<u>Integración por descomposición en fracciones racionales</u>

8. Calcula, descomponiendo el integrando, las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x - x^2 + 3x^3}{x^4} dx$ b) $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 5}{4x^3} dx$ c) $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x}} dx$

d) $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$ e) $\int \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 + 1} \right) dx$ f) $\int \frac{x^3 - 1}{x + 3} dx$

<u>Solución</u>:

a) Se escribe el integrando como se indica:

$$\int \frac{2x - x^2 + 3x^3}{x^4} dx = \int \left(\frac{2x}{x^4} - \frac{x^2}{x^4} + \frac{3x^3}{x^4} \right) dx = \int \left(2x^{-3} - x^{-2} + \frac{3}{x} \right) dx = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3 \ln x + c$$

b) Dividiendo: $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 5}{4x^3} dx = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4x} + \frac{5}{4x^3} \right) dx = \frac{1}{4} x - \frac{3}{4} \ln x - \frac{5}{8x^2} + c$

c) Operando se tiene:

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x}} dx = \int \left(x^{5/2} + 5x^{3/2} - 3x^{1/2} + 2x^{-1/2} \right) dx =$$

$$= \frac{2}{7} x^{7/2} + 5 \frac{2}{5} x^{5/2} - 3 \frac{2}{3} x^{3/2} + 2 \cdot 2x^{1/2} + c = \left(\frac{2}{7} x^3 + 2x^2 - 2x + 4 \right) x^{1/2} + c$$

d) $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx = \int \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx = \int \left(x^{-1/4} - x^{-5/12} \right) dx = \frac{4}{3} x^{3/4} - \frac{12}{7} x^{7/12} + c$

e) $\int \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 + 1} \right) dx = \int \left(\frac{4x^2 + 1}{4x^2 + 1} - \frac{4x}{4x^2 + 1} \right) dx = \int \left(1 - \frac{4x}{4x^2 + 1} \right) dx = x - \frac{1}{2} \ln(4x^2 + 1) + c$

f) Dividiendo el integrando (puede hacerse por Ruffini), se tiene:

$$\int \frac{x^3 - 1}{x + 3} dx = \int \left(x^2 - 3x + 9 - \frac{28}{x + 3} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} x^2 + 9x - 28 \ln(x + 3) + c$$

9. a) Comprueba que $\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^3 + x}$. b) Calcula la integral indefinida: $\int \frac{1}{x^3 + x} dx$.

<u>Solución</u>:

a) Efectivamente: $\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} - \frac{x^2}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x^3 + x}$.

b) Por lo visto:

$$\int \frac{1}{x^3 + x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c$$

05989

10. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2-3x+5x^2}{2x}dx$ b) $\int \frac{(x-3)^2}{4x}dx$ c) $\int \frac{2x^3-3x^2+5}{x^2}dx$

d) $\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x}dx$ e) $\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x+1}dx$ f) $\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x^2+1}dx$

<u>Solución</u>:

a) $\int \frac{2-3x+5x^2}{2x}dx = \int \left(\frac{1}{x}-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}x\right)dx = \ln x - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}x^2 + c$

b) $\int \frac{(x-3)^2}{4x}dx = \int \frac{x^2-6x+9}{4x}dx = \int \frac{1}{4}xdx - \int \frac{3}{2}dx + \int \frac{9}{4x}dx = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\ln x + c$

c) $\int \frac{2x^3-3x^2+5}{x^2}dx = \int \left(2x-3+\frac{5}{x^2}\right)dx = x^2-3x-\frac{5}{x}+c$

d) $\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x}dx = \int \left(3x^2-x+4-\frac{5}{x}\right)dx = x^3-\frac{1}{2}x^2+4x-5\ln x + c$

e) $\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x+1}dx = \int \left(3x^2-4x+8-\frac{13}{x+1}\right)dx = x^3-2x^2+8x-13\ln(x+1)+c$

Se ha dividido: $\frac{3x^3-x^2+4x-5}{x+1} = 3x^2-4x+8-\frac{13}{x+1}$

f) $\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x^2+1}dx = \int \left(3x-1+\frac{x-4}{x^2+1}\right)dx = \frac{3}{2}x^2 - x + \int \frac{x-4}{x^2+1}dx =$

$= \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - 4\arctan x + c$

Se ha dividido: $\frac{3x^3-x^2+4x-5}{x^2+1} = 3x-1+\frac{x-4}{x^2+1}$

La integral: $\int \frac{x-4}{x^2+1}dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx - \int \frac{4}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - 4\arctan x$

11. Calcula la integrales:

a) $\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx$ b) $\int \frac{2dx}{x^2-4}$ c) $\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx$ d) $\int \frac{1}{2x^2+2x-12}dx$

<u>Solución</u>:

Todas pueden hacerse por el método de descomposición en fracciones simples.

a) $\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx$.

Como las raíces del denominador son $x = 1$ y $x = -2$: $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$, se tiene la igualdad:

$$\frac{x+8}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Luego:

$$x+8=A(x+2)+B(x-1)$$

si $x = 1$: $9 = 3A \Rightarrow A = 3$

si $x = -2$: $6 = -3B \Rightarrow B = -2$

Con esto:

$$\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx = \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{-2}{x+2}dx = 3\ln(x-1) - 2\ln(x+2) + c$$

b) $\int \frac{2dx}{x^2-4}$.

Como:

$$\frac{2}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = A(x+2)+B(x-2) \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B=2 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \text{ y } B = -\frac{1}{2}$$

Luego,

$$\int \frac{2dx}{x^2-4} = \int \left(\frac{1/2}{x-2} - \frac{1/2}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2}\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(x+2) + c$$

c) $\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx$

La ecuación $x^2-2x-3=0$ tiene soluciones reales: $x = -1$ y $x = 3$.

Por tanto:

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \Rightarrow \frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A(x-3)+B(x+1) \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -3A+B=1 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{4};\ B = \frac{1}{4}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx = \int \left(\frac{-1/4}{x+1} + \frac{1/4}{x-3} \right) dx = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-3}dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln(x-3) + c$$

d) $\int \frac{1}{2x^2+2x-12}dx$

El denominador: $2x^2+2x-12 = 2(x-2)(x+3)$.

La descomposición que se hace es:

$$\frac{1}{2x^2+2x-12} = \frac{A}{2(x-2)} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+2B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

Luego:

$$1 = A(x+3)+2B(x-2)$$

si $x = 2$: $1 = 5A \Rightarrow A = 1/5$

si $x = -3$: $1 = -10B \Rightarrow B = -1/10$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{2x^2+2x-12}dx = \int \left(\frac{1/5}{2(x-2)} - \frac{1/10}{x+3} \right) dx = \frac{1}{10}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{1}{10}\int \frac{1}{x+3}dx =$$

$$= \frac{1}{10}\ln(x-2) - \frac{1}{10}\ln(x+3) + c$$

05989

12. Calcula las integrales:

a) $\int \frac{1}{x^2-1}dx$ b) $\int \frac{x}{x^2-1}dx$ c) $\int \frac{x^2}{x^2-1}dx$ d) $\int \frac{x^3}{x^2-1}dx$

Solución:

a) $\int \frac{1}{x^2-1}dx \ \rightarrow$ Hay que descomponer la función dada en fracciones simples.

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$

Luego:

$$1 = A(x+1) + B(x-1) \ \Rightarrow \ 1 = (A+B)x + A - B$$

Identificando coeficientes:

$$\begin{cases} 0 = A+B \\ 1 = A-B \end{cases} \Rightarrow \ A = \frac{1}{2}; \ B = -\frac{1}{2}$$

Con esto:

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \int \frac{1/2}{x-1}dx - \int \frac{1/2}{x+1}dx \ = \ \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + c$$

b) Es inmediata: $\int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right) + c$

c) Se transforma el integrando como sigue:

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}dx = \int \frac{x^2-1+1}{x^2-1}dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)dx = x + \int \frac{1}{x^2-1}dx =$$

= (la última integral se ha hecho más arriba) = $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + c$

d) Es inmediata si se transforma el integrando como sigue:

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}dx = \int \left(x + \frac{x}{x^2-1}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right) + c$$

13. Halla:

a) $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+1}dx$ b) $\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}dx$ c) $\int \frac{3}{x^2-4x+5}dx$ d) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx$

Solución:

a) El denominador tiene una raíz real doble: $x^2+2x+1 = \left(x+1\right)^2$.

Por tanto, se hace la descomposición:

$$\frac{3x+1}{x^2+2x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \ \Rightarrow A = 3; \ B = -2$$

Luego,

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+1}dx \ = \ \int \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}\right)dx = 3\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + c$$

b) $\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}dx$

Como el denominador $x^2-2x+1=(x-1)^2$, se hace la descomposición:

$$\frac{x+2}{x^2-2x+1}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A+B(x-1)}{(x-1)^2}$$

Luego:

$$x+2=A+B(x-1)$$

Si x = 1: 3 = $A \Rightarrow A$ = 3; si x = 0: 2 = $A - B \Rightarrow B$ = 1

Con esto:

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}dx=\int \frac{3}{(x-1)^2}dx+\int \frac{1}{x-1}dx=\frac{-3}{x-1}+\ln(x-1)+c$$

En los casos que siguen el denominador no tiene raíces reales.

c) $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$.

Se puede escribir: $\frac{3}{x^2-4x+5}=\frac{3}{(x-2)^2+1} \Rightarrow$

$$\int \frac{3}{x^2-4x+5}dx=\int \frac{3}{(x-2)^2+1}dx=3\arctan(x-2)+c$$

d) $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$.

Por tanto:

$$\frac{2x+1}{x^2+2x+2}=\frac{2x+2-1}{x^2+2x+2}=\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{x^2+2x+2}=\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{(x+1)^2+1} \Rightarrow$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx-\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx=\ln(x^2+2x+2)-\arctan(x+1)+c$$

14. Propuestas en UNED. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}dx$ b) $\int \frac{2x^2+1}{x^3+x}dx$ c) $\int \frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1}dx$.

Solución:

a) $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}dx$.

Como $x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$ se hace la descomposición:

$$\frac{x^2+2x-1}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=$$

$$=\frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x^2-1)}=\frac{(A+B+C)x^2+(B-C)x-A}{x(x^2-1)}$$

Igualando los numeradores primero y último se obtiene el sistema: $\begin{cases} A+B+C=1 \\ B-C=2 \\ -A=-1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 1; B = 1, C = -1.$

Por tanto,

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \ln x + \ln(x-1) - \ln(x+1) + c$$

b) $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x^3+x}dx$.

El denominador $x^3+x = x\left(x^2+1\right) \to$ El segundo factor no tiene raíces reales.

Con esto: $\displaystyle\frac{2x^2+1}{x^3+x} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A\left(x^2+1\right)+x(Bx+C)}{x\left(x^2+1\right)} \Rightarrow A = 1; B = 1; C = 0.$

Luego:

$$\int \frac{2x^2+1}{x^3+x}dx = \int\frac{1}{x}dx + \int\frac{x}{x^2+1}dx = \ln x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + c$$

c) $\displaystyle\int \frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1}dx$.

Como $x^3-x^2+x-1 = (x-1)\left(x^2+1\right)$ se hace la descomposición:

$$\frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2+(-B+C)x+A-C}{(x-1)(x+1)^2} \Rightarrow A = 1; B = -2; C = 0.$$

Luego: $\displaystyle\int \frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1}dx = \int\frac{1}{x-1}dx - \int\frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(x-1) - \ln\left(x^2+1\right) + c$