

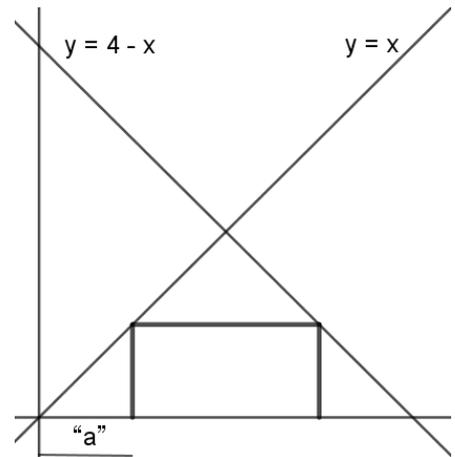
Opción A**Ejercicio 1 opción A, Colisiones Junio 2018 (modelo 2)**

Se desea construir un rectángulo, como el de la figura, de área máxima. La base está situada sobre el eje OX, un vértice está en la recta $y = x$ y el otro, en la recta $y = 4 - x$. Se pide:

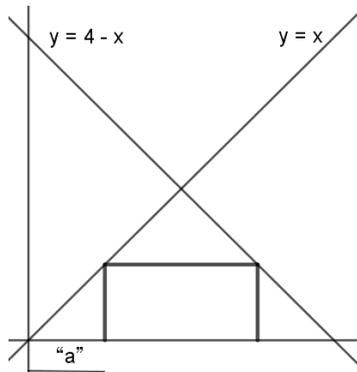
a) [0'25 puntos] Halla la altura del rectángulo en función de "a" (ver la figura).

b) [1 punto] Halla la base del rectángulo en función de "a".

c) [1'25 puntos] Encuentra el valor de "a" que hace máximo el área del rectángulo

**Solución**

Es un problema de optimización, pero antes tenemos que calcular la base y altura del rectángulo en función de "a".



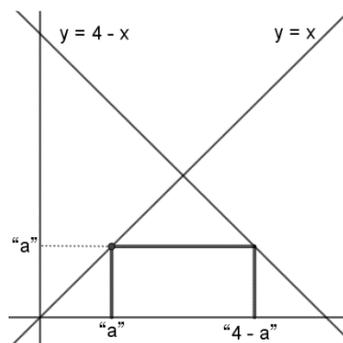
a) Halla la altura del rectángulo en función de "a" (ver la figura).

Observamos que la abscisa "a" verifica la ecuación $y = x$, por tanto $y(a) = (a) = "a"$, es decir **la altura del rectángulo es "a"**.

b) Halla la base del rectángulo en función de "a".

Observamos que la ordenada "a", es decir la altura del rectángulo, verifica la ecuación $y = 4 - x$, por tanto $(a) = 4 - x$, de donde la abscisa de la derecha es $x = 4 - a$, por tanto **la base del rectángulo es $(4 - a) - a = "4 - 2a"$** .

El dibujo sería:



c) Encuentra el valor de "a" que hace máximo el área del rectángulo

Función a maximizar Área = $A(a) = \text{Base} \times \text{altura} = (4 - 2a) \cdot a = 4a - 2a^2$.

Si $A'(b) = 0$ y $A''(b) < 0$, $x = b$ es un máximo de $A(a)$.

$A'(a) = 4 - 4a$. De $A'(a) = 0$, tenemos $4 - 4a = 0$, es decir $4 = 4a$, de donde $a = 1$.

Las medidas del rectángulo son "base" = $4 - 2(1) = 2$ y "altura" = $(1) = 1$. Su área es $2 u^2$.

Veamos que $a = 1$ es un máximo, viendo que $A''(1) < 0$. $A'(a) = 4 - 4a$; $A''(a) = -4$

Sustituyendo "1" por "a" en $A''(a)$ obtenemos $A''(1) = -4 < 0$, luego es un máximo.

El valor de "a" que hace máxima el área del rectángulo es $a = 1$.

Ejercicio 2 opción A, Colisiones Junio 2018 (modelo 2)

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{2-x}$

(a) [0'75 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

(b) [1'25 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , el eje de ordenadas y la recta $x + y = 3$.

(c) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto indicado.

Solución

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{2-x}$

(a)

Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ es " $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$ ".

$$f(x) = e^{2-x} \rightarrow f(2) = e^{2-(2)} = e^0 = 1.$$

$$f'(x) = e^{2-x} \cdot (-1) \rightarrow f'(2) = e^{2-(2)} \cdot (-1) = e^0 \cdot (-1) = -1.$$

La recta tangente pedida es $y - 1 = -1 \cdot (x - 2)$, de donde $y = -x + 3$. (Es la recta del apartado (b))

(b)

Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , el eje de ordenadas y la recta $x + y = 3$.

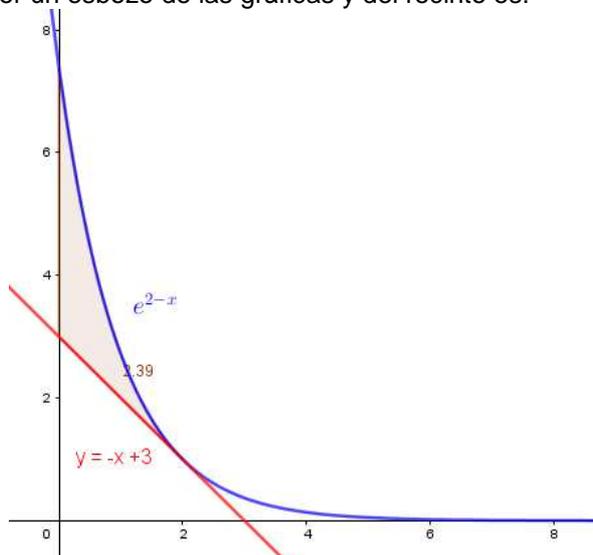
La gráfica de la recta $y = -x + 3$, se dibuja con dos puntos, uno el de tangencia (2,1) y otro el corte con el eje de ordenadas OY (ecuación $x = 0$), es decir punto (0,3).

Como $f(x) = e^{2-x} = e^2 \cdot e^{-x}$ (en azul), sabemos que su gráfica es parecida a la gráfica de e^{-x} , que es exactamente igual que la gráfica de e^x pero simétrica respecto al eje de ordenadas OY, y al estar multiplicada por e^2 , está dilatada a lo largo de dicho eje OY. En concreto si $x = 0$, $f(0) = e^2 \cdot e^0 = e^2$, la recta $y = 0$ es una

asíntota horizontal en $+\infty$, porque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^2}{e^x} = \frac{e^2}{\infty} = 0$.

Por otro lado como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2-x}) = e^{2-(-\infty)} = e^{2+\infty} = e^{+\infty} = +\infty$, vemos que en $-\infty$ la gráfica esta en $+\infty$.

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de las gráficas y del recinto es:



(c)

Calcula el área del recinto indicado.

Observando el recinto y la abscisa de tangencia tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^2 (e^{2-x} - (-x + 3)) dx = \int_0^2 (e^{2-x} + x - 3) dx = \left[-1 \cdot e^{2-x} + \frac{x^2}{2} - 3x \right]_0^2 = \\ &= \left(-1 \cdot e^{2-2} + \frac{2^2}{2} - 3(2) \right) - \left(-1 \cdot e^{2-0} + 0 - 0 \right) u^2 = (-e^0 + 2 - 6) - (-e^2) u^2 = (e^2 - 5) u^2 \cong 2'389 u^2. \end{aligned}$$

Ejercicio 3 opción A, Colisiones Junio 2018 (modelo 2)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(a) [1'25 puntos] Discute el rango de A según los valores del parámetro "λ".

(b) [1'25 punto] Para "λ = -2", estudia y resuelve el sistema dado por AX = B.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(a)

Discute el rango de A según los valores del parámetro "λ".

$$\begin{aligned} \text{Tenemos } \det(A) = |A| &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Saco 2 de } C_1 \\ \\ \text{Saco -1 de } C_2 \end{array} = 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1\lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ F_3 + F_2 + F_1 \end{array} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda + 2 & \lambda + 2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Saco} \\ \\ \text{de } F_3 \end{array} \\ &= -2 \cdot (\lambda + 2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \\ \end{array} = -2 \cdot (\lambda + 2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -2 \cdot (\lambda + 2) \cdot (1) \cdot (\lambda - 1) \cdot (1 - \lambda). \end{aligned}$$

De $\det(A) = 0$, tenemos $-2 \cdot (\lambda + 2) \cdot (1) \cdot (\lambda - 1) \cdot (1 - \lambda) = 0$, de donde $\lambda + 2 = 0$, $\lambda - 1 = 0$ y $1 - \lambda = 0$, es decir sus soluciones son $\lambda = -2$, $\lambda = 1$ y $\lambda = 1$.

Si $\lambda \neq -2$ y $\lambda \neq 1$ (dos veces), $\det(A) \neq 0$, con lo cual $\text{rango}(A) = 3$.

Si $\lambda = 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, es decir cómo nos queda **una sola fila** después de realizar

las transformaciones elementales de Gauss, tenemos **$\text{rango}(A) = 1$** .

Si $\lambda = -2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, como el determinante $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 \neq 0$, tenemos **$\text{rango}(A) = 2$** .

(b)

Para "λ = -2", estudia y resuelve el sistema dado por AX = B.

Hemos visto en el apartado (a) que si "λ = -2", $\text{rango}(A) = 2$, luego no existe la inversa de la matriz A.

Sea A* la matriz ampliada del sistema $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como en A* $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \end{vmatrix} F_2 + F_1 =$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{array} = (-1) \cdot (-4 + 4) = 0, \text{ tenemos } \text{rango}(A^*) = 2.$$

Como para " $\lambda = -2$ " tenemos $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < \text{número de incógnitas}$, es un sistema compatible e indeterminado, y tiene más de una solución (en \mathbb{R} infinitas), por el Teorema de Rouché.

Por tener rango 2 utilizamos sólo dos ecuaciones (las dos primeras, que son con las que hemos calculado el menor de orden 2 de A distinto de cero)

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -1 \\ 2x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad (F_2 - F_1) \approx \begin{cases} 2x - y - 2z = -1 \\ 3y + 3z = 2 \end{cases}$$

Llamando $\mathbf{z} = \mathbf{m} \in \mathbb{R}$ tenemos $\mathbf{y} = 2/3 - \mathbf{m}$. Entrando en la primera ecuación $2x - (2/3 - m) - 2(m) = -1$, de donde $2x = -1/3 + m$, luego $\mathbf{x} = -1/6 + m/2$, y la **solución del sistema es $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (-1/6 + m/2, 2/3 - m, m)$, con $m \in \mathbb{R}$.**

Ejercicio 4 opción A, Colisiones Junio 2018 (modelo 2)

Considera el plano π de ecuación $x + 2y + z = 6$.

(a) [1 punto] Determina la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.

(a) [0'5 puntos] Halla el punto simétrico del origen de coordenadas con respecto a π .

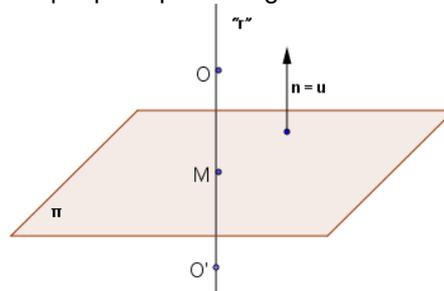
(b) [1 punto] Calcula el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos de corte de π con los ejes coordenados.

Solución

Considera el plano π de ecuación $x + 2y + z = 6$.

(a)

Determina la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.



La recta "r" perpendicular al plano π que pasa por el origen de coordenadas $O(0,0,0)$, tiene por vector director \mathbf{u} el vector normal del plano $\mathbf{n} = (1,2,1)$.

$$"r" \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

(a)

Halla el punto simétrico del origen de coordenadas con respecto a π .

La figura anterior nos sirve. Necesitamos el punto M proyección ortogonal de O sobre π , el cual es el corte de la recta "r" calculada en el apartado (a) con el plano π , es decir $M = s \cap \pi$, y M es el punto medio del segmento OO' , donde O' es el simétrico pedido.

$M = s \cap \pi$, sustituimos la ecuación de la recta en el plano y obtenemos el parámetro " λ ", y luego el punto M. $\rightarrow (\lambda) + 2(\lambda) + (\lambda) = 6$, es decir $6\lambda = 6$, de donde $\lambda = 1$, y el punto M es $M((1), 2(1), (1)) = M(1, 2, 1)$.

M es el punto medio del segmento OO' , donde O' es el simétrico pedido.

$$(1, 2, 1) = ((0+x)/2, (0+y)/2, (0+z)/2), \text{ de donde } x = 2, y = 4 \text{ y } z = 2.$$

El simétrico pedido es $O'(2, 4, 2)$.

(b)

Calcula el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos de corte de π con los ejes coordenados.

Sabemos que el volumen del tetraedro es $(1/6)$ del volumen del paralelepípedo que determinan los vectores **OA, OB y OC**, siendo A, B y C los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados; es decir el volumen pedido es el valor absoluto (lo notaremos $||$) del producto mixto (lo notaremos con corchetes $[]$) de los tres vectores **OA, OB y OC**. El producto mixto de tres vectores era su determinante.

Calculamos los puntos de corte del plano $\pi \equiv x + 2y + z = 6$ con los ejes coordenados, A, B y C.

Para $y = z = 0$, tenemos $x = 6$, de donde $x = 6$. Punto A(6,0,0).

Para $x = z = 0$, tenemos $2y = 6$, de donde $y = 3$. Punto B(0,3,0)

Para $x = y = 0$, tenemos $z = 6$, de donde $z = 6$. Punto C(0,0,6).

$$\mathbf{OA} = (6 - 0, 0 - 0, 0 - 0) = (6, 0, 0); \quad \mathbf{OB} = (0 - 0, 3 - 0, 0 - 0) = (0, 3, 0); \quad \mathbf{OC} = (0 - 0, 0 - 0, 6 - 0) = (0, 0, 6)$$

Sabemos que, **volumen tetraedro** = $(1/6) \cdot |[\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}]| = (1/6) \cdot |\det(\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC})| =$

$$= (1/6) \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Producto} \\ \text{elementos} \\ \text{diagonal} \end{matrix} = (1/6) \cdot |(6) \cdot (3) \cdot (6)| = 18 \text{ u}^3.$$

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Colisiones Junio 2018 (modelo 2)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} -x \cdot e^{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ x \cdot e^{x-1} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x \cdot e^{1-x} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

a) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$ y $x = 1$.

b) [1'5 puntos] Estudia la existencia de asíntotas horizontales de la gráfica de f .

Solución

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} -x \cdot e^{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ x \cdot e^{x-1} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x \cdot e^{1-x} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

a)

Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$ y $x = 1$.

Estudiamos primero la continuidad, pues después veremos la continuidad de la derivada.

Sabemos que f es continua en $x = 0$ si: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} [-x \cdot e^{x-1}] = -0 \cdot e^{-1} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \cdot e^{x-1}] = 0 \cdot e^{-1} = 0. \text{ Como es igual } \mathbf{f \text{ es continua en } x = 0}.$$

Sabemos que f es continua en $x = 1$ si: $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)]$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^-} [x \cdot e^{1-x}] = 1 \cdot e^0 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x \cdot e^{x-1}] = 1 \cdot e^0 = 1. \text{ Como es igual, } \mathbf{f \text{ es continua en } x = 1}.$$

b)

Estudiamos la derivabilidad de f en $x = 0$ y $x = 1$ (utilizamos la continuidad de la derivada).

$$f(x) = \begin{cases} -x \cdot e^{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ x \cdot e^{x-1} & \text{si } 0 < x \leq 1; \\ x \cdot e^{1-x} & \text{si } 1 < x \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} -(1 \cdot e^{x-1} + x \cdot e^{x-1} \cdot (1)) & \text{si } x < 0 \\ 1 \cdot e^{x-1} + x \cdot e^{x-1} \cdot (1) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 \cdot e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (-1) & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Para que f sea derivable en $x = 0$ se tiene que verificar: $f'(0^-) = f'(0^+)$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [f'(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} [-(e^{x-1} + x \cdot e^{x-1})] = -(e^{0-1} + 0 \cdot e^{0-1}) = -e^{-1} = -1/e.$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [f'(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [e^{x-1} + x \cdot e^{x-1}] = e^{0-1} + 0 \cdot e^{0-1} = e^{-1} = 1/e.$$

Como $f'(0^-) = -1/e \neq f'(0^+) = 1/e$, **la función f no es derivable en $x = 0$.**

Para que f sea derivable en $x = 1$ se tiene que verificar: $f'(1^-) = f'(1^+)$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [f'(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^-} [e^{x-1} + x \cdot e^{x-1}] = e^0 + 1 \cdot e^0 = 1 + e^0 = 1 + 1/e.$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [f'(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^+} [e^{1-x} - x \cdot e^{1-x}] = e^0 - 1 \cdot e^0 = 1 - e.$$

Como $f'(1^-) = 1 + 1/e \neq f'(1^+) = 1 - e$, **la función f no es derivable en $x = 1$.**

b)

Estudia la existencia de asíntotas horizontales de la gráfica de f .

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} -x \cdot e^{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ x \cdot e^{x-1} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x \cdot e^{1-x} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

Regla de L'Hôpital (L'H): Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ y existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla sigue

también para $\frac{\infty}{\infty}$, y cuando $x \rightarrow \infty$.

Para $-\infty$, tomamos la rama $f(x) = -x \cdot e^{x-1}$ ($x \leq 0$)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-(-x) \cdot e^{-x-1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x+1}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty}; \text{L'H} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x+1}} = \frac{1}{+\infty} = 0, \text{ luego la recta}$$

y = 0 es una asíntota horizontal en $-\infty$.

Para $+\infty$, tomamos la rama $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ ($1 < x$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x \cdot e^{1-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty}; \text{L'H} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = \frac{1}{+\infty} = 0, \text{ luego la recta y = 0 es una}$$

asíntota horizontal en $+\infty$.

Ejercicio 2 opción B, Colisiones Junio 2018 (modelo 2)

Considera las función $f : (-e/2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \ln(2x + e)$, donde \ln denota logaritmo neperiano.

(a) [0'75 puntos] Haz un esbozo de la gráfica de f calculando sus puntos de corte con los ejes coordenados.

(b) [1'75 punto] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y los ejes de coordenadas.

Solución

Considera las función $f : (-e/2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \ln(2x + e)$, donde \ln denota logaritmo neperiano.

(a)

Haz un esbozo de la gráfica de f calculando sus puntos de corte con los ejes coordenados.

Sabemos que la gráfica de $\ln(2x + e)$ es parecida a la de $\ln(x)$ que sabemos, siempre es creciente, y corta al eje OX en el punto de abscisa $x = 0$, ($\ln(x)$ corta al eje OX en $x = 1$, y tiene una asíntota vertical en $x = 0$).

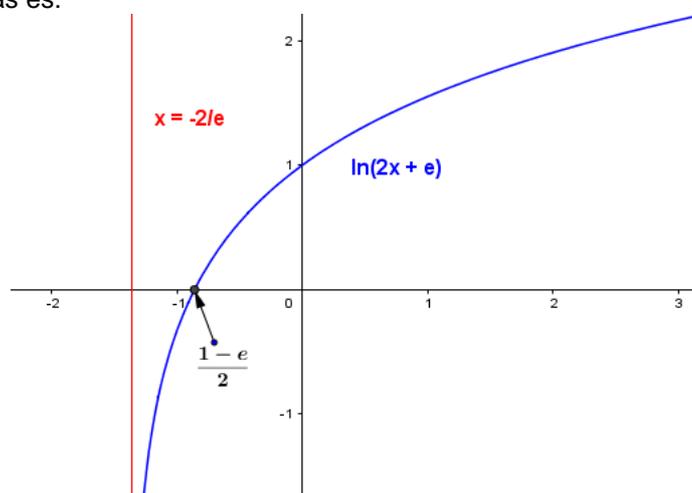
Calculamos los cortes con los ejes para ver la asíntota vertical y el corte con los ejes.

De $x = 0$ tenemos $f(0) = \ln(0 + e) = \ln(e) = 1$, es decir **pasa por el punto (0,1)**.

De $f(x) = 0$ tenemos $0 = \ln(2x + e) = \ln(1)$, de donde $2x + e = 1$, por tanto $x = (1 - e)/2$, es decir **pasa por el punto $((1-e)/2, 0)$.**

Sabemos que $\ln(0^+) = -\infty$ (es un límite). Como $\lim_{x \rightarrow -e/2^+} f(x) = \ln(2(-e/2) + 2) = \ln(0^+) = -\infty$, **la recta $x = -e/2$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función $f(x) = \ln(2x + e)$.**

Un esbozo de las gráficas es:



(b)

Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y los ejes de coordenadas.

Observando la gráfica el área que me piden es:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{(1-e)/2}^0 \ln(2x+e) dx = ** [x \cdot \ln|2x+e| - x + (e/2) \cdot \ln|2x+e|]_{(1-e)/2}^0 = \\ &= (0 - 0 + (e/2) \cdot \ln|0+e|) - ((1-e)/2 \cdot \ln|2 \cdot (1-e)/2 + e| - (1-e)/2 + (e/2) \cdot \ln|2(1-e)/2 + e|) u^2 = \\ &= e/2 - ((1-e)/2 \cdot \ln|1| - (1-e)/2 + (e/2) \cdot \ln|1|) u^2 = e/2 - 0 + 1/2 - e/2 - 0 u^2 = \mathbf{1/2 u^2}. \end{aligned}$$

** $\int \ln(2x+e) \cdot dx$, que es una integral por partes ($\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$)Tomamos $u = \ln(2x+e)$ de donde $du = 2 \cdot dx/(2x+e)$, y $dv = dx$ de donde $v = \int dx = x$, luego nos resulta

$$\begin{aligned} \int \ln(2x+e) \cdot dx &= x \cdot \ln(2x+e) - \int [2x/(2x+e)] dx = x \cdot \ln(2x+e) - \int [(2x+e-e)/(2x+e)] dx = \\ &= x \cdot \ln(2x+e) - \int [1 - e/(2x+e)] dx = x \cdot \ln|2x+e| - x + (e/2) \cdot \ln|2x+e| + K \end{aligned}$$

La integral $\int [2x/(2x+e)] dx$ es racional y también se podría haber realizado la división entera.**Ejercicio 3 opción B, Colisiones Junio 2018 (modelo 2)**

[2'5 puntos] Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

Determina, si existe, la matriz X que verifica $A^2X - BA + X = CD$.**Solución**De $A^2X - BA + X = CD$, tenemos $(A^2 + I_3)X = BA + CD$, es decir $EX = BA + CD$ con $E = A^2 + I_3$.

$$E = A^2 + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot I_3.$$

Como $\det(E) = |E| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 0$, existe la matriz inversa $E^{-1} = \frac{1}{|E|} \cdot \text{Adj}(E^t)$. También vemos

$$\text{que } E^{-1} = (2 \cdot I_3)^{-1} = (2)^{-1} \cdot (I_3)^{-1} = (1/2) \cdot I_3.$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad $EX = BA + CD$ por la izquierda por E^{-1} tenemos:

$$E^{-1} \cdot EX = E^{-1} \cdot (BA + CD) \rightarrow I_3 \cdot X = (1/2) \cdot I_3 \cdot (BA + CD) \rightarrow \mathbf{X = (1/2) \cdot (BA + CD)}.$$

Luego $\mathbf{X = (1/2) \cdot (BA + CD)}$ = $X = (1/2) \cdot (BA + CD) =$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ -8 & 10 & -12 \\ 12 & -15 & 18 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ -9 & 9 & -12 \\ 13 & -13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 opción B, Colisiones Junio 2018 (modelo 2)

Considera las rectas "r" y "s" dadas por $r \equiv x - 2 = y - 2 = z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 4 + t \\ z = mt \end{cases}$.

(a) [1 punto] Determina "m" para que r y s sean paralelas.

(b) [0'5 puntos] Halla, si existe, un valor de "m" para el que ambas rectas sean la misma.

(c) [1 punto] Determina "m = 1", calcula la ecuación del plano que contiene a r y s.

Solución

Considera las rectas "r" y "s" dadas por $r \equiv x - 2 = y - 2 = z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 4 + t \\ z = mt \end{cases}$.

(a)

Determina "m" para que r y s sean paralelas.

De la recta r tomamos un punto, el A(2,2,0) y un vector, el $\mathbf{u} = (1,1,1)$.

De la recta s tomamos un punto, el B(4,4,0) y un vector, el $\mathbf{v} = (1,1,m)$.

Como nos piden que las rectas r y s sean paralelas, sus vectores $\mathbf{u} = (1,1,1)$ y $\mathbf{v} = (1,1,m)$ han de ser linealmente dependientes, es decir sus coordenadas serán proporcionales.

De $\mathbf{u} = (1,1,1)$ y $\mathbf{v} = (1,1,m)$, tenemos $1/1 = 1/1 = 1/m$, de donde $m = 1$. Es decir **las rectas r y s son paralelas para el valor de "m = 1"**.

(b)

Halla, si existe, un valor de "m" para el que ambas rectas sean la misma.

Para que las rectas r y s sean coincidentes han de ser paralelas (del apartado (a) hemos visto que son paralelas si $m = 1$), y todo punto de una de ellas debe verificar la ecuación de la otra recta.

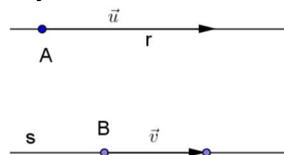
Tomamos el punto B(4,4,0) de la recta s, y veamos si verifica la ecuación de $r \equiv x - 2 = y - 2 = z$.

Como $(4) - 2 = (4) - 2 \neq (4)$, **el punto B de la recta s no pertenece a la recta r, por tanto no hay ningún valor de "m" para que las rectas r y s coincidan.**

(c)

Determina "m = 1", calcula la ecuación del plano que contiene a r y s.

Ya hemos visto que las rectas son paralelas y distintas:



En este caso para determinar el plano que forman, necesitamos un punto, el A(2,2,0) de r, y dos vectores el $\mathbf{u} = (1,1,1)$ de r y el $\mathbf{AB} = (2,2,0)$.

Damos el plano en forma vectorial: $\pi \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{A}(2,2,0) + \lambda \cdot (1,1,1) + \mu \cdot (2,2,0)$ con $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.