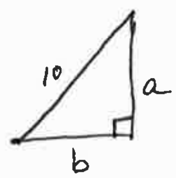
$x = 1 \rightarrow y = 1 + 1e^{-1} = 1 + e^{-1}$; $\rightarrow y' = 1$

Recta Tangente: $y - (1 + e^{-1}) = 1\cdot x$; $\boxed{y = x + 1 + e^{-1}}$

JUL 15
fase General

Maximizar $P = a + b + 10$

Siendo $a^2 + b^2 = 100 \rightarrow b = \sqrt{100 - a^2}$



$P = a + \sqrt{100-a^2} + 10 \qquad a \in [0, 10]$

$P' = 1 + \frac{-2a}{2\sqrt{100-a^2}} = 1 - \frac{a}{\sqrt{100-a^2}}$

$P' = 0 \Rightarrow 1 = \frac{a}{\sqrt{100-a^2}}$; $\sqrt{100-a^2} = a$; $100 - a^2 = a^2$;

$100 = 2a^2$; $a^2 = 50$; $a = \begin{cases} \sqrt{50} \\ \cancel{-\sqrt{50}} \end{cases}$

	0		$\sqrt{50}$		10
P'		+		−	
P		↗		↘	
			MAX		

Máximo perímetro para $\boxed{a = \sqrt{50}}$ $\longrightarrow$ $b = \sqrt{100 - (\sqrt{50})^2} = \boxed{\sqrt{50}}$

Será un Triángulo Isósceles y Rectángulo.

JUL 15
fase General

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \frac{0-0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} =$$

$$= \frac{1-1}{0+0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + \operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{-1+0}{1+1-0} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

JUN 16
fase General

a) $f(x) = \dfrac{bx}{x-a}$

Asíntota vertical $x = 2 \Rightarrow \lim_{x \to 2} \dfrac{bx}{x-a} = \dfrac{2b}{2-a} = \infty \Rightarrow \boxed{a=2}$

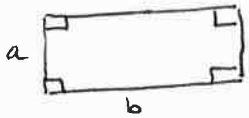
Asíntota horizontal $y = 3 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \dfrac{bx}{x-a} = 3 \Rightarrow \dfrac{b}{1} = 3$; $\boxed{b=3}$

b) $f'(x) = \dfrac{b(x-a) - bx}{(x-a)^2} = \dfrac{-ab}{(x-a)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{-ab}{(x-a)^2} = 0$; $-ab = 0$ Absurdo porque $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Por lo tanto $f(x)$ no tiene extremos relativos para ningún $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $b \in \mathbb{R} - \{0\}$

JUN 16
fase General



$2a + 2b = 2 \longrightarrow b = 1 - a$

Área $= ab$ $\longrightarrow$ $A = a(1-a) = a - a^2$, $(a \geq 0)$

$A' = 1 - 2a$

$A' = 0 \longrightarrow a = 1/2$

	0		1/2	
A'		+		−
A		↗		↘
			MAX	

Área máxima para $a = \frac{1}{2} \longrightarrow b = \frac{1}{2}$. [Se trata en realidad de un cuadrado]

Área máxima $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\, m^2 = \frac{100}{4}\, dm^2 = \boxed{25\, dm^2} \longrightarrow \boxed{\text{Premio} = 25\text{ €}}$

JUN 16
fase Específica

$y = x - x \ln x \longrightarrow y' = 1 - 1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x} = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$ $\longrightarrow$ $-\ln x = -1$; $x = e$

$x + y + 2 = 0 \longrightarrow y = -x - 2 \longrightarrow$ pendiente $= -1$

$x = e \longrightarrow y = e - e \ln e = e - e = 0$

$ \longrightarrow y' = -\ln e = -1$

$y - 0 = -1(x - e)$; $\boxed{y = e - x}$ Recta Tangente

JUN 16
fase General

$P(1,0) \longrightarrow (1-a)^2 + (-b)^2 = R^2$
$Q(0,1) \longrightarrow (-a)^2 + (1-b)^2 = R^2$

$1 - 2a + a^2 + b^2 = R^2$
$-\ a^2 + 1 - 2b + b^2 = R^2$
$-2a + 2b = 0 \Rightarrow b = a$

$R^2 = 1 - 2a + a^2 + a^2$; $R = \sqrt{2a^2 - 2a + 1}$

$R' = \dfrac{4a - 2}{2\sqrt{2a^2 - 2a + 1}} = \dfrac{2a - 1}{\sqrt{2a^2 - 2a + 1}}$

$R' = 0 \longrightarrow \dfrac{2a-1}{\sqrt{2a^2 - 2a + 1}} = 0$; $2a - 1 = 0$; $a = 1/2 \longrightarrow b = 1/2$

	0		1/2	
R'		−		+
R		↘		↗
			MIN	

$\boxed{C(1/2, 1/2)}$

JUL16 fase General

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)=\frac{1}{1-1}-\frac{m}{0}=\frac{1}{0}-\frac{m}{0}=\infty-\infty=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-m(e^x-1)}{2x(e^x-1)}=\frac{0-m(1-1)}{0(1-1)}=\frac{0}{0}=$$

L'hôpital

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-me^x}{2(e^x-1)+2x\cdot e^x}=\frac{2-m\cdot 1}{2(1-1)+0\cdot 1}=\frac{2-m}{0}=(*)$$

Para que no resulte ∞, debe ser $\boxed{m=2}$

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{2-2e^x}{2(e^x-1)+2xe^x}=\frac{0}{0}=$$ L'hôpital

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2e^x}{2e^x+2e^x+2xe^x}=\frac{-2\cdot 1}{2\cdot 1+2\cdot 1+2\cdot 0\cdot 1}=\frac{-2}{4}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

JUL16 fase General

Cuadrado de lado b y b: $\boxed{A=b^2}$ Rectángulo de lados $2a$ y a: $\boxed{A=2a^2}$

$$4b+6a=340\longrightarrow b=\frac{340-6a}{4}=\frac{170-3a}{2}$$

Suma de Areas $= b^2+2a^2=$

$$=\frac{(170-3a)^2}{4}+2a^2=\frac{28900-1020a+9a^2}{4}+2a^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left(17a^2-1020a+28900\right)$$

$$S'=\frac{1}{4}(34a-1020)$$

$$S'=0\Rightarrow a=\frac{1020}{34}=30$$

	0	30	
S'	$-$	$+$	
S	$\searrow$	$\nearrow$	
		MIN	

Suma mínima de Areas para $a=30$ cm $\longrightarrow b=\frac{170-3\cdot 30}{2}=40$ cm

Será un $\boxed{\text{cuadrado de 40 cm de lado}}$ y un $\boxed{\text{rectángulo 30 cm x 60 cm}}$

JUL16 fase Específica

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{3x^2}=\frac{\frac{1}{1}-1}{3\cdot 0}=\frac{0}{0}=$$ L'hôpital

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\sin x}{6x}=\frac{\frac{-0}{1}+0}{0}=\frac{0}{0}=$$ L'hôpital

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x\cos^2 x-\sin x\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4 x}+\cos x}{6}=$$

$$=\frac{\frac{1+0}{1}+1}{6}=\frac{1+1}{6}=\frac{2}{6}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

También:

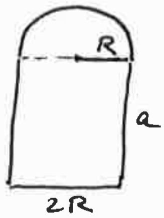
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec x-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2\cos x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x\cdot(-\sin x)}{6x\cos x+3x^2(-\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{6x\cos x-3x^2\sin x}=\frac{0}{0}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x \cos x + 2\operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{6\cos x + 6x\cdot(-\operatorname{sen} x) - 6x\operatorname{sen} x - 3x^2\cos x} = \frac{2+0}{6+0-0-0} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$ ✓

JUL 16 fase Específica

$$18 = \frac{\cancel{2}\pi R}{\cancel{2}} + 2a + 2R$$



$$a = \frac{18 - \pi R - 2R}{2}$$

$$\text{Area} = \frac{\pi R^2}{2} + 2aR =$$

$$= \frac{\pi R^2}{2} + \cancel{2}\,\frac{18-\pi R-2R}{\cancel{2}}\cdot R = \frac{\pi R^2}{2} + 18R - \pi R^2 - 2R^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi R^2 + 36R - 2\pi R^2 - 4R^2\right) = \frac{1}{2}\left(36R - \pi R^2 - 4R^2\right)$$

$$A' = \frac{1}{2}\left(36 - 2\pi R - 8R\right)$$

$$A' = 0 \Rightarrow 36 - 2\pi R - 8R = 0$$

$$18 = \pi R + 4R \;;\quad R = \frac{18}{\pi+4}$$

	0		$18/\pi+4$	
A'		$+$		$-$
A		$\nearrow$	MAX	$\searrow$

$$\boxed{\text{Radio} = \frac{18}{\pi+4}}$$

Modelo 17 (Ver el de Julio 2012 fase Específica)