Ejercicios resueltos

1. La temperatura que ha marcado un termómetro en los diferentes días de la semana, ha sido (en grados centígrados) los que pueden verse en la tabla.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Mínima	4	–2	–3	1	4	0	3
Máxima	19	18	21	13	12	14	22

a) Calcula la temperatura media mínima.
b) Calcula la temperatura media máxima.

Solución.-

a) $\bar{x}_{mínima} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \dfrac{4+(-2)+(-3)+1+4+0+3}{7} = \dfrac{7}{7} = 1$ grado centígrado.

b) $\bar{x}_{máxima} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \dfrac{19+18+21+13+12+14+22}{7} = \dfrac{119}{7} = 17$ grados centígrados.

2. Dada la distribución estadística siguiente: 3, 2, 5, 7, 6, 4, 2, 1, 9, 5, 7, 6, 4. Calcula la media aritmética, la moda, la mediana y los cuartiles.

Solución.-

Ordenemos los 13 datos de forma creciente: 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 9. Tenemos entonces:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{1+2+2+3+4+4+5+5+6+6+7+7+9}{13} = \frac{61}{13} = 4'6923$$

La distribución tiene cinco modas: $Mo = 2$, $Mo = 4$, $Mo = 5$, $Mo = 6$ y $Mo = 7$.

Mediana y cuartiles:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 9 \\ & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \downarrow & & & \\ & & & Q_1 = 3 & & & Q_2 = Me = 5 & & & Q_3 = 6 & & & \end{array}$$

3. Halla la media, la mediana, la moda y los cuartiles de la distribución cuya tabla de frecuencias es la siguiente.

x_i	3	6	7	8	10	12
n_i	6	9	7	8	17	13

Solución.-

x_i	n_i	N_i	n_ix_i
3	6	6	18
6	9	15	54
7	7	22	49
8	8	30	64
10	17	47	170
12	13	60	156
Total	**60**		**511**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{N} = \frac{511}{60} = 8'52$$

Se trata de una distribución unimodal, siendo $Mo = 10$

$N/4 = 15$; precisamente el valor $x = 6$ de la variable tiene por frecuencia absoluta acumulada 15, por lo que el primer cuartil es $Q_1 = (6 + 7)/2 = 6'5$

De forma análoga, $N/2 = 30 \Rightarrow Me = Q_2 = (8 + 10)/2 = 9$

$3N/4 = 45$ luego $Q_3 = 10$, por ser éste el primer valor de la variable cuya frecuencia absoluta acumulada, 47, es mayor que las tres cuartas partes del número total de datos.

4. Las edades de los componentes de una peña de aficionados al fútbol son:

18, 16, 21, 20, 18, 16, 21, 18, 21, 18, 20, 19, 36, 24, 18, 20, 18, 19, 20

a) Calcula la edad media, la edad moda y la edad mediana, así como los cuartiles.
b) Representa gráficamente los datos de esta distribución.

Solución.-

a) Construyamos la correspondiente tabla de frecuencias:

x_i	n_i	N_i	n_ix_i
16	2	2	32
18	6	8	108
19	2	10	38
20	4	14	80
21	3	17	63
24	1	18	24
36	1	19	36
Total	**19**		**381**

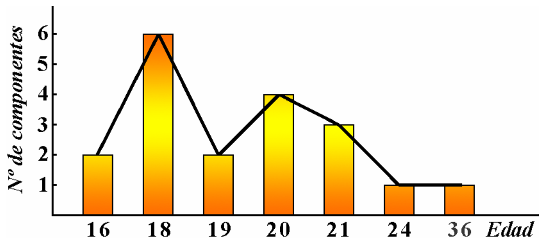
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{N} = \frac{381}{19} = 20'05 \text{ años.}$$

La edad moda es $Mo = 18$ (distribución unimodal) ya que es la edad que tienen un mayor número de componentes.

$N/2 = 9'5 \Rightarrow$ la edad mediana es $Me = Q_2 = 19$ (primer valor de la variable cuya frecuencia absoluta acumulada, 10, es mayor que la mitad del número de individuos).

$N/4 = 4'75 \Rightarrow Q_1 = 18$; $3N/4 = 14'25 \Rightarrow Q_3 = 21$

b) Representamos la distribución mediante un diagrama de barras y polígono de frecuencias:



5. Las respuestas correctas a un test de 80 preguntas realizado por 600 personas son las que se recogen a continuación.

Respuestas	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80]
Nº de personas	40	6	75	90	105	85	80	65

Calcula el número medio de respuestas correctas, la moda y la mediana. Halla los cuartiles. Interpreta gráficamente el cálculo de la moda y de la mediana, y comprueba que la mediana es el punto del eje de abscisas que divide el histograma de frecuencias absolutas en dos partes de igual área.

Solución.-

Respuestas	$_i$	n_i	N_i	n_ix_i
[0, 10)	5	40	40	200
[10, 20)	15	60	100	900
[20, 30)	25	75	175	1.875
[30, 40)	35	90	265	3.150
[40, 50)	45	105	370	4.725
[50, 60)	55	85	455	4.675
[60, 70)	65	80	535	5.200
[70, 80]	75	65	600	4.875
Total		**600**		**25.600**

Número medio de respuestas correctas: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{N} = \dfrac{25.600}{600} = 42'67$ respuestas.

El intervalo modal es [40, 50) y 45 respuestas el valor aproximado de la moda.

6. La siguiente serie de datos: 18, 21, 24, *a*, 36, 37, *b*, está ordenada y tiene de mediana 30 y de media 32. Encuentra el valor de *a* y *b*.

Solución.-

El valor central *a* es la mediana 30, por tanto, $a = Me = 30$. Como la media es 32, obtenemos así el valor de *b*:

$$\bar{x} = 32 \;\Rightarrow\; \frac{18+21+24+30+36+37+b}{7} = 32 \;\Rightarrow\; \frac{166+b}{7} = 32 \;\Rightarrow\; b = 58$$

7. Fíjate que para hallar la varianza hay que elevar al cuadrado las desviaciones respecto a la media; por ello, la varianza no se expresa en las mismas unidades que los datos. De manera que si los datos se expresan en metros, ¿en qué unidades se expresará la varianza? ¿Y la desviación típica y el coeficiente de variación?

Solución.-

Si los datos se expresan en metros, entonces la varianza se expresará en metros cuadrados.

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza, por ello, ésta vendrá expresada en metros. La media aritmética se expresa también en metros, al igual que la desviación típica, pero el coeficiente de variación no se expresa en ninguna medida.

8. En la fabricación de cierto tipo de bombillas se han detectado algunas defectuosas. Se han estudiado 200 lotes de 500 piezas cada uno, obteniéndose los datos de la tabla adjunta.

Defectuosas	1	2	3	4	5	6	7	8
Nº de lotes	5	15	38	42	49	32	17	2

Calcula los parámetros de centralización y de dispersión.

Solución.-

x_i	n_i	N_i	$n_i x_i$	$n_i \mid x_i - \overline{x} \mid$	$n_i x_i^2$
1	5	5	5	17’225	5
2	15	20	30	36’675	60
3	38	58	114	54’910	342
4	42	100	168	18’690	672
5	49	149	245	27’195	1.225
6	32	181	192	49’760	1.152
7	17	198	119	43’435	833
8	2	200	16	7’110	128
Total	**200**		**889**	**255**	**4.417**

Media: $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{N} = \dfrac{889}{200} = 4'445$ bombillas defectuosas

Moda : $Mo = 5$ bombillas defectuosas

Mediana: $N/2 = 100 \Rightarrow Me = (4 + 5)/2 = 4'5$ bombillas defectuosas

Rango: $R = 8 - 1 = 7$ bombillas defectuosas

Desviación media: $d_m = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i \mid x_i - \overline{x} \mid}{N} = \dfrac{255}{200} = 1'275$ bombillas defectuosas

Varianza: $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{N} - \overline{x}^2 = \dfrac{4.417}{200} - 4'445^2 = 2'326975$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2'326975} = 1'5254$ bombillas defectuosas

Coeficiente de variación: $C_{var} = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} = \dfrac{1'5254}{4'445} \cdot 100 = 34'32\ \%$

13. En un hospital se quiere estimar el peso de los niños recién nacidos. Para ello se seleccionan, de forma aleatoria, 100 de éstos, obteniéndose los siguientes resultados.

Peso **(kg)**	[1, 1’5)	[1’5, 2)	[2, 2’5)	[2’5, 3)	[3, 3’5)	[3’5, 4)	[4, 4’5)	[4’5, 5]
Nº de niños	1	2	5	20	40	26	5	1

a) Calcula los pesos medio, mediano y moda de la distribución anterior.
b) Determina el rango, la desviación media y la desviación típica de la variable.

Solución.-

Peso **(kg)**	x_i	n_i	N_i	n_ix_i	$n_i \mid x_i - \bar{x} \mid$	$n_i x_i^2$
[1, 1’5)	1’25	1	1	1’25	1’995	1’5625
[1’5, 2)	1’75	2	3	3’50	2’990	6’1250
[2, 2’5)	2’25	5	8	11’25	4’975	25’3125
[2’5, 3)	2’75	20	28	55’00	9’900	151’2500
[3, 3’5)	3’25	40	68	130’00	0’200	422’5000
[3’5, 4)	3’75	26	94	97’50	13’130	365’6250
[4, 4’5)	4’25	5	99	21’25	5’025	90’3125
[4’5, 5]	4’75	1	100	4’75	1’505	22’5625
	Total	**100**		**324’50**	**39’720**	**1.085’2500**

a) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{N} = \dfrac{324'5}{100} = 3'245$ kg.

$N/2 = 50 \Rightarrow$ [3, 3’5) es el intervalo mediano, siendo 3’25 el peso mediano aproximado. El valor exacto del peso mediano es:

$$Me = e_i + \frac{\frac{N}{2} - N_{Me-1}}{n_{Me}} \cdot a = 3 + \frac{\frac{100}{2} - 28}{40} \cdot 0'5 = 3 + \frac{11}{40} = 3'275 \text{ kg.}$$

[3, 3’5) es también el intervalo modal, y 3’25 el valor aproximado de la moda. Su valor exacto es:

$$Mo = e_i + \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{(n_{Mo} - n_{Mo-1}) + (n_{Mo} - n_{Mo+1})} \cdot a = 3 + \frac{40-20}{(40-20)+(40-26)} \cdot 0'5 = 3 + \frac{10}{34} = 3'294 \text{ kg.}$$

b) $R = 5 - 1 = 4$ kg.

$$d_m = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \mid x_i - \bar{x} \mid}{N} = \frac{39'72}{100} = 0'3972 \text{ kg.}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{1.085'25}{100} - 3'245^2 = 0{,}322475 \;\Rightarrow\; \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0'322475} = 0'5679 \text{ kg.}$$