

**Opción A****Ejercicio 1 opción A, Suplente Junio 2019 (modelo 2)**

[2'5 puntos] Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(x) - e^{-2x} - 2x}{\sin^2(x)} \right)$ .

**Solución**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(x) - e^{-2x} - 2x}{\sin^2(x)} \right) = \frac{\cos(0) - e^0 - 2(0)}{\sin^2(0)} = \frac{1-1-0}{0} = \frac{0}{0}$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H). (Si "f" y "g" son funciones continuas en  $[a - \delta, a + \delta]$ , derivables en  $(a - \delta, a + \delta)$ , verificando que  $f(a) = g(a) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ , entonces si existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  se verifica que

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ . La regla se puede reiterar, y también es válida si tenemos  $\infty/\infty$ , y si  $x \rightarrow \infty$ , con lo cual tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(x) - e^{-2x} - 2x}{\sin^2(x)} \right) &= \left\{ \frac{0}{0}; L'H \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-\sin(x) - e^{-2x} \cdot (-2) - 2}{2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)} \right) = \{ \text{Opero} \} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-\sin(x) + 2e^{-2x} - 2}{2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)} \right) = \\ &= \left\{ \frac{0+2-2}{2 \cdot \sin(0) \cdot \cos(0)} = \frac{0}{0}; L'H \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-\cos(x) + 2e^{-2x} \cdot (-2)}{2 \cdot \cos(x) \cdot \cos(x) + 2 \cdot \sin(x) \cdot (-\sin(x))} \right) = \frac{-\cos(0) - 4 \cdot e^0}{2 \cos(0) \cdot \cos(0) - 2 \sin(x) \cdot \sin(x)} = \\ &= \frac{-1 - 4}{2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0} = \frac{-5}{2}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 2 opción A, Suplente Junio 2019 (modelo 2)**

[2'5 puntos] Calcula  $\int \ln \left( \frac{x^2+1}{x} \right) dx$  ( $\ln$  denota la función logaritmo neperiano)

**Solución**

$$\begin{aligned} I &= \int \ln \left( \frac{x^2+1}{x} \right) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln \left( \frac{x^2+1}{x} \right) \Rightarrow du = \frac{1}{\frac{x^2+1}{x}} \cdot \frac{2x \cdot (x) - (x^2+1) \cdot 1}{x^2} dx = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{(x^2+1) \cdot x} dx = \frac{x^2 - 1}{(x^2+1) \cdot x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} \\ &= \ln \left( \frac{x^2+1}{x} \right) \cdot x - \int x \cdot \frac{x^2 - 1}{(x^2+1) \cdot x} dx = x \cdot \ln \left( \frac{x^2+1}{x} \right) - \int \frac{x^2 - 1}{x^2+1} dx = x \cdot \ln \left( \frac{x^2+1}{x} \right) - \int \frac{x^2+1 - 1 - 1}{x^2+1} dx = \\ &= x \cdot \ln \left( \frac{x^2+1}{x} \right) - \int \left( 1 - \frac{2}{x^2+1} \right) dx = x \cdot \ln \left( \frac{x^2+1}{x} \right) - \int 1 dx + 2 \int \frac{dx}{x^2+1} = x \cdot \ln \left( \frac{x^2+1}{x} \right) - x + 2 \cdot \text{artg}(x) + K. \end{aligned}$$

**Ejercicio 3 opción A, Suplente Junio 2019 (modelo 2)**

Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) [1 punto] Calcula los valores de  $m$  para los cuales  $A$  tiene inversa.

b) [1'25 punto] Para " $m = 2$ ", encuentra la matriz  $X$  que cumple  $AX - BB^t = I$ , siendo  $B^t$  la matriz traspuesta de  $B$  e  $I$  la matriz identidad de orden 3.

**Solución**

a)

Calcula los valores de  $m$  para los cuales  $A$  tiene inversa.

La matriz  $A$  tienen inversa si  $\det(A) = |A| \neq 0$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_1 - F_3 \\ \\ \text{columna} \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & m-1 & 0 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \end{array} = 1 \cdot [0 - (m-1) \cdot (m-1)] = -(m-1)^2.$$

Luego  $|A| \neq 0$  si  $(m-1) \neq 0$ , es decir  **$A$  tiene inversa si  $m \neq 1$ .**

b)

Para "m = 2", encuentra la matriz  $X$  que cumple  $AX - BB^t = I$ , siendo  $B^t$  la matriz traspuesta de  $B$  e  $I$  la matriz identidad de orden 3.

Sabemos que para  $m = 2$ , la matriz  $A$  tiene inversa, por tanto de la ecuación matricial  $AX - BB^t = I$  tenemos  $AX = I - BB^t$ . Multiplicando la expresión  $AX = I - BB^t$ , por la izquierda por  $A^{-1}$  tenemos  $A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot (I - BB^t)$ , de donde  $\rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot (I - BB^t) \rightarrow X = A^{-1} \cdot (I - BB^t)$ .

Sabemos que  $A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)^t}{|A|}$ . Teniendo en cuenta el cálculo anterior de  $\det(A)$  tenemos  $|A| = -(2-1)^2 = -1$ ,

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (I - BB^t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### Ejercicio 4 opción A, Suplente Junio 2019 (modelo 2)

Considera el punto  $A$  y los planos  $\pi_1 \equiv x + y + z = 0$  y  $\pi_2 \equiv x - y + z = 0$ .

a) [1'25 puntos] Calcula la recta pasa por  $A$  y es paralela a  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

b) [1'25 puntos] Calcula los puntos de la recta  $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{3}$  que equidistan de  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

#### Solución

a)

Calcula la recta pasa por  $A$  y es paralela a  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

Si la recta es paralela a los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , un vector director de la recta es uno paralelo a la vez a los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , es decir  $u = n_1 \times n_2$ , siendo  $(x)$  el producto vectorial  $n_1$  y  $n_2$  los vectores normales de  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

$$n_1 = (1, 1, 1), n_2 = (1, -1, 1), u = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = \vec{i}(2) - \vec{j}(0) + \vec{k}(-2) = (2, 0, -2) \text{ y la recta pedida es}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 \\ z = -2\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

b)

Calcula los puntos de la recta  $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{3}$  que equidistan de  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

Un punto genérico de la recta  $s$  es  $X(x, y, z) = (1 + 2b, 2 + 3b, 3b)$  con  $b \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Tenemos: } d(X; \pi_1) = \frac{|1 + 2b + 2 + 3b + 2b|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|3 + 7b|}{\sqrt{3}}; d(X; \pi_2) = \frac{|1 + 2b - 2 - 3b + 2b|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-1 + b|}{\sqrt{3}}.$$

Igualando  $d(X; \pi_1) = d(X; \pi_2)$  tenemos:  $\frac{|3 + 7b|}{\sqrt{3}} = \frac{|-1 + b|}{\sqrt{3}}$ , es decir  $|3 + 7b| = |-1 + b|$  que nos da lugar a dos ecuaciones:

$$3 + 7b = +(-1 + b) \rightarrow 6b = -4 \rightarrow b = -2/3, \text{ y un punto } X_1 \text{ es } X_1(1 + 2(-2/3), 2 + 3(-2/3), 3(-2/3)) = X_1(-1/3, 0, -2).$$

$$3 + 7b = -(-1 + b) \rightarrow 8b = -2 \rightarrow b = -1/4, \text{ y un punto } X_1 \text{ es } X_1(1 + 2(-1/4), 2 + 3(-1/4), 3(-1/4)) = X_2(1/2, 5/4, -3/4).$$

Los puntos de  $s$  que equidistan de  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , son  $X_1(-1/3, 0, -2)$  y  $X_2(1/2, 5/4, -3/4)$ .

#### Opción B

#### Ejercicio 1 opción B, Suplente Junio 2019 (modelo 2)

[2'5 puntos] Se sabe que la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

( $\ln$  denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula  $a$  y  $b$ .

### Solución

Se sabe que la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ . ( $\ln$  denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula  $a$  y  $b$ .

Sabemos que si una función es derivable también es continua, por tanto nuestra función  $f$  es continua y derivable en  $x = 0$ .

Como es continua en  $x = 0$ ,  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - ax + 2b) = 0 - 0 + 2b = 2b.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(0+1)}{0} = \frac{\ln(1)}{0} = \frac{0}{0};$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H): Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$  y existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

La regla se puede repetir y también para  $\frac{\infty}{\infty}$ , y cuando  $x \rightarrow \infty$ .

Con lo cual tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1) \cdot 1} = \frac{1}{(0+1) \cdot 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Igualando  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ , resulta  $2b = 1$ , de donde  $b = 1/2$ .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases};$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} \cdot x - \ln(x+1) \cdot 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{x+1} - \ln(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Estudiaremos la continuidad de la derivada en  $x = 0$ , es decir  $f'(0^-) = f'(0^+)$  con  $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$  y  $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ .

Empezamos  $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x - a) = 0 - a = -a$ .

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{0 - \ln(0+1)}{0^2} = \frac{0}{0}, \text{ le aplicamos la regla de L'Hôpital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (x+1)}{2x \cdot (x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{2x \cdot (x+1)^2} =$$

$$= \{\text{Simplifico "x"}\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2 \cdot (x+1)^2} = \frac{-1}{2 \cdot (0+1)^2} = \frac{-1}{2}.$$

Igualando  $f'(0^-) = f'(0^+)$ , tenemos  $-a = -1/2 \rightarrow a = 1/2$ . Por tanto  $a = 1/2$  y  $b = 1/2$ , para que la función dada sea derivable.

### Ejercicio 2 opción B, Suplente Junio 2019 (modelo 2)

Sean  $f, g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas por  $f(x) = \sin(x)$  y  $g(x) = \sin(2x)$ .

- (a) [1 punto] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.  
 (b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas y las rectas  $x = 0$  y  $x = \pi/3$ .

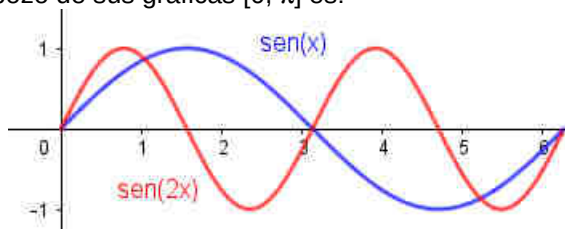
**Solución**

Sean  $f, g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas por  $f(x) = \sin(x)$  y  $g(x) = \sin(2x)$ .

- (a) [1 punto] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

Sabemos que la función  $\sin$  es continua y derivable en todo  $\mathbb{R}$ , periódica de periodo  $2\pi$ ,  $\sin(0) = 0$ ,  $\sin(\pi/2) = 1$ ,  $\sin(\pi) = 0$ ,  $\sin(3\pi/2) = -1$  y  $\sin(2\pi) = 0$ . " $\sin$ " creciente en el I y IV cuadrante y decreciente en II y III cuadrante.

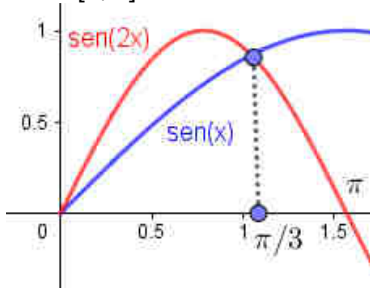
También sabemos que la gráfica de  $\sin(2x)$  es parecida a la de " $\sin(x)$ " pero de periodo  $\pi$ , por tanto el papel que realizaban  $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  y  $2\pi$  en " $\sin$ " lo realizan ahora  $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$  y  $\pi$  en " $\sin(2x)$ ". Teniendo en cuenta todo esto un esbozo de sus gráficas  $[0, \pi]$  es:



Me están pidiendo los cortes de  $\sin(x)$  y  $\sin(2x)$  en  $[0, \pi]$ .

De  $\sin(x) = \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \rightarrow \sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 0 = \sin(x) \cdot (1 - 2\cos(x))$ . De  $\sin(x) = 0$  tenemos  $x = 0$ , y de  $1 - 2\cos(x) = 0$  tenemos  $\cos(x) = 1/2$ , de donde  $x = \pi/3$ .

Volvemos a realizar la gráfica en el intervalo  $[0, \pi]$ .



(b)

Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas y las rectas  $x = 0$  y  $x = \pi/3$ .

Nos fijamos en el último esbozo de la gráfica para calcular el área:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{\pi/3} (\sin(2x) - \sin(x)) dx = [-\cos(2x)/2 + \cos(x)]_0^{\pi/3} = (-\cos(2\pi/3)/2 + \cos(\pi/3)) - (-\cos(0)/2 + \cos(0)) \\ &= -(-1/2)/2 + 1/2 - (-1/2 + 1) = 1/4 \text{ u}^2. \end{aligned}$$

**Ejercicio 3 opción B, Suplente Junio 2019 (modelo 2)**

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} mx - y + 13z = 0 \\ 2x - my + 4z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \end{cases}$$

- a) [1'5 puntos] Encuentra los valores de " $m$ " para los que el sistema tiene infinitas soluciones.  
 b) [1 punto] Resuelve el sistema para  $m = 3$ . En este caso, ¿hay alguna solución en las que  $x = 10$ ? Razona tu respuesta.

**Solución**

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} mx - y + 13z = 0 \\ 2x - my + 4z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \end{cases}$$

a)

Encuentra los valores de " $m$ " para los que el sistema tiene infinitas soluciones.

$$\text{Matriz de los coeficientes } A = \begin{pmatrix} m & -1 & 13 \\ 2 & -m & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \text{ matriz ampliada } A^* = \begin{pmatrix} m & -1 & 13 & 0 \\ 2 & -m & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como vemos es un sistema homogéneo por tanto siempre tiene la solución trivial  $(x,y,z) = (0,0,0)$ . Como me piden los valores de "m" para que el sistema tenga infinitas soluciones, nos piden los valores de "m" para los cuales  $\det(A) = |A| = 0$ .

$$\text{Tenemos } \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 13 \\ 2 & -m & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_1+F_3} \begin{vmatrix} m+1 & 0 & 20 \\ 2 & -m & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array}$$

$$= (6m + 1) \cdot (-7m - 4) - 0 + 20 \cdot (2 + m) = -7m^2 + 9m + 36.$$

$$\text{De } \det(A) = 0 \rightarrow -7m^2 + 9m + 36 = 0 \rightarrow 7m^2 - 9m - 36 = 0. \quad x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 1008}}{14} = \frac{9 \pm 33}{14}, \text{ de donde } m = 3 \text{ y } m = -12/7.$$

Si  $m = 3$  y  $m = -12/7$ ,  $\det(A) = 0$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$  (la tercera columna es de ceros) < número de incógnitas, **sistema compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones**. Por el Teorema de Rouché.

b)

Resuelve el sistema para  $m = 3$ . En este caso, ¿hay alguna solución en las que  $x = 10$ ? Razona tu respuesta.

Hemos visto en el apartado (a) que si  $m = 3$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < 3 =$  número de incógnitas, *el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución*.

Por tener rango 2 utilizamos sólo dos ecuaciones (las dos últimas)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 & (F_1 - 2F_2) \\ x + y + 7z = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} -5y - 10z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \end{cases}.$$

Llamando  $z = m \in \mathbb{R}$  tenemos  $y = -2m$ . Entrando en la segunda ecuación  $x - 2m + 7m = 0$ , de donde  $y = -5m$ , y la solución del sistema es  $(x, y, z) = (-5m, -2m, m)$ , con  $m \in \mathbb{R}$ .

Si  $x = 10 = -5m$ , tenemos  $m = -2$ , y la solución para  $x = 10$  es  $(x, y, z) = (10, 4, -2)$ :

#### Ejercicio 4 opción B, Suplente Junio 2019 (modelo 2)

Considera los puntos  $A(0,3,-1)$  y  $B(0,1,a)$  y el plano " $\pi$ " de ecuación  $x - y + z = 0$ .

(a) [0'75 puntos] Determina  $a$  sabiendo que la recta que pasa por A y B es paralela al plano " $\pi$ ".

(b) [0'75 puntos] Halla el punto de corte de la recta que pasa por A y es perpendicular a " $\pi$ ".

(b) [1 punto] Para  $a = 2$ , halla el plano que contiene a los puntos A y B y es perpendicular al plano  $\pi$ .

#### Solución

Considera los puntos  $A(0,3,-1)$  y  $B(0,1,a)$  y el plano " $\pi$ " de ecuación  $x - y + z = 0$ .

(a)

Determina  $a$  sabiendo que la recta que pasa por A y B es paralela al plano " $\pi$ ".

Sabemos que si la recta que pasa por A y B es paralelo al plano " $\pi$ ", el vector director de la recta,  $\overrightarrow{AB}$ , es perpendicular al vector normal del plano  $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$ , es decir su producto escalar ( $\bullet$ ) es cero.

$\overrightarrow{AB} \bullet \mathbf{n} = (0, -2, a+1) \bullet (1, -1, 1) = 0 + 2 + 1 + a = 0$ , de donde  $a = -3$  para que la recta y el plano sean paralelos.

(b)

Halla el punto de corte de la recta que pasa por A y es perpendicular a " $\pi$ ".

Me están pidiendo la proyección ortogonal M de A sobre " $\pi$ ", para lo cual obtenemos la plano " $r$ " perpendicular al plano " $\pi$ " por el punto A, el vector director de la perpendicular  $\mathbf{v}$  coincide con el vector normal del plano  $\mathbf{n}$ , es decir  $\mathbf{v} = \mathbf{n} = (1, -1, 1)$ . Después sustituiremos la recta en el plano y obtendremos el punto M pedido.

$$\text{La recta es } s \equiv \begin{cases} x = b \\ y = 3 - b \\ z = -1 + b \end{cases} \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo "s" en " $\pi$ " tenemos:  $b - 3 + b - 1 + b = 0 \rightarrow 3b - 4 = 0 \rightarrow b = 4/3$ , y el punto proyección M pedido es:  $M(4/3, 3 - (4/3), -1 + (4/3)) = M(4/3, 1/4, 1/3)$ .

(b)

Para  $a = 2$ , halla el plano que contiene a los puntos A y B y es perpendicular al plano  $\pi$ .

Para un plano necesitamos un punto, el  $A(0,3,-1)$ , y dos vectores linealmente independientes el  $\mathbf{AB}=(0,-2,3)$  y el  $\mathbf{n} = (1,-1,1)$  pues tiene una dirección al plano  $\pi$ .

El plano pedido en su ecuación vectorial es:  $\pi_1 \equiv \mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{AB} + \mu \mathbf{n}$ , es decir:

$\pi_1 \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (0, 3, -1) + \lambda(0, -2, 3) + \mu(1, -1, 1)$  con  $\lambda$  y  $\mu$  números reales.