EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

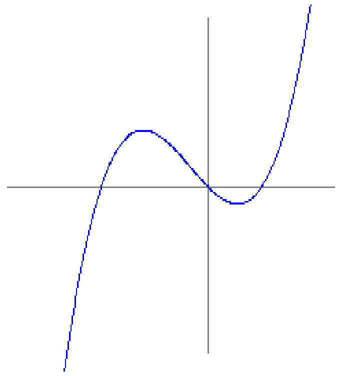
1. Estudia el dominio y las discontinuidades de la función: $f(x)=\begin{cases} 1 & Si\ x\le -1 \\ \dfrac{3x}{1-4x^2} & Si\ -1<x<0 \\ x^2+3x & Si\ x\ge 0 \end{cases}$

2. Estudia las discontinuidades de la función: $f(x)=\dfrac{x}{1-e^x}$

3. Razona si la siguiente frase es verdadera o falsa poniendo un ejemplo si fuese necesario:
   Que la derivada de una función $f(x)$ en $x = 2$ sea 5, implica que **necesariamente** la función sea continua en $x = 2$

4. Deriva y simplifica: $y = arctg\dfrac{x}{1-x}$

5. La figura muestra la gráfica de $f(x)$. Represента la gráfica de $f'(x)$



6. Halla: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$

(Contesta 3 de las siguientes preguntas. Cada una puntuará 2 puntos sobre el total de 10 del examen)

7. Estudia la derivabilidad de la función: $f(x)=x^2-2|x|+1$ en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

8. Con 150 cm^2 de chapa se desea construir una lata de conservas en forma de cilindro circular recto. Determina la generatriz y el radio para que el volumen sea máximo.

9. Hay dos puntos en la curva representada por la ecuación $x^2+y^2-xy+5y+2x=8$ en los cuales la recta tangente forma un ángulo de $+\dfrac{\pi}{4}$ radianes con relación al semieje X^+. Halle la ecuación de la recta que une estos dos puntos.

10. Estudia gráficamente la función $y=\dfrac{(x-3)^2}{x^2}$

① $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\le -1\\ \dfrac{3x}{1-4x^2} & \text{si } -1<x<0\\ x^2+3x & \text{si } x\ge 0\end{cases}$

• El 1er y 3er trozo no tienen problemas de discontinuidad por tratarse de expresiones constante y polinómica respectivamente.
El 2º trozo no será continuo allá donde se anule el denominador:

$1-4x^2=0$; $4x^2=1$; $x^2=\frac{1}{4}$; $x=\begin{cases}-1/2\\ \cancel{1/2}\end{cases}$ No pertenece al 2º trozo.

Por lo tanto: $\boxed{\text{dom} f=\mathbb{R}-\{-1/2\}}$

• Veamos la discontinuidad en $x=-1/2$:

$$\lim_{x\to -1/2}\frac{3x}{1-4x^2}=\frac{-3/2}{0}=\infty \longrightarrow \boxed{\text{Discontinuidad de salto infinito en } x=-1/2}$$

• Veamos ahora posibles discontinuidades en $x=-1$, $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to -1^-} f(x)=1\\ f(-1)=1\\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=\dfrac{3\cdot(-1)}{1-4(-1)^2}=\dfrac{-3}{1-4}=1\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f \text{ es continua en } x=-1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{3\cdot 0}{1-4\cdot 0^2}=0\\ f(0)=0^2+3\cdot 0=0\\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=0^2+3\cdot 0=0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f \text{ es continua en } x=0}$$

② $f(x)=\dfrac{x}{1-e^x}$

$1-e^x=0$; $e^x=1$; $x=0$ $\boxed{\text{dom} f=\mathbb{R}-\{0\}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-e^x}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{-e^x}=\frac{1}{-1}=-1$$

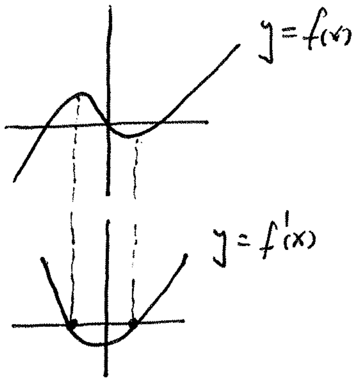
$\boxed{f \text{ tiene una discontinuidad evitable en } x=0}$

③ Es verdadera. La derivabilidad necesita necesariamente de la continuidad.

④ $y=\text{arctg}\,\dfrac{x}{1-x}$

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1-x+x}{\left[1+\frac{x^2}{(1-x)^2}\right]\cdot(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2+x^2}=\boxed{\frac{1}{2x^2-2x+1}}$$

(5)



(6) $$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg x} = \infty^0 = e^{\lim_{x\to0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right)^{tg x}} = e^{\lim_{x\to0^+} tg x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to0^+}(-tg x\cdot \ln x)} =$$

$$= e^{-0\cdot\infty} = e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/tg x}} = e^{\frac{-\infty}{+\infty}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{\frac{-1/\cos^2 x}{tg^2 x}}} = e^{\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/sen^2 x}} = e^{\lim_{x\to0^+}\frac{-sen^2 x}{x}} =$$

$$= e^{\frac{0}{0}} = e^{\lim_{x\to0^+}\frac{-2 sen x\cdot\cos x}{1}} = e^0 = \boxed{1}$$

(7) $$f(x) = x^2 - 2|x| + 1 = \begin{cases} x^2+2x+1 & si\ x<0 \\ 1 & si\ x=0 \\ x^2-2x+1 & si\ x\geq 0\end{cases}$$

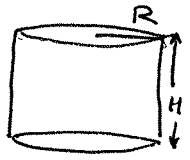
$$\lim_{h\to0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0^-}\frac{h^2+2h+\cancel{1}-\cancel{1}}{h} = \lim_{h\to0^-}\frac{h^2+2h}{h} = \lim_{h\to0^+}(h+2) = 2$$

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{h^2-2h+\cancel{1}-\cancel{1}}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{h^2-2h}{h} = \lim_{h\to0^+}(h-2) = -2$$

No es derivable en $x=0$. Tiene un punto anguloso

(8) Maximizar : $V = \pi R^2 H$

Siendo : $150 = 2\pi R^2 + 2\pi R H$

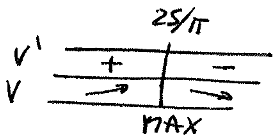


$$H = \frac{150-2\pi R^2}{2\pi R}$$

$$V = \cancel{\pi} R^{\cancel{2}}\,\frac{150-2\pi R^2}{2\cancel{\pi}\cancel{R}} = 75R - \pi R^3$$

$$\frac{dV}{dR} = 75 - 3\pi R^2$$

$$\frac{dV}{dR} = 0 \longrightarrow 75 - 3\pi R^2 = 0\ ;\ R = \frac{25}{\pi}$$



Maximo volumen para $\boxed{R = \frac{25}{\pi}\ cm} \longrightarrow H = \frac{150-2\pi\left(\frac{25}{\pi}\right)^2}{2\cancel{\pi}\cdot\frac{25}{\cancel{\pi}}} = \frac{150-\frac{1250}{\pi}}{25} =$

$$= \boxed{6 - \frac{50}{\pi}\ cm}$$

9

$x^2+y^2-xy+5y+2x=11$

$2x+2yy'-y-xy'+5y'+2=0$; $y'=\frac{y-2x-2}{2y-x+5}$

$\alpha=\pi/4 \Rightarrow m=\operatorname{tg}\pi/4=1 \longrightarrow 1=\frac{y-2x-2}{2y-x+5}$; $2y-x+5=y-2x-2$;

$y=-x-7$

$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-xy+5y+2x=11 \\ y=-x-7 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x^2+(-x-7)^2-x\cdot(-x-7)+5(-x-7)+2x=11 \\ x^2+x^2-14x+49+x^2+7x-5x-35+2x-11=0 \\ 3x^2-10x+3=0 \\ x=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{6}=\frac{10\pm 8}{6}=\begin{cases} 3 \longrightarrow y=-3-7=-10 \\ -1/3 \longrightarrow y=-\frac{1}{3}-7=-\frac{22}{3} \end{cases} \end{array}$

$A(3,-10)$

$B(-1/3,-22/3)$ | $\vec{AB}=\left(-\frac{1}{3}-3,-\frac{22}{3}+10\right)=\left(-\frac{10}{3},\frac{8}{3}\right) \longrightarrow m=\frac{8/3}{-10/3}=-\frac{8}{10}=-0'8$

$\boxed{y+10=-0'8(x-3)}$

10

$y=\frac{(x-3)^2}{x^2}$ dominio $=\mathbb{R}-\{0\}$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{(x-3)^2}{x^2}=\frac{9}{+0}=+\infty$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x-3)^2}{x^2}=\frac{9}{-0}=+\infty$ | Asíntota vertical $x=0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+9}{x^2}=1 \longrightarrow$ Asíntota horizontal $y=1$

$y'=\frac{2(x-3)\cdot\cancel{x^2}-(x-3)^2\cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}}=\frac{2\cancel{x^2}-6x-2\cancel{x^2}+12x-18}{x^3}=\frac{6x-18}{x^3}$

$y'=0 \Rightarrow \frac{6x-18}{x^3}=0$; $6x-18=0$; $x=3$

		0		3	
y'	+		−		+
y	↗		↘	MIN	↗

$y''=\frac{6\cdot x^{\cancel{3}}-(6x-18)\cdot 3\cancel{x^2}}{x^{\cancel{6}\,4}}=\frac{6x-18x+54}{x^4}=\frac{54-12x}{x^4}$

$y''=0 \Rightarrow \frac{54-12x}{x^4}=0$; $54-12x=0$; $x=\frac{9}{2}$

		0		9/2	
y''	+		+		−
y	Cónc.		Cóncava	INF	Convexa

x	y
3	0
9/2	1/9