Método de integración por partes

15. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x\cos x dx$ b) $\int xe^{2x}dx$ c) $\int x^2\cdot e^{3x}dx$ d) $\int 2x^3e^{x^2}dx$

e) $\int (x\ln x)dx$ f) $\int \arcsin x dx$ g) $\int x^2\sin(2x)dx$ h) $\int x^3\cos x dx$

Solución:

Todas pueden resolverse aplicando el método de integración por partes.

a) $\int x\cos x dx$

Se toma: $x = u$ y $dv = \cos x dx \Rightarrow du = dx$ y $v = \sin x$

Luego,

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x\ d \ = x\sin x + \cos x + c$$

b) $\int xe^{2x}dx$

Tomando: $u = x \Rightarrow du = dx$; $e^{2x}dx = dv \Rightarrow \int e^{2x}dx = \int dv \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$

Luego:

$$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

c) $\int x^2\cdot e^{3x}dx$.

Tomando: $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$; $dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}$

Se tiene: $\int x^2e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx$

La segunda integral, $\int xe^{3x}dx$, también se hace por partes.

Tomando ahora: $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}$

Se tiene: $\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}$

Por tanto:

$$\int x^2e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right) + c =$$

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c$$

d) $\int 2x^3 e^{x^2} dx$.

Haciendo $u = x^2$ y $dv = 2xe^{x^2} dx$ se tiene:

$$\int 2x^3 e^{x^2} dx = x^2 e^{x^2} - \int 2xe^{x^2} dx = x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + c$$

e) $\int (x \ln x) dx$.

Tomando: $u = x \ln x \Rightarrow du = (\ln x + 1) dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego, $\int (x \ln x) dx = x^2 \ln x - \int (x \ln x + x) dx = x^2 \ln x - \int (x \ln x) dx + \int x dx$

En el segundo miembro aparece la misma integral, que se traspone al primer miembro, obteniéndose,

$$2\int (x \ln x) dx = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + c$$

De donde, $\int (x \ln x) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + c$

f) $\int \arcsin x dx$

Se toma: $u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego, $\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$

g) $\int x^2 \sin(2x) dx$

Haciendo: $x^2 = u$, $\sin 2x dx = dv \Rightarrow 2x dx = du$; $v = -\frac{1}{2} \cos 2x$

Luego, $\int x^2 \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int x \cos 2x dx$

Para hacer la segunda integral se aplica nuevamente el método de partes.

$$\int x \cos 2x dx$$

Tomando: $x = u$; $dv = \cos 2x dx \Rightarrow dx = du$; $v = \frac{1}{2} \sin 2x$

Luego, $\int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x$

Por tanto: $\int x^2 \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$

h) $\int x^3 \cos x dx$.

Se hace: $u = x^3$; $dv = \cos x dx \Rightarrow du = 3x^2 dx$; $v = \sin x$

Luego:

$$\int x^3 \cos x dx \;=\; x^3 \sin x - \int 3x^2 \sin\; x\; dx$$

Segunda integral: $\int 3x^2 \sin\; x\; dx = -3x^2 \cos x + \int 6x \cos x dx$

(Se ha hecho: $3x^3 = u;\;\; \sin x dx = dv$)

Tercera integral: $\int 6x \cos x dx = 6x \sin x + 6 \cos x$

(Se hace: $6x = u;\;\; \cos x\; dx = dv$)

Luego:

$$\int x^3 \cos x dx = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6\cos x + c\,.$$

16. Utilizando el método de integración por partes, calcula $\int \frac{x}{e^x}\, dx$

<u>Solución</u>:

$$\int \frac{x}{e^x}\, dx = \int xe^{-x} dx$$

Se hace:

$u = x$ y $dv = e^{-x} dx \;\Rightarrow\; du = dx\,;\; v = -e^{-x}$

Luego:

$$\int xe^{-x} dx = -\,xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -\,xe^{-x} - e^{-x} + c$$

17. A partir del resultado de $\int \ln x dx$, calcula las siguientes integrales.

a) $2\int \ln x dx$ b) $\int \ln(2x) dx$ c) $\int \ln x^2 dx$ d) $\int (\ln x)^2 dx$

<u>Solución</u>:

$\int \ln x dx$ se calcula por el método de partes.

Tomando: $u = \ln x \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{x} dx\,;$ $\qquad dv = dx \;\Rightarrow\; v = x$

Luego:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

Con esto:

a) $2\int \ln x dx = 2\left(x \ln x - \int dx \right) = 2\left(x \ln x - x\right) + c$

b) $\int \ln(2x) dx = \int \left(\ln 2 + \ln x\right) dx = \int \ln 2 dx + \int \ln x dx = \left(\ln 2\right)\cdot x + x \ln x - x + c$

c) $\int \ln x^2 dx = \int 2\ln x dx \;=\; 2\int \ln x dx = 2\left(x \ln x - \int dx \right) = 2\left(x \ln x - x\right) + c$

d) $\int (\ln x)^2 dx$

Tomando: $u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = 2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$; $\quad dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego:

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x dx = x(\ln x)^2 - \int 2\ln x dx =$$

$$= x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c$$