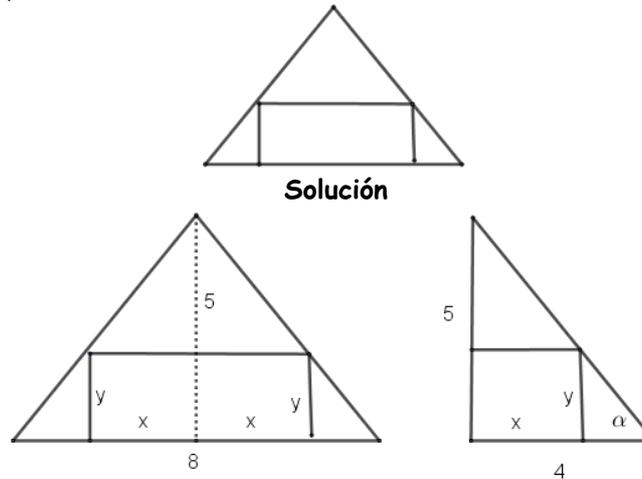


Opción A**Ejercicio 1 opción A, Suplente Septiembre de 2018 (modelo 5)**

[2,5 puntos] Considera un triángulo isósceles en el que el lado desigual mide 8 cm y la altura correspondiente mide 5 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en dicho triángulo (ver figura).

**Solución**

Es un problema de optimización.

La función a maximizar es Área = $A(x,y) = 2x \cdot y$

Relación entre variables: $\tan(\alpha) = 5/4$ (Triángulo grande) = $y/(4-x)$ [triángulo pequeño], de donde igualando obtenemos $y/(4-x) = 5/4$, por tanto $y = (20-5x)/4$, luego $A(x) = 2x \cdot y = 2x \cdot (20-5x)/4 = (40x - 10x^2)/4$.

Derivando $A'(x) = (1/4) \cdot (40 - 20x)$

De $A'(x) = 0$, tenemos $40 - 20x = 0$, es decir $x = 2$.

Luego el rectángulo tiene de base $2x = 2 \cdot (2) = 4$ cm. y de altura $y = (20 - 5(2))/4 = 10/4 = 2'5$ cm.

Veamos que $x = 2$ es un máximo de la función $A(x)$, viendo que $A''(2) < 0$

$A''(x) = (1/4) \cdot (-20) = -5 < 0$, $A''(2) = -5 < 0$, luego $x = 2$ es un máximo.

Ejercicio 2 opción A, Suplente Septiembre de 2018 (modelo 5)

Siendo $a > 1$, considera el rectángulo de vértices $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(a, 1)$ y $D(a, 0)$. La gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$ para $x \neq 0$ divide al rectángulo anterior en dos recintos.

a) [0'5 puntos] Haz un esbozo de la gráfica de f y del rectángulo descrito.

b) [2 puntos] Determina el valor de "a" para el que los dos recintos descritos tienen igual área.

Solución

Siendo $a > 1$, considera el rectángulo de vértices $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(a, 1)$ y $D(a, 0)$. La gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$ para $x \neq 0$ divide al rectángulo anterior en dos recintos.

a)

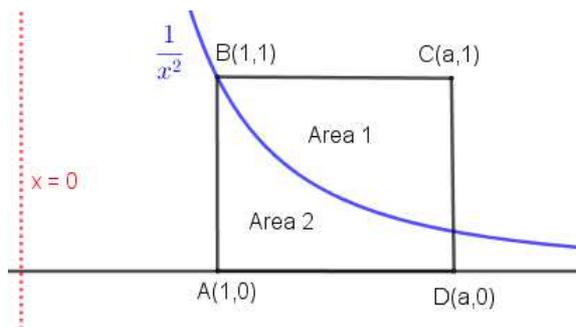
Haz un esbozo de la gráfica de f y del rectángulo descrito.

La gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ no está definida en $x = 0$ (es una asíntota vertical). Vemos que pasa por el punto $(1, 1)$ y por el punto $(a, 1/a^2)$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical de la gráfica de f , y a la derecha de $x = 0$, está en $+\infty$.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\infty^+} = 0^+$, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica en $+\infty$, y la función está por encima de la recta $y = 0$ en $+\infty$.

Teniendo en cuenta lo anterior en esbozo de la gráfica de f y del rectángulo es:



b) Determina el valor de “a” para el que los dos recintos descritos tienen igual área.

Área 1 = Área 2

$$\text{Área 1} = \text{área rectángulo} - \text{área bajo } f \text{ entre } 1 \text{ y } a = (a - 1) \cdot 1 - \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = (a - 1) \cdot 1 - \int_1^a x^{-2} dx =$$

$$= a - 1 - \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_1^a = a - 1 - \left[\frac{-1}{x} \right]_1^a = a - 1 - \left(\frac{-1}{a} - \frac{-1}{1} \right) = a - 1 + 1/a - 1 = (a + 1/a - 2) u^2$$

$$\text{Área 2} = \text{área bajo } f \text{ entre } 1 \text{ y } a = \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \int_1^a x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_1^a = \left[\frac{-1}{x} \right]_1^a = \left(\frac{-1}{a} - \frac{-1}{1} \right) = (-1/a + 1) u^2.$$

Igualando: $a + 1/a - 2 = -1/a + 1 \rightarrow a^2 + 1 - 2a = -1 + a \rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$, de donde $a = 1$ y $a = 2$. **Como nos dicen que $a > 1$, la solución es $a = 2$.**

Ejercicio 3 opción A, Suplente Septiembre de 2018 (modelo 5)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- a) [1'5 puntos] Discute el sistema dado por $AX = mX$ según los valores del parámetro m.
- b) [0'5 puntos] Da la solución del sistema en los casos en que es compatible determinado.
- c) [05 puntos] Para $m = 3$ resuelve el sistema y halla, si es posible, una solución en la que $x + y + z = 3$.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) Discute el sistema dado por $AX = mX$ según los valores del parámetro m.

De $AX = mX$ tenemos $AX - mX = O_{3 \times 1} = (A - m \cdot I_3) = O_{3 \times 1}$. Tenemos un sistema homogéneo.

$$\text{Sea la matriz } C = A - m \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-m & 0 & 0 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \end{pmatrix}.$$

$$\text{Tenemos } \det(C) = |C| = \begin{vmatrix} 2-m & 0 & 0 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (2-m) \cdot \begin{vmatrix} 2-m & 1 \\ 0 & 3-m \end{vmatrix} = (2-m) \cdot ((2-m) \cdot (3-m) - 0) =$$

$$= (2-m) \cdot (2-m) \cdot (3-m).$$

De $\det(C) = 0$, tenemos $(2-m) \cdot (2-m) \cdot (3-m) = 0$, es decir $m = 2$ (doble) y $m = 3$.

Si $m \neq 2$ y $m \neq 3$, $\det(C) \neq 0$, y el sistema al ser homogéneo tiene solución única, la trivial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Si $m = 2$, tenemos $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{F_3 - F_1} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, como la matriz C tiene una sola fila con números distintos

de cero, **tenemos rango(C) = 1 < número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución** (en nuestro caso infinita).

Si $m = 3$, tenemos $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{F_2 + F_1, F_3 + F_1} \approx \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, como la matriz escalonada C tiene dos filas con

números distintos de cero, **tenemos rango(C) = 2 < número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución** (en nuestro caso infinita).

b)

Da la solución del sistema en los casos en que es compatible determinado.

Hemos visto en el apartado (a) que **si $m \neq 2$ y $m \neq 3$, $\det(C) \neq 0$, y el sistema al ser homogéneo tiene solución única, la trivial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.**

c)

Para $m = 3$ resuelve el sistema y halla, si es posible, una solución en la que $x + y + z = 3$.

Para $m = 3$, tenemos $C \approx \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego $C \cdot X = O_{3 \times 1} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir $\begin{cases} -x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$,

tomando $z = \mu$, tenemos $y = \mu$, y **la solución del sistema es $(x, y, z) = (0, \mu, \mu)$ con $\mu \in \mathbb{R}$.** (depende de un solo parámetro)

Nos preguntan si es posible, una solución en la que $x + y + z = 3$

Como la solución en este caso es $(x, y, z) = (0, \mu, \mu)$, tenemos $(0) + (\mu) + (\mu) = 3$, es decir $2\mu = 3$, **luego $\mu = 3/2$ y la solución sería $(x, y, z) = (0, 3/2, 3/2)$.**

Ejercicio 4 opción A, Suplente Septiembre de 2018 (modelo 5)

Se sabe que los puntos $A(-1, 2, 6)$ y $B(1, 4, -2)$ son simétricos respecto de un plano π .

a) [0'75 puntos] Calcula la distancia de A a π .

b) [1'75 puntos] Determina la ecuación general del plano π .

Solución

Se sabe que los puntos $A(-1, 2, 6)$ y $B(1, 4, -2)$ son simétricos respecto de un plano π .

a)

Calcula la distancia de A a π .

Si A y B son simétricos respecto a un plano π , dicho plano es el plano mediador del segmento AB , es decir el plano π pasa por el punto medio del segmento AB , por tanto $d(A, \pi) = (1/2) \cdot \text{módulo del vector } \mathbf{AB} = (1/2) \cdot \|\mathbf{AB}\| = (1/2) \cdot \sqrt{(2^2 + 2^2 + 8^2)} = (1/2) \cdot \sqrt{72} = 3\sqrt{2}$.

$\mathbf{AB} = (1, 4, -2) - (-1, 2, 6) = (2, 2, -8)$

b)

Determina la ecuación general del plano π .

El plano π que nos piden pasa por el punto medio del segmento AB y tiene por vector normal el \mathbf{AB} , es decir nos piden el plano mediador del segmento AB .

Punto medio de AB es $C((-1 + 1)/2, (2 + 4)/2, (6 - 2)/2) = C(0, 3, 2)$.

La ecuación del plano es $\mathbf{CX} \cdot \mathbf{AB} = 0$, donde \bullet es el producto escalar.

La ecuación del plano es $\pi \equiv \mathbf{CX} \cdot \mathbf{AB} = 0 = (x - 0, y - 3, z - 2) \cdot (2, 2, -8) = 2x + 2y - 8z + 10 = 0$. Simplificando tenemos $\pi \equiv x + y - 4z + 5 = 0$

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Suplente Septiembre de 2018 (modelo 5)

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x + x \cdot e^{-x}$.

a) [1'25 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que es paralela a la recta $x - y + 1 = 0$.

b) [1'25 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Solución

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x + x \cdot e^{-x}$.

a)

Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que es paralela a la recta $x - y + 1 = 0$.

Sabemos que las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

De $x - y + 1 = 0$ tenemos $y = x + 1$, por tanto la pendiente de esta recta tangente es $y' = 1$.

La pendiente genérica a la gráfica de f es $f'(x) = (x + x \cdot e^{-x})' = 1 + 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 1 + e^{-x} - x \cdot e^{-x}$.

Iguamos pendientes: $1 = 1 + e^{-x} - x \cdot e^{-x} \rightarrow 0 = e^{-x} \cdot (1 - x)$. Como la exponencial no se anula nunca, tenemos $1 - x = 0$, de donde $x = 1$.

Me piden la recta tangente en $x = 1$.

La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ es " $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$ ".

Hemos visto que $f'(1) = 1$.

De $f(x) = x + x \cdot e^{-x} \rightarrow f(1) = 1 + 1 \cdot e^{-1} = 1 + 1/e = (e + 1)/e$.

La recta tangente pedida es $y - (e + 1)/e = 1 \cdot (x - 1)$.

b)

Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

$$f(x) = x + x \cdot e^{-x} = x + \frac{x}{e^{+x}}$$

Como esta función no se anula en el denominador, **no tiene asíntotas verticales**.

Veamos las asíntotas horizontales (A.H.).

Recordamos la Regla de L'Hôpital (L'H): Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ y existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. La

regla de L'Hôpital también sirve para $\frac{\infty}{\infty}$, y cuando $x \rightarrow \infty$.

$$\text{Calculamos primero } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty}; \text{ L'H} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} \right) = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{x}{e^x} \right) = +\infty + 0^+ = +\infty$, la gráfica de f **no tiene A.H. en $+\infty$** .

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - x \cdot e^{-(-x)}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - x \cdot e^x) = -\infty - \infty(+\infty) = -\infty - \infty = -\infty$, la gráfica de f **no tiene A.H. en $-\infty$** .

Veamos si tiene asíntotas oblicuas (A.H.) de la forma $y = mx + n$ con $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right)$ y $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$

$$\text{Como } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^{+x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{+\infty} \right) = (1 + 0) = 1, \text{ y}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{x}{e^x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) = 0 \text{ (este límite lo hemos calculado antes), la recta}$$

$y = 1 \cdot x + 0 = x$ es asíntota oblicua de la gráfica de f en $+\infty$.

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x - x \cdot e^{-(-x)}}{-x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x) = 1 + \infty = +\infty$, la gráfica de f **no tiene A.O. en $-\infty$** .

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \text{A.O.}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{x}{e^x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) = 0^+$, la gráfica de f está por encima de la A.O. $y = x$ en

$+\infty$.

Ejercicio 2 opción B, Suplente Septiembre de 2018 (modelo 5)

[2,5 puntos] Calcula $\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+e^x} dx$ donde \ln denota logaritmo neperiano (sugerencia $t = e^x$).

Solución

Calcula $\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+e^x} dx$ donde \ln denota logaritmo neperiano (sugerencia $t = e^x$).

Calculamos primero la integral indefinida

$$I = \int \frac{1}{1+e^x} dx = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t \Leftrightarrow x = \ln(t) \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t \cdot (1+t)} = \int \frac{A \cdot dt}{t} + \int \frac{B \cdot dt}{t+1} = A \ln|t| + B \ln|t+1| + K$$

Calculamos A y B.

De $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1) + B(t)}{t \cdot (t+1)}$, igualando numeradores tenemos: $1 = A(t+1) + B(t)$.

De $t = 0 \rightarrow 1 = A$.

De $t = -1 \rightarrow 1 = B(-1) = -B$, luego $B = -1$.

$$\text{Luego } I = \int \frac{1}{1+e^x} dx = 1 \cdot \ln|t| - 1 \cdot \ln|t+1| + K = \left\{ \begin{array}{l} \text{Quito cambio} \\ e^x = t \end{array} \right\} = \ln|e^x| - \ln|e^x + 1| + K = x - \ln(e^x + 1) + K$$

$$\text{Por tanto } \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+e^x} dx = \left[x - \ln(e^x + 1) \right]_0^{\ln(2)} = (\ln(2) - \ln(e^{\ln(2)} + 1)) - (0 - \ln(e^0 + 1)) =$$

$$= (\ln(2) - \ln(2+1)) - (0 - \ln(1+1)) = \ln(2) - \ln(3) + \ln(2) = 2 \cdot \ln(2) - \ln(3) = \ln(2^2) - \ln(3) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

Ejercicio 3 opción B, Suplente Septiembre de 2018 (modelo 5)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - z = m \\ my + 3z = 1 \\ 4x + y - mz = 5 \end{cases}$

a) [1,5 puntos] Discútelo según los valores del parámetro m.

b) [1 punto] Para $m = 1$ resuelve el sistema y encuentra, si es posible, una solución para la que sea $x = z$.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - z = m \\ my + 3z = 1 \\ 4x + y - mz = 5 \end{cases}$

a)

Discútelo según los valores del parámetro m.

$$\text{Matriz de los coeficientes } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}, \text{ matriz ampliada } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -m & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En } A, \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_3 + C_1 \\ C_3 + C_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & 4-m \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = 1 \cdot (m \cdot (4-m) - 3) = -m^2 + 4m - 3$$

$$\text{De } \det(A) = 0 \text{ tenemos } m^2 - 4m + 3 = 0, \text{ por tanto } m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}, \text{ luego } m = 1 \text{ y } m = 3.$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 3$, tenemos $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^{\circ}$ de incógnitas, sistema compatible y determinado y tiene solución única.

$$\text{Si } m = 1, \text{ tenemos } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ matriz ampliada } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, tenemos **rango(A) = 2**

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ C_3 - F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = 1 \cdot (1 - 1) = 0$, tenemos **rango(A*) = 2**.

Por el Teorema de Rouche, **como rango(A) = rango(A*) = 2 < n° de incógnitas, sistema compatible e indeterminado y tiene más de una solución (infinitas en nuestro caso).**

Si **m = 3**, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0$, tenemos **rango(A) = 2**.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ C_3 - 3 \cdot F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = 1 \cdot (-21 - 1) = -22 \neq 0$, tenemos **rango(A*) = 3**.

Por el Teorema de Rouche, **como rango(A) = 2 ≠ rango(A*), el sistema es incompatible y no tiene solución.**

b)

Para m = 1 resuelve el sistema y encuentra, si es posible, una solución para la que sea x = z.

Hemos visto en el apartado (a) que si m = 1, $rango(A) = rango(A^*) = 2 < \text{número de incógnitas}$, y *el sistema era compatible e indeterminado y tenía infinitas soluciones*

Como rango = 2, tomamos dos ecuaciones (1ª y 2ª, que son las que he utilizado para obtener el menor de orden 2 de A distinto de cero) y dos incógnitas principales:

$\begin{cases} x - z = 1 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$, tomando $z = b \in \mathbb{R}$ tenemos $x = 1 + b$ e $y = 1 - 3b$, la **solución del sistema para m = 1**

es: (x,y,z) = (1 + b, 1 - 3b, b) con $b \in \mathbb{R}$.

Nos dicen, en este caso, si hay una solución para la que sea x = z. Si fuese posible tendríamos $1 + b = b$, **de donde 1 = 0, lo cual es absurdo** luego **no hay solución para la que sea x = z**.

Ejercicio 4 opción B, Suplente Septiembre de 2018 (modelo 5)

Considera las rectas r y s dadas por $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$.

a) [1,75 puntos] Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

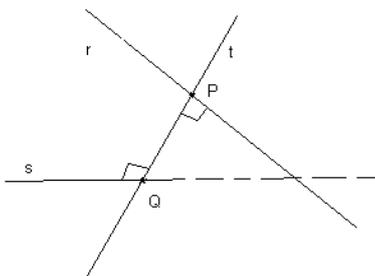
b) [0,75 puntos] Calcula la distancia entre las rectas dadas.

Solución

a) y b)

Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s, y la distancia entre ellas

Recordamos que la distancia entre dos rectas que se cruzan $r(A;\mathbf{u})$ y $s(B;\mathbf{v})$ es la mínima distancia entre ellas. Es decir la distancia entre los puntos de corte P y Q de la recta perpendicular a ambas y que las corta. (Por este método podemos calcular la recta perpendicular a dos rectas y que las corte)



Vamos a calcular los puntos P de "r" y Q de "s", que se encuentran a la mínima distancia, que son los puntos

de corte de la recta perpendicular común con dichas rectas.

Ponemos ambas recta en paramétricas con un parámetro distinto

De la recta $r(A; \mathbf{u})$ tomamos un punto genérico P (depende del parámetro t)

De la recta $s(B; \mathbf{v})$ tomamos un punto genérico Q (depende del parámetro λ)

El vector \mathbf{PQ} tiene que ser perpendicular al vector director \mathbf{u} de "r" y al vector director \mathbf{v} de "s", a la vez, es decir sus productos escalares tienen que ser cero:

$$\mathbf{PQ} \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{PQ} \cdot \mathbf{v} = 0. \text{ Resolvemos el sistema.}$$

Esto es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (λ y t), al resolverlo obtenemos λ y t.

Entrando en el punto genérico P con el valor de λ , obtenemos el punto P determinado.

Entrando en el punto genérico Q con el valor de t, obtenemos el punto Q determinado.

La recta pedida "t" es la que pasa por los puntos P y Q, es decir $t(P; \mathbf{PQ})$

De esta construcción, tenemos la definición de la distancia entre dos rectas que se cruzan, puesto que los puntos P y Q son los que se encuentran a mínima distancia entre ellas.

Calculados los punto P y Q anteriores tenemos $d(r;s) = d(P;Q) = \|\mathbf{PQ}\|$

$$\text{Considera las rectas r y s dadas por } r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2 \end{cases}.$$

Un punto A de "r" es $A(0,1,0)$ y un vector director es $\mathbf{u} = (2,0,0)$.

Un punto B de "s" es $B(0,2,2)$ y un vector director es $\mathbf{v} = (1,-1,0)$.

De la recta $r(A; \mathbf{u})$ tomamos un punto genérico $P(x,y,z) = P(2t, 1, 0)$

De la recta $s(B; \mathbf{v})$ tomamos un punto genérico $Q(x,y,z) = Q(\lambda, 2 - \lambda, 2)$

El vector \mathbf{PQ} tiene que ser perpendicular al vector director de "r" \mathbf{u} y al vector director de "s" \mathbf{v} a la vez, es decir su producto escalar (\cdot) tiene que ser cero:

$$\mathbf{PQ} = (\lambda - 2t, 1 - \lambda, 0)$$

$$\mathbf{PQ} \cdot \mathbf{u} = 0 = (\lambda - 2t, 1 - \lambda, 0) \cdot (2, 0, 0) = 0 = 2\lambda - 4t = 0 \rightarrow \lambda = 2t.$$

$$\mathbf{PQ} \cdot \mathbf{v} = 0 = (\lambda - 2t, 1 - \lambda, 0) \cdot (-1, 1, 0) = 0 = \lambda - 2t - 1 + \lambda = 2\lambda - 2t - 1 = 0. \text{ Sustituyendo tenemos}$$

$$2(2t) - 2t - 1 = 0 \rightarrow 2t = 1, \text{ de donde } t = 1/2 \text{ y } \lambda = 2(1/2) = 1$$

Ya tenemos los valores de "t" y " λ ".

Entrando en el punto genérico P con el valor de $t = 1/2$, obtenemos el punto P determinado que es $P(2(1/2), 1, 0) = P(1, 1, 0)$

Entrando en el punto genérico Q con el valor de $\lambda = 1$, obtenemos el punto Q determinado que es $Q(1, 2 - (1), 2) = Q(1, 1, 2)$

La recta perpendicular a ambas pedida "t" es la que pasa por los punto P y Q, es decir $t(Q; \mathbf{PQ})$

$$Q(1, 1, 2)$$

$$\mathbf{PQ} = (1 - 1, 1 - 1, 2 - 0) = (0, 0, 2).$$

La recta pedida es $t \equiv (x,y,z) = (1, 1, 2) + \delta(0, 0, 2)$ con $\delta \in \mathbf{R}$.

Calculamos la distancia entre "r" y "s"

Por la construcción los puntos P y Q son los que están a la mínima distancia entre ellas, es decir los del corte perpendicular de la recta "t" con ambas rectas, luego la distancia entre las rectas "r" y "s" es:

$$d(r;s) = \|\mathbf{QP}\| = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (2)^2} \cdot u^1 = 2 \cdot u^1.$$