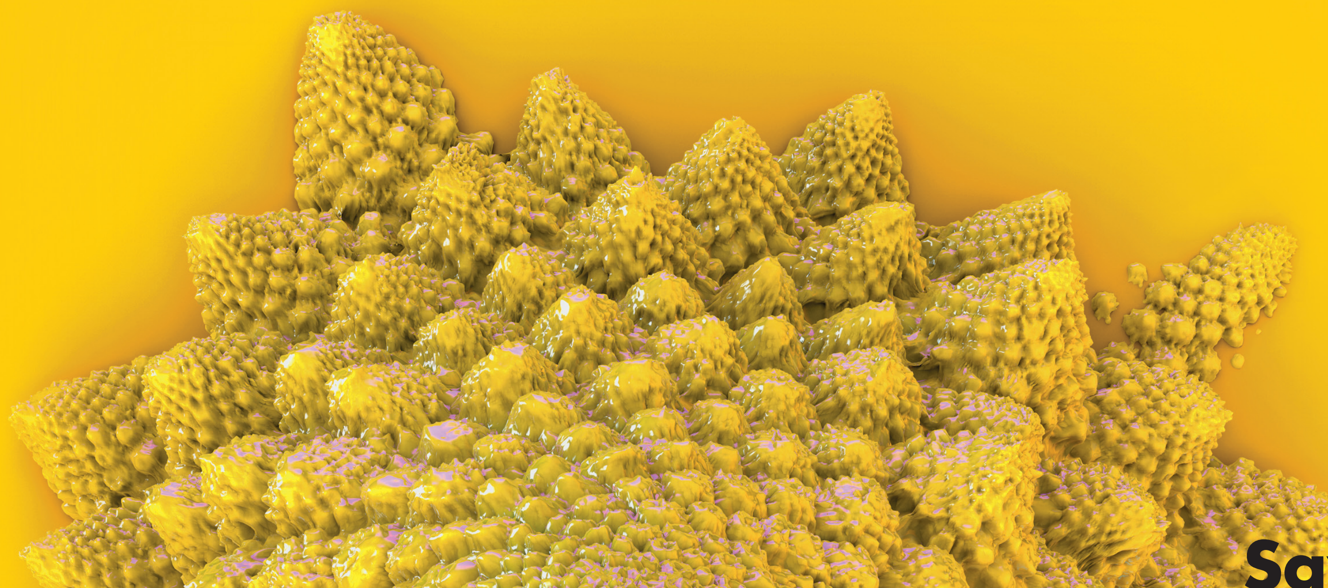
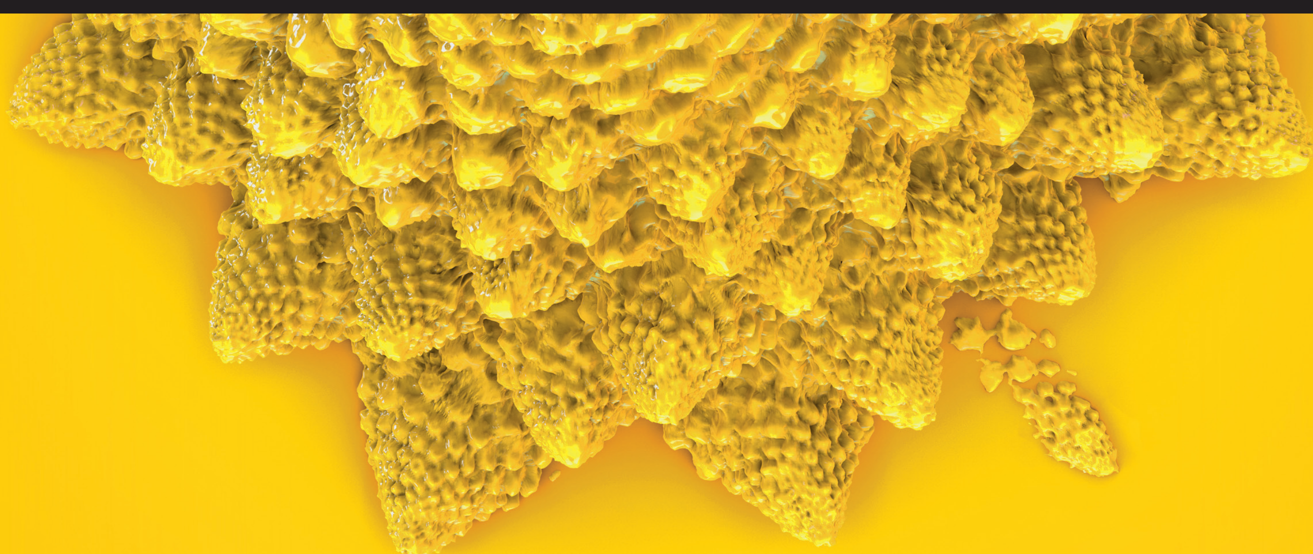


SOLUCIONARIO

matemáticas II

UNIDADES 1 -7

2 bachillerato



SOLUCIONARIO

matemáticas II

UNIDADES 1-7

2 bachillerato

Savia

SM

índice

(*) Una pequeña cantidad de ejercicios o apartados de ejercicios han sido marcados porque tienen alguna corrección en su enunciado respecto del que aparece en el libro del alumno.

1 Límites de funciones. Continuidad

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. **Ejercicios resueltos.**

3. **Estudia el dominio de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{3x^4 - 2x^2 + 6}{8}$

b) $f(x) = 2x + \sqrt{3x - \dfrac{6}{5}}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^x}$

e) $f(x) = \log\left(x^2 + 3x - 4\right)$

f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{\ln x}}$

a) $D(f) = \mathbb{R}$ porque se trata de una función polinómica.

b) $3x - \dfrac{6}{5} \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{2}{5} \Rightarrow D(f) = \left[\dfrac{2}{5}, +\infty\right)$

c) $x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3 \Rightarrow D(f) = (-\infty, 0) \cup (0,3) \cup (3, +\infty)$

d) $1 - e^x = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

e) $x^2 + 3x - 4 > 0 \Rightarrow (x-1)(x+4) > 0 \Rightarrow D(f) = (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$

f) $\ln x > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow D(f) = (1, +\infty)$

4. **Estudia el dominio de las funciones siguientes.**

a) $f(x) = x|x+1| - 3x^2$

b) $f(x) = \dfrac{|x+1| + x}{|x-1| - x}$

c) $f(x) = x + 2\cos x$

d) $f(x) = \dfrac{2x}{1 + \operatorname{sen} x}$

a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) $|x-1| - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 - x = 0 & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 1 - x = 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$. Con solución en $x = \dfrac{1}{2}$. Por tanto, $D(f) = \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

c) $D(f) = \mathbb{R}$

d) $1 + \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow$ La función existe en todo $\mathbb{R}$ excepto en $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

5. **Encuentra el dominio y el recorrido de las funciones.**

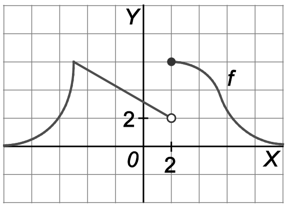
a) $f(x) = x^2 + 3$ **b)** $f(x) = 2 + \sqrt{x+1}$

a) $D(f) = \mathbb{R}$ $R(f) = [3, +\infty)$

b) $D(f) = [-1, +\infty)$ $R(f) = [2, +\infty)$

6. **Ejercicio resuelto.**

7. **Calcula los siguientes límites a partir de la gráfica de $f(x)$.**



a) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ $\lim_{x \to 2} f(x)$

b) $\lim_{x \to -5^+} f(x)$ $\lim_{x \to -5^-} f(x)$ $\lim_{x \to -5} f(x)$

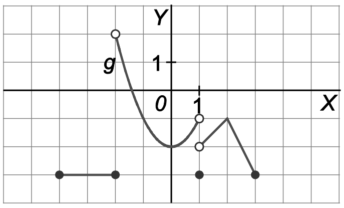
c) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ $\lim_{x \to 0} f(x)$

a) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 6$ $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$ No existe $\lim_{x \to 2} f(x)$

b) $\lim_{x \to -5^+} f(x) = 6$ $\lim_{x \to -5^-} f(x) = 6$ $\lim_{x \to -5} f(x) = 6$

c) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 3$ $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$

8. **Dada la gráfica de $g(x)$ calcula los límites pedidos.**



a) $\lim_{x \to -2^+} g(x)$ $\lim_{x \to -2^-} g(x)$ $\lim_{x \to -2} g(x)$

b) $\lim_{x \to 1^+} g(x)$ $\lim_{x \to 1^-} g(x)$ $\lim_{x \to 1} g(x)$

c) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ $\lim_{x \to 2} g(x)$

a) $\lim_{x \to -2^+} g(x) = 2$ $\lim_{x \to -2^-} g(x) = -3$ No existe $\lim_{x \to -2} g(x)$

b) $\lim_{x \to 1^+} g(x) = -2$ $\lim_{x \to 1^-} g(x) = -1$ No existe $\lim_{x \to 1} g(x)$

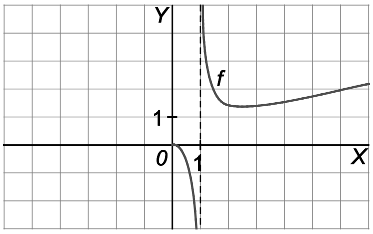
c) $\lim_{x \to 2^+} g(x) = -1$ $\lim_{x \to 2^-} g(x) = -1$ $\lim_{x \to 2} g(x) = -1$

9 y 10. Ejercicios resueltos.

11. Dada la gráfica de $f(x)$, calcula:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$



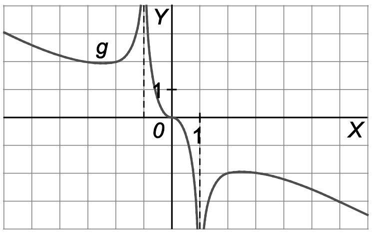
a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

12. Dada la gráfica de $g(x)$, calcula:

a) $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$



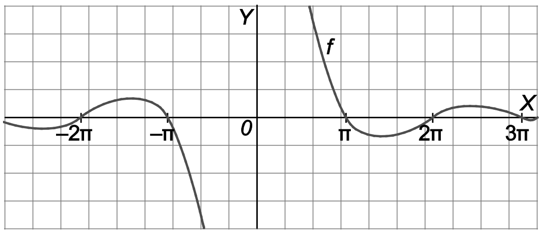
a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -1} g(x) = +\infty$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} g(x) = -\infty$

13. Dada la gráfica de $f(x)$, calcula:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$



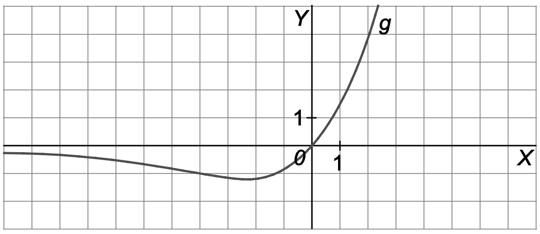
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

14. Dada la gráfica $g(x)$, calcula:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

15 a 18. Ejercicios resueltos.

19. Calcula el valor de los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 1} \frac{3x^3 - 9x^2 + 6}{x+1}$

b) $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{3x^2 - 8}}{x+2}$

c) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+1}\right)$

d) $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{1-x} - e^x + e^{-x}\right)$

a) $\lim_{x\to 1} \frac{3x^3 - 9x^2 + 6}{x+1} = \frac{0}{2} = 0$

b) $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{3x^2 - 8}}{x+2} = \frac{2}{0} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to -2^-} \frac{\sqrt{3x^2-8}}{x+2} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to -2^+} \frac{\sqrt{3x^2-8}}{x+2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$

c) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+1}\right) = +\infty + \infty = +\infty$

d) $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{1-x} - e^x + e^{-x}\right) = +\infty - 0 + \infty = +\infty$

20. Si $\lim_{x\to a} f(x) = -2$, $\lim_{x\to a} g(x) = 2$ y $\lim_{x\to a} h(x) = 2$, calcula:

a) $\lim_{x\to a} \left[2f(x) - 2g(x) + h(x)\right]$

b) $\lim_{x\to a} \frac{12}{f(x)+g(x)}$

c) $\lim_{x\to a} \sqrt{\left[f(x)\right]^2 + \left[g(x)\right]^2}$

d) $\lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)+g(x)}{h(x)}\right]$

a) $\lim_{x\to a} \left[2f(x) - 2g(x) + h(x)\right] = 2\cdot(-2) - 2\cdot 2 + 2 = -6$

b) $\lim_{x\to a} \frac{12}{f(x)+g(x)} = \frac{12}{-2+2} = \infty$

c) $\lim_{x\to a} \sqrt{\left[f(x)\right]^2 + \left[g(x)\right]^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

d) $\lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)+g(x)}{h(x)}\right] = \frac{-2}{2} - \frac{-2+2}{2} = -1 - 0 = -1$

21 y 22. Ejercicios resueltos.

23. Halla el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-4x^2+5x-2\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3-2x^2+3\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^4-3x^3-x}{-3x^3-x^2+2}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^3-3x^2+1}{3x^2-2x+5}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{2x^2+5}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{3x^2+6x-5}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+x-2}{\sqrt{2x^4+x^3-1}}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+3}-5}{\sqrt{x+5}+\sqrt[3]{1-x^2}}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-4x^2+5x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-4x^2=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3-2x^2+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}-x^3=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^4-3x^3-x}{-3x^3-x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^4}{-3x^3}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^3-3x^2+1}{3x^2-2x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^3-3x^2+1}{3x^2+2x+5}=\dfrac{+\infty}{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^3-3x^2+1}{3x^2-2x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^3}{3x^2}=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{2x^2+5}\right)=+\infty+\infty=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{3x^2+6x-5}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x-\sqrt{3x^2-6x-5}\right)=-\infty-\infty=-\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+x-2}{\sqrt{2x^4+x^3-1}}=\dfrac{+\infty}{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{\sqrt{2x^4}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+3}-5}{\sqrt{x+5}+\sqrt[3]{1-x^2}}=\dfrac{+\infty}{-\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+3}-5}{\sqrt{x+5}+\sqrt[3]{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt[3]{-x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2}x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{-1}x^{\frac{2}{3}}}=-\sqrt[3]{2}$

24. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+x-1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-\sqrt{4x^4-1}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+x-1}\right)=+\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{4x^2+x-1}\right)\left(x+\sqrt{4x^2+x-1}\right)}{\left(x+\sqrt{4x^2+x-1}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x^2-x+1}{x+\sqrt{4x^2+x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2-x+1}{x+\sqrt{4x^2+x-1}}=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-\sqrt{4x^4-1}\right)=\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-\sqrt{4x^4-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2x^2-\sqrt{4x^4-1}\right)\left(2x^2+\sqrt{4x^4-1}\right)}{\left(2x^2+\sqrt{4x^4-1}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2+\sqrt{4x^4-1}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

25. Halla los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{x^2-9}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-x-2}$ **c)** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{6+x}-2}{1-\sqrt{3+x}}$

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{x^2-9} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{x^2-9} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x-3} = -\dfrac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-x-2} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x^2-x-2)}{(x-2)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x+1} = \dfrac{0}{3} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{6+x}-2}{1-\sqrt{3+x}} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\left(\sqrt{6+x}-2\right)\left(\sqrt{6+x}+2\right)\left(1+\sqrt{3+x}\right)}{\left(1-\sqrt{3+x}\right)\left(\sqrt{6+x}+2\right)\left(1+\sqrt{3+x}\right)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(6+x-4)\left(1+\sqrt{3+x}\right)}{(1-3-x)\left(\sqrt{6+x}+2\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(2+x)\left(1+\sqrt{3+x}\right)}{-(2+x)\left(\sqrt{6+x}+2\right)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\left(1+\sqrt{3+x}\right)}{-\left(\sqrt{6+x}+2\right)} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

26. Halla el valor de m para que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x-4)\left(3mx^2+2\right)}{x^3+3} = 1$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x-4)\left(3mx^2+2\right)}{x^3+3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(-x-4)\left(3mx^2+2\right)}{-x^3+3} = \dfrac{\infty}{\infty}$, indeterminación.

Considerando los términos de mayor grado:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x-4)\left(3mx^2+2\right)}{x^3+3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3mx^3-12mx^2+2x-8}{x^3+3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3mx^3}{x^3} = 3m \Rightarrow 3m = 1 \Rightarrow m = \dfrac{1}{3}$

27. Halla el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{x-3}{2x-1}\right)^{x^2+1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2+x}\right)^{\frac{2x}{2x+1}}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x-1}{2x-3}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

a) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{x-3}{2x-1}\right)^{x^2+1} = \left(\dfrac{0}{5}\right)^{10} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2+x}\right)^{\frac{2x}{2x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2+x}\right)^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{2x+1}} = 1^1 = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x-1}{2x-3}\right)^{\frac{1}{x-2}} = 1^\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x-1}{2x-3}\right)^{\frac{1}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x-2}\left(\frac{x-1}{2x-3}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{2-x}{(2x-3)(x-2)}} = e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{-1}{(2x-3)}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

28. Calcula los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x-1}\right)^{2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{3x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-3x}{x^2-x}\right)^{x^2}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x-1}\right)^{2x+1}=1^{\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x-1}\right)^{2x+1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\left(\frac{2x+2}{2x-1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\left(\frac{3}{2x-1}\right)}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x+3}{2x-1}}=e^3$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{3x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}x^2}=1^{\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{3x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}x^2}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2\left(\frac{3x^2+x-1}{3x^2-1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2x}{6x^2-2}}=e^{+\infty}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-3x}{x^2-x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x}{x^2+x}\right)^{x^2}=1^{\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x}{x^2+x}\right)^{x^2}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{x^2+3x}{x^2+x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2 2x}{x^2+x}\right)}=e^{+\infty}=+\infty$

29. Ejercicio resuelto.

30. Calcula los siguientes límites utilizando infinitésimos.

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x(1-\cos x)}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}2x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-1}$ d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}2x}$

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x(1-\cos x)}{x^3}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$, ya que $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}2x}{x}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{x}=2$, ya que $\operatorname{sen}2x\sim2x$.

c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$, ya que $\operatorname{sen}(x-1)\sim(x-1)$.

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}2x}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{2x}=\dfrac{5}{2}$, ya que $\operatorname{tg}5x\sim5x$ y $\operatorname{tg}2x\sim2x$.

31. Halla el valor de límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\operatorname{sen}(x^3-8)}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{e^x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\operatorname{sen}(x^3-8)}{x-2}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=12$, ya que $\operatorname{sen}(x^3-8)\sim(x^3-8)$.

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{e^x-1}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}x=0$, ya que $e^x-1\sim x$.

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, ya que $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$.

32. Ejercicio interactivo.

33. Ejercicio resuelto.

34. Dada la sucesión de término general $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$:

a) Calcula sus tres primeros términos.

b) Halla el lugar que ocupa el término $a_s = \dfrac{15}{17}$.

c) Demuestra que es creciente.

d) Halla una cota superior y razona si es o no convergente.

a) $a_1 = \dfrac{0}{2} = 0,\ a_2 = \dfrac{1}{3}, a_3 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

b) $a_s = \dfrac{15}{17} = \dfrac{s-1}{s+1} \Rightarrow 15(s+1) = 17(s-1) \Rightarrow s = 16$.

c) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n}{n+2} - \dfrac{n-1}{n+1} = \dfrac{2}{n^2+3n+2} > 0$. Por tanto, $a_{n+1} > a_n$ y la sucesión es creciente.

d) $a_n = 1 - \dfrac{2}{n+1}$. Luego una cota superior es 1.

La sucesión es convergente porque es creciente y acotada superiormente.

35. Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(7-n^2\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3n^3+2n+1}{2n^2+n+10}$

a) $-\infty$

b) $-\infty$

36. Halla los límites de las sucesiones siguientes.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3-8n}{\sqrt{3}}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(2n^2+3n+5\right)\left(3n^2+5n-6\right)}{n\left(5n^3-n\right)}$

a) $+\infty$

b) $\dfrac{6}{5}$

37. Calcula el valor de los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{2n^2-5n+6}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-3}\right)^{2n^2+n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{2n^2-5n+6}\right) = \infty - \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{2n^2-5n+6}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n-\sqrt{2n^2-5n+6}\right)\left(n+\sqrt{2n^2-5n+6}\right)}{n+\sqrt{2n^2-5n+6}} =$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^2+5n-6}{n+\sqrt{2n^2-5n+6}} = -\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-3}\right)^{2n^2+n} = 1^\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n-3}\right)^{2n^2+n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^2+n\right)\left(\frac{2n+3}{2n-3}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n^2+n\right)\left(\frac{6}{2n-3}\right)} = e^{+\infty} = +\infty$

38. Ejercicio resuelto.

39. Indica si las siguientes funciones son o no continuas en el punto $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x > 2 \\ \dfrac{2}{x} + 10 & \text{si } x \le 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 + 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 6}$

d) $f(x) = \ln(3 - 2x)$

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{x} + 10\right) = 11 = f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2 - 1\right) = 11$.

Por tanto, la función es continua en $x = 2$.

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right) = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2 + 1\right) = 9 = f(2)$.

Por tanto, la función no es continua en $x = 2$.

c) El dominio es $\left[-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right]$, luego la función no existe en las proximidades de $x = 2$ y, en consecuencia, no tiene sentido hablar de continuidad o discontinuidad en $x = 2$.

d) El dominio es $\left(-\infty,\ \dfrac{3}{2}\right)$, luego la función no existe en las proximidades de $x = 2$ y, en consecuencia, no tiene sentido hablar de continuidad o discontinuidad en $x = 2$.

40. En cada uno de los siguientes casos, señala el mayor conjunto de números reales para los que la función $f(x)$ es continua.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ **c)** $f(x) = \sqrt{x+1}$ **d)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$

a) Continua en todo el conjunto de los números reales.

b) Continua en todo el conjunto de los números reales excepto en $x = 1$.

c) Continua en $[-1, +\infty)$.

d) Continua en $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, +\infty\right)$.

41. Estudia la continuidad de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x + 2 - x^2}}$ **b)** $f(x) = \log\left(x^2 + 1\right)$ **c)** $f(x) = \sqrt{2 + |2x - 3|}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

a) $x + 2 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 2)$. Por tanto, es continua en $(-1,\ 2)$.

b) $x^2 + 1 > 0$, para cualquier x. Por tanto, siempre se puede hallar su logaritmo. La función es continua en $\mathbb{R}$.

c) Para cualquier x, $2 + |2x - 3| \ge 0$ y, por tanto, siempre se puede calcular su raíz cuadrada.

d) $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$. Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R} - \{0,\ 2\}$. En $x = 2$ la función tiene una discontinuidad evitable.

42. Halla el valor o los valores de *a*, si es que existen, para que $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} ax+a & \text{si } x\le -2 \\ \dfrac{x}{x+4} & \text{si } x>-2 \end{cases}$$

a) Sea continua en $x=-2$.

b) Presente una discontinuidad evitable en $x=-2$.

c) Presente una discontinuidad de salto finito en $x=-2$.

d) Presente discontinuidad de salto infinito en $x=-2$.

a) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x}{x+4}=-1$, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(ax+a)=-a=f(-2)$. Por tanto, *f* es continua en $x=-2$ si $a=1$.

b) Para ningún valor de *a*, la función presenta una discontinuidad evitable en $x=-2$.

c) Para cualquier valor de *a* distinto de 1, la función presenta en $x=-2$ una discontinuidad de salto finito.

d) Para ningún valor de *a*, la función presenta una discontinuidad de salto infinito en $x=-2$.

43 a 45. Ejercicios resueltos.

46. Comprueba que las siguientes funciones cortan al eje *X* y, en cada caso, establece un intervalo abierto donde esté incluido el punto de corte.

a) $f(x)=x^3+3x^2+4x-7$ **b)** $f(x)=2x-\cos x$

a) Es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

$$\left.\begin{matrix} f(1)=1>0 \\ f(0)=-7<0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \exists c\in(0,1) \text{ tal que } f(c)=0.$$

b) Es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser diferencia de funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{matrix} f(1)=2-0{,}54=1{,}46>0 \\ f(0)=-1<0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \exists c\in(0,1) \text{ tal que } f(c)=0.$$

47. Demuestra que la ecuación $x^4+x-1=0$ tiene una solución positiva. Halla dicha solución con una cifra decimal exacta.

Se considera la función $f(x)=x^4+x-1$ que, por ser polinómica, es continua en todo $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{matrix} f(0)=-1<0 \\ f(1)=1>0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \exists c\in(0,\ 1) \text{ tal que } f(c)=0$$

$$\left.\begin{matrix} f(0{,}5)=-0{,}4375<0 \\ f(1)=1>0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \exists c\in(0{,}5;\ 1) \text{ tal que } f(c)=0$$

$$\left.\begin{matrix} f(0{,}5)=-0{,}4375<0 \\ f(0{,}75)=0{,}066>0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \exists c\in(0{,}5;\ 0{,}75) \text{ tal que } f(c)=0$$

$$\left.\begin{matrix} f(0{,}625)=-0{,}22<0 \\ f(0{,}75)=0{,}066>0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \exists c\in(0{,}625;\ 0{,}75) \text{ tal que } f(c)=0$$

$$\left.\begin{matrix} f(0{,}71875)=-0{,}014<0 \\ f(0{,}75)=0{,}066>0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \exists c\in(0{,}71875;\ 0{,}75) \text{ tal que } f(c)=0$$

La raíz aproximada es $x=0{,}7$.

48. Para cada una de las funciones dadas encuentra un intervalo de longitud unidad en el que se anule al menos una vez.

a) $f(x)=\sqrt{x^3+x+1}-2$

b) $f(x)=x^2-2\operatorname{sen}x$

c) $f(x)=x\ln x-1$

d) $f(x)=x\operatorname{arctg}x-1$

a) $f(x)$ es continua en $[1,\ 2]$. $\left.\begin{array}{l} f(1)=\sqrt{3}-2<0 \\ f(2)=\sqrt{11}-2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in(1,2)$ tal que $f(c)=0$

b) $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$. $\left.\begin{array}{l} f(1)=1-2\operatorname{sen}1<0 \\ f(2)=4-2\operatorname{sen}2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in(1,2)$ tal que $f(c)=0$

c) $f(x)$ es continua en $(0,+\infty)$. $\left.\begin{array}{l} f(1)=-1<0 \\ f(2)=2\ln 2-1>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in(1,2)$ tal que $f(c)=0$

d) $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$. $\left.\begin{array}{l} f(1)=\operatorname{arctg}1-1<0 \\ f(2)=2\operatorname{arctg}2-1>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in(1,2)$ tal que $f(c)=0$

49. a) Aplica el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $\cos x = x^2-1$ tiene soluciones positivas.

b) ¿Tiene la ecuación $\cos x = x^2-1$ alguna solución negativa? Razona la respuesta.

a) Se considera la función $f(x)=x^2-1-\cos x$ es continua en todo $\mathbb{R}$, por tanto, es continua en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Como $f(0)<0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$. Entonces, por el teorema de Bolzano, $\exists c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c)=0$.

b) Sí, porque aplicando el teorema de Bolzano a la función $f(x)=x^2-1-\cos x$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ se tiene que $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)>0$ y $f(0)<0$. Entonces $\exists c\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ tal que $f(c)=0$.

Se podría haber razonado diciendo que $f(x)=x^2-1-\cos x$ es par y por tanto $f(-c)=0$.

50. Dada la función $f(x)=\ln x$:

a) Comprueba que es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{n},1\right]$, para cualquier número natural *n*.

b) Halla un intervalo de la forma $\left[\frac{1}{n},1\right]$ en el que haya algún punto donde la función tome el valor −2.

a) La función $f(x)=\ln x$ es continua en todo su dominio $(0,+\infty)$ y en cualquier intervalo $\left[\frac{1}{n},1\right]$ con *n* cualquier número natural.

b) Para $n = 8$, $f\left(\frac{1}{8}\right)=\ln\frac{1}{8}=-2{,}079$ y $f(1)=\ln 1=0$. Aplicando el teorema de los valores intermedios, la función toma en $\left[\frac{1}{8},1\right]$ todos los valores entre −2,079 y 0. En particular, existe un punto donde tome el valor −2.

51. Al hacer un recorrido continuo por una carretera con una pendiente muy pronunciada, un ciclista lleva una velocidad de 8 km/h cuando pasa por el kilómetro 125 y 6 km/h cuando pasa por el kilómetro 124.

a) ¿Existe algún punto entre los dos kilómetros donde el ciclista haya llevado una velocidad de 7 km/h?

b) ¿Puede asegurarse que no ha habido ningún momento entre los dos puntos donde el ciclista haya llevado una velocidad de 20 km/h?

a) Sí, se puede asegurar gracias al teorema de los valores intermedios.

b) No se puede asegurar que no exista.

52. Ejercicio resuelto.

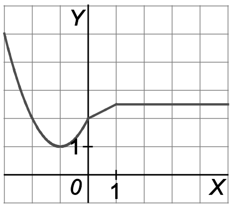
53. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+2 & \text{si } x\le 0 \\ \frac{1}{2}x+2 & \text{si } 0<x\le 1\text{:} \\ \frac{5}{2} & \text{si } x>1 \end{cases}$

a) Dibújala y estudia su acotación en los intervalos:

$[-1,1]$ $\qquad$ $[2,-2]$ $\qquad$ $[-3,3]$

b) Estudia si la función toma el valor $M = 3$ y, en caso afirmativo, indica un intervalo de longitud 1 donde haya un punto que verifique esta propiedad.

a)



La función es continua en todos los puntos.

En el intervalo $[-1,1]$ la función está acotada. El máximo vale $\frac{5}{2}$ y se alcanza en $x = 1$. El mínimo vale 1 y se alcanza en $x = -1$.

En el intervalo $[-2,2]$ la función está acotada. El máximo vale $\frac{5}{2}$ y se alcanza en cualquier punto del intervalo $[1,2]$ El mínimo vale 1 y se alcanza en $x = -1$.

En el intervalo $[-3,3]$ la función está acotada. El máximo vale 5 y se alcanza en $x = -3$. El mínimo vale 1 y se alcanza en $x = -1$.

b) Como $f(-3)=5$ y $f(-2)=2$, la función toma cualquier valor comprendido entre 5 y 2 en el intervalo $[-3,-2]$ y, por tanto, existe algún punto de $(-3,-2)$ donde la función vale 3.

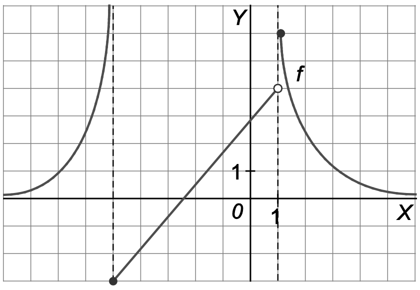
54 a 67. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

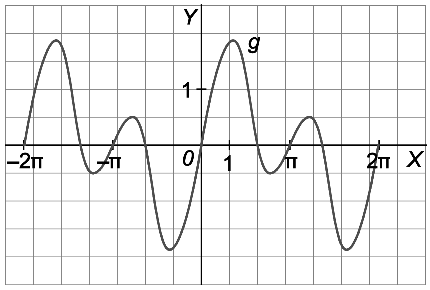
Dominio y recorrido de una función

68. *Halla el dominio y recorrido de las funciones:

a)



b)



a) Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

Recorrido: $R(f)=[-3,+\infty)$

b) Dominio: $D(g)=[-2\pi,\ 2\pi]$.

Recorrido: $R(g)=[-1{,}75;\ 1{,}75]$

69. Estudia el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3-x-1}{2x^3+x^2-20}$

b) $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$

c) $f(x)=\dfrac{1+\log\sqrt{x}}{x^2-4}$

d) $f(x)=1-\ln\left(x-|x|\right)$

e) $f(x)=\dfrac{1-\operatorname{sen}x}{\cos x}$

f) $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{e^{2x-1}+3}$

a) $2x^3+x^2-20=0\Rightarrow(x-2)\left(2x^2+5x+10\right)=0\Rightarrow x=2\Rightarrow D(f)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

b) $\begin{cases}x\geq 0\\ x^2-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x^2>1\end{cases}\Rightarrow D(f)=(1,+\infty)$.

c) $\begin{cases}x>0\\ x^2\neq 4\end{cases}\Rightarrow D(f)=(0,2)\cup(2,+\infty)$.

d) La función no existe ni para los x positivos ni para los negativos, entonces $D(f)=\varnothing$.

e) $\cos x=0\Rightarrow$ La función existe en todo $\mathbb{R}$ excepto en los $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$.

f) $x\geq 0\Rightarrow D(f)=[0,+\infty)$.

70. Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

a) Dominio: $D(f)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

Recorrido: $R(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

b) Dominio: $D(f)=(0,+\infty)$.

Recorrido: $R(f)=(0,+\infty)$.

71. Estudia el dominio de las funciones siguientes.

a) $f(x)=\dfrac{1}{-1+\sqrt{x+1}}$

b) $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

c) $f(x)=\sqrt{\left|x^2-1\right|}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x-1}}}$

a) $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ -1+\sqrt{x+1}\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow D(f)=[-1,0)\cup(0,+\infty)$.

b) $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x+2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\geq -2 \end{cases} \Rightarrow D(f)=[-1,+\infty)$.

c) Todos los valores del radicando son positivos.

Por tanto, el dominio de la función es todo $\mathbb{R}$.

d) $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 1-\sqrt{x-1}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ \sqrt{x-1}<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x<2 \end{cases} \Rightarrow D(f)=[1,\ 2)$.

Límites de funciones

72. Dada la gráfica de la función $y=f(x)$, indica, si existen, los valores de los siguientes límites. En caso de que no existan, indica los valores de los límites laterales.

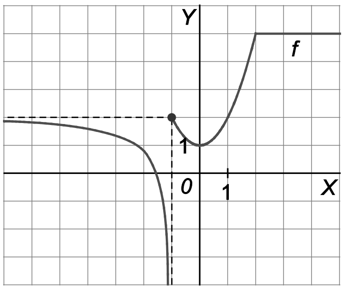
a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$



a) 2 **b)** 5 **c)** 1 **d)** $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty \Rightarrow$ No existe. **e)** 5

73. Dada la gráfica de la función $y = f(x)$, indica, si existen, los valores de los siguientes límites. En caso de que no existan, indica los valores de los límites laterales.

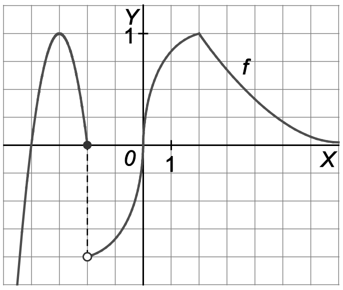
a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

d $\lim_{x \to -2} f(x)$

e) $\lim_{x \to 0} f(x)$



a) $-\infty$ **b)** 0 **c)** 1 **d)** $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -1 \Rightarrow$ No existe. **e)** 0

74. Dada la gráfica de la función $y = f(x)$, indica, si existen, los valores de los siguientes límites. En caso de que no existan, indica los valores de los límites laterales.

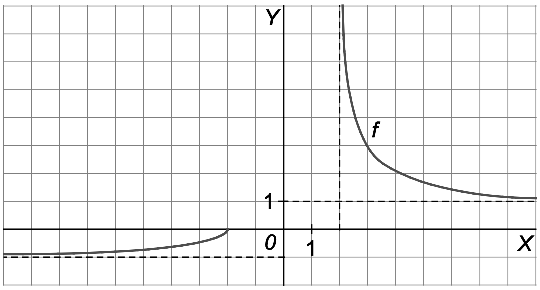
a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

d) $\lim_{x \to -2} f(x)$

e) $\lim_{x \to 0} f(x)$



a) -1

b) 1

c) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ no existe, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$ No existe.

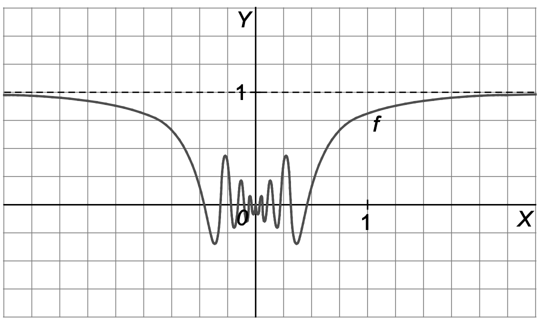
d) $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ no existe $\Rightarrow$ No existe.

e) No existen los límites laterales, entonces no existe el límite.

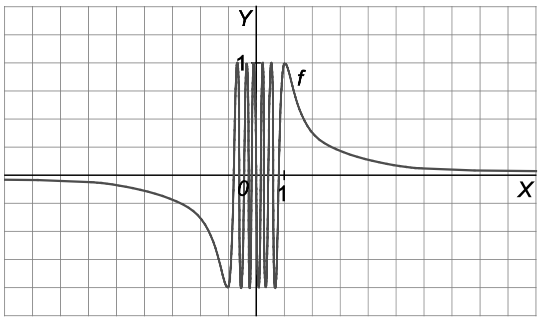
75. Dada la gráfica de las siguientes funciones, halla, si existen, los valores de los límites que se indican a continuación. En caso de que sea ese el caso, indica lo valores de los límites laterales.

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ $\lim_{x \to 0} f(x)$

a)



b)



a) 1, 1 y 0, respectivamente.

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, no existe $\lim_{x \to 0} f(x)$.

76. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{x^3}$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{0^+}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{0^+}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}=\frac{1}{0^+}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=\frac{1}{0^-}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty$, por tanto, no existe el límite.

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{0^+}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-1}{x^2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{0^+}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-1}{x^2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-1}{x^3}=\frac{-1}{0^+}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-1}{x^3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-1}{x^3}=\frac{-1}{0^-}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-1}{x^3}=+\infty$, por tanto, no existe el límite.

77. Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{\sqrt[4]{x^4-16}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{\sqrt[4]{x^4-16}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt[4]{x^4-16}}$

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{\sqrt[4]{x^4-16}}=\frac{1}{0^+}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{\sqrt[4]{x^4-16}}=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{\sqrt[4]{x^4-16}}$ no existe, ya que no están definidas las raíces de índice par de los números negativos.

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt[4]{x^4-16}}$ no existe al no existir $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{\sqrt[4]{x^4-16}}$.

78. Calcula, si existen, el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln x}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{\ln x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}$

a) 0 **c)** No existe. **e)** No existe.

b) No existe. **d)** $\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$ **f)** No existe.

79. Determina el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos x}$

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos x}=\frac{-\infty}{0^-}\Rightarrow \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos x}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos x}=\frac{+\infty}{0^+}\Rightarrow \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos x}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos x}=+\infty$

80. Halla los límites que se indican a continuación.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+5x-3}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+5x-3}}{4}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x+e^x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{3x^2+5x-3}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{3x^2+5x-3}}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x-e^{-x}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x}$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+5x-3}{4} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+5x-3}}{4} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x+e^x\right) = +\infty + \infty = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = 2^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x} = +\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{3x^2+5x-3} = 0$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{\sqrt{3x^2+5x-3}} = 0$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x-e^{-x}\right) = -\infty - \infty = -\infty$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x} = 2^{-\infty} = 0$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\infty} = +\infty$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x} = 0$

81. Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(5x^3-7x^2-1\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-2x^5+5x-6\right)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3-x^2+x-1\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{2}x^5-\dfrac{1}{3}x^2\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x^4+x^2-2x+1\right)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{2}{3}x^6+x^5-2\right)$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2x^2-2x+5\right)$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-3x^4-\dfrac{1}{3}x\right)$

a) $+\infty$ **c)** $-\infty$ **e)** $+\infty$ **g)** $+\infty$

b) $-\infty$ **d)** $+\infty$ **f)** $-\infty$ **h)** $-\infty$

82. Halla el valor de los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+x^2-1}{-x^3+3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+2x+3}{-x^2+3x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3+3}{1-x}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x^4+x^2}{3+x^3}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x+3}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+3x+2}{-3x^2+3}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3+3x^2-2}{-3x+5}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x^5+1}{5-x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+1}{x+3}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x^2+1}{x^3+x}$

a) -2 **c)** $+\infty$ **e)** 0 **g)** $-\infty$ **i)** $-\infty$

b) $-\infty$ **d)** $+\infty$ **f)** $-\dfrac{2}{3}$ **h)** $-\infty$ **j)** 0

83. Determina los siguientes límites de funciones.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+2x+3}}{2x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^3+3x-1}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^6+2x^2}}{-2x^2+1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-3x+5}{\sqrt[3]{4x^6+x^2-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{-2x^2+5}}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{3x+3}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x-1}{\sqrt{-x^3+2x}}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^6-2x^2}}{-x^2+2x-4}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-3}{\sqrt[3]{2x-3}}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^3-x+3}}{2x^2}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $-\infty$ **e)** No existe. **g)** 0 **i)** $+\infty$

b) $+\infty$ **d)** $\sqrt[3]{2}$ **f)** $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **h)** $-\infty$ **j)** 0

84. Halla los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2}{x-2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1}-\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+x+2}{x-3}-\dfrac{x^2-2x+2}{x+2}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2}{x-2}\right)=\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x^2}{x^2-3x+2}\right)=-1$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\dfrac{2}{+\infty}-\dfrac{2}{+\infty}=0-0=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1}-\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}\right)=\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-1}-\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-4x^4+2x^3}{x^4-1}\right)=-4$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+x+2}{x-3}-\dfrac{x^2-2x+2}{x+2}\right)=-\infty+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+x+2}{x-3}-\dfrac{x^2-2x+2}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{8x^2-4x+10}{x^2-x-6}\right)=8$

85. Calcula el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+x-3}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+5}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2+x+5}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+x-3}\right)=\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+x-3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2x-\sqrt{x^2+x-3}\right)\left(2x+\sqrt{x^2+x-3}\right)}{2x+\sqrt{x^2+x-3}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-x^2-x+3}{2x+\sqrt{x^2+x-3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x+3}{2x+\sqrt{x^2+x-3}}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+5}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)=\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+5}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{2x^2-3x+5}-\sqrt{2x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2+x+1}\right)}{\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2+x+1}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x+4}{\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2+x+1}}=-\dfrac{4}{2\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2+x+5}\right)=\infty-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2+x+5}\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2+x+5}\right)\left(\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+x+5}\right)}{\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+x+5}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+x+5}}=\dfrac{3}{2}$

86. Determina los siguientes límites de funciones distinguiendo, si es necesario, los dos límites laterales.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+1}{3-x}$

c) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-7x+16}{x^2-2x-24}$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125}$

e) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x-1}$

g) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+1}{x+3}$

h) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-4}$

i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}{x^2+2x+1}$

j) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}$

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+1}=\dfrac{0}{2}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+1}{3-x}=\dfrac{7}{0}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x+1}{3-x}==\dfrac{7}{0^-}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x+1}{3-x}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x+1}{3-x}==\dfrac{7}{0^+}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x+1}{3-x}=+\infty\end{cases}$ Por tanto, no existe el límite.

c) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-7x+16}{x^2-2x-24}=\dfrac{60}{0}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x^2-7x+16}{x^2-2x-24}=\dfrac{60}{0^-}\Rightarrow\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x^2-7x+16}{x^2-2x-24}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{x^2-7x+16}{x^2-2x-24}=\dfrac{60}{0^+}\Rightarrow\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{x^2-7x+16}{x^2-2x-24}=+\infty\end{cases}$ Por tanto, no existe límite.

d) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125}=\dfrac{74}{0}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125}=\dfrac{74}{0^+}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125}=\dfrac{74}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125}=\dfrac{74}{0^+}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125}=\dfrac{74}{0^+}=+\infty\end{cases}.$

Luego $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2+5x-1}{x^3-5x^2-25x+125}=+\infty$.

e) Si $a\neq 0$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}=\dfrac{0}{2a^2}$ Si $a=0$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}1=1$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\dfrac{2}{0}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\dfrac{2}{0^+}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+1}{x-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\dfrac{2}{0^-}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{x-1}=-\infty\end{cases}$ Por tanto, no existe límite.

g) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+1}{x+3}=\dfrac{-5}{0}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{2x+1}{x+3}=\dfrac{-5}{0^+}\Rightarrow\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{2x+1}{x+3}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{2x+1}{x+3}=\dfrac{-5}{0^-}\Rightarrow\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{2x+1}{x+3}=+\infty\end{cases}$ Por tanto, no existe límite.

h) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-4}=\dfrac{0}{5}=0$

i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+1)^4}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to -2}(x+1)^2=1$

j) Si a = 0, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$ Si a > 0, $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=\dfrac{2a^2}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=\dfrac{2a^2}{0^-}=-\infty\end{cases}$ Si a < 0, $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=\dfrac{2a^2}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=\dfrac{2a^2}{0^+}=+\infty\end{cases}$

Por tanto, no existe límite si $a\neq 0$.

87. Calcula los siguientes límites, resolviendo los límites laterales en los casos en que sea necesario.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x-21}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x-18}{x^3-27}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^3-x^2-8x+12}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+2x^3-x-2}{x^3+2x^2-x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+3x^2-24x-80}{x^2+x-12}$

g) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^2-2x+1}$

h) $\lim\limits_{x\to -1}\left((x+1)\dfrac{3x+2}{x^3+x^2}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x-21}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+4x-21}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+7)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x+7}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x-18}{x^3-27}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x-18}{x^3-27}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+6)}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+6}{x^2+3x+9}=\dfrac{9}{27}=\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^3-x^2-8x+12}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^3-x^2-8x+12}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+5)}{(x-2)^2(x+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+5}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{7}{0}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+5}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{7}{0^+}=+\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+5}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{7}{0^-}=-\infty\end{cases}$ Por tanto, no existe límite.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^3(x+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{1}{0}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{1}{0^+}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=+\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{1}{0^-}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=-\infty\end{cases}$ Por tanto, no existe límite.

e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+2x^3-x-2}{x^3+2x^2-x-2}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)\left(x^3-1\right)}{(x+2)\left(x^2-1\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{-8-1}{4-1}=-3$

f) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+3x^2-24x-80}{x^2+x-12}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x+4)^2(x-5)}{(x+4)(x-3)}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x+4)(x-5)}{x-3}=\dfrac{0}{-7}=0$

g) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^2-2x+1}=\dfrac{-8}{4}=-2$

h) $\lim\limits_{x\to -1}\left((x+1)\dfrac{3x+2}{x^3+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(3x+2)}{x^2(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x+2}{x^2}=-1$

88. Calcula:

a) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ **c)** $\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x+5}}$ **e)** $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{4-\sqrt{x+13}}$

b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}$ **d)** $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}$ **f)** $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x^2+3a^2}-2a}{x-a}$, $a>0$

a) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$

$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}$

b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{\left(3-\sqrt{x+7}\right)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}=$

$=\lim_{x\to 2}\frac{-(x+2)(x-2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}-(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)=-24$

c) $\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x+5}}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x+5}}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x+5}\right)}{\left(3-\sqrt{x+5}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x+5}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{x+5}\right)}{(4-x)\left(2+\sqrt{x}\right)}=$

$\lim_{x\to 4}\frac{3+\sqrt{x+5}}{2+\sqrt{x}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

d) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{\left(2-\sqrt{x+3}\right)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{4-x-3}=$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{1-x}=\lim_{x\to 1}-\left(2+\sqrt{x+3}\right)=-4$

e) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{4-\sqrt{x+13}}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{4-\sqrt{x+13}}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)\left(4+\sqrt{x+13}\right)}{\left(4-\sqrt{x+13}\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)\left(4+\sqrt{x+13}\right)}=$

$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(4+\sqrt{x+13}\right)}{(3-x)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(4+\sqrt{x+13}\right)}{-(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{4+\sqrt{x+13}}{-\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\frac{8}{-6}=-\frac{4}{3}$

f) $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x^2+3a^2}-2a}{x-a}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x^2+3a^2}-2a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x^2+3a^2}-2a\right)\left(\sqrt{x^2+3a^2}+2a\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x^2+3a^2}+2a\right)}=$

$=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{(x-a)\left(\sqrt{x^2+3a^2}+2a\right)}=\lim_{x\to a}\frac{(x+a)(x-a)}{(x-a)\left(\sqrt{x^2+3a^2}+2a\right)}=\lim_{x\to a}\frac{x+a}{\sqrt{x^2+3a^2}+2a}=\frac{2a}{4a}=\frac{1}{2}$

89. Halla los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3-2x}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x+3}}$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}\right)^{\frac{x^2}{2x-4}}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+3}{3x^2+5}\right)^{2\sqrt{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1+x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{sen} x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1+\ln x}{x-1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

f) $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{4-x}{x^2-1}\right)^{\frac{2x}{2x+1}}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{2x^2+3}\right)^{\frac{2x+1}{x}}$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2-3x}{x^2-4}\right)^{2x^2+1}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos x+\cos^2 x}\right)^{\cos 2x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}}{3}\right)^{x}$

a) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3-2x}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x+3}}=\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{2}{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}\right)^{\frac{x^2}{2x-4}}=\left(\dfrac{5}{0^+}\right)^{\frac{4}{0^+}}=(+\infty)^{+\infty}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+3}{3x^2+5}\right)^{2\sqrt{x}}=0^{+\infty}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1+x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{sen} x}}=1^1=1$

e) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1+\ln x}{x-1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\left(\dfrac{1}{0^+}\right)^{\frac{1}{0^+}}=(+\infty)^{+\infty}=+\infty$

f) $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{4-x}{x^2-1}\right)^{\frac{2x}{2x+1}}=\left(\dfrac{5}{0^+}\right)^{2}=+\infty$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{2x^2+3}\right)^{\frac{2x+1}{x}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}=\dfrac{1}{4}$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2-3x}{x^2-4}\right)^{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x+2}{x^2-4}\right)^{2x^2+1}=0^{+\infty}=0$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos x+\cos^2 x}\right)^{\cos 2x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1}=\dfrac{1}{2}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}}{3}\right)^{x}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{0}=1$

90. Determina el valor de los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^{x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+5x}{2x^2+3x}\right)^{x^2+2x}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-3}\right)^{x^2+3}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}}{2}\right)^{\frac{1}{e^x}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+4x}{x^3+2}\right)^{2x-4}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{-x}+1}{\sqrt{-x}}\right)^{\sqrt{-x}}$

h) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{-x}}{2-e^{-x}}\right)^{x}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^{x+3}=1^{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^{x+3}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)\left(\frac{x+4}{x+3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)\left(\frac{1}{x+3}\right)}=e^1=e$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+5x}{2x^2+3x}\right)^{x^2+2x}=1^{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+5x}{2x^2+3x}\right)^{x^2+2x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2x)\left(\frac{2x^2+5x}{2x^2+3x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2x)\left(\frac{2x}{2x^2+3x}\right)}=e^{+\infty}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-3}\right)^{x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-2x+3}{-2x-3}\right)^{x^2+3}=1^{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-3}\right)^{x^2+3}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3)\left(\frac{-2x+3}{-2x-3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3)\left(\frac{6}{-2x-3}\right)}=$

$=e^{-\infty}=0$

d) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}}{2}\right)^{\frac{1}{e^x}}=1^1=1$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+4x}{x^3+2}\right)^{2x-4}=1^{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+4x}{x^3+2}\right)^{2x-4}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4)\left(\frac{x^3+4x}{x^3+2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4)\left(\frac{4x-2}{x^3+2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8x^2-20x+8}{x^3+2}}=e^0=1$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}=1^{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{2\sqrt{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2\sqrt{x})\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{x-\sqrt{x}}\right)}=e^4$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{-x}+1}{\sqrt{-x}}\right)^{\sqrt{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}=1^{+\infty}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\sqrt{-x}+1}{\sqrt{-x}}\right)^{\sqrt{-x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x})\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x})\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}=e^1=e$

h) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{-x}}{2-e^{-x}}\right)^{x}=1^0=1$

91. Utilizando infinitésimos, halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{2x^2-1}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}^2 2x}{x^2+2x+5}$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\ln(1+x)}$

d) $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1+\text{sen}\,x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim_{x\to 0}(1+\text{sen}\,x)^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}$

g) $\lim_{x\to 0}2x^2\cdot\text{cotg}^2 x$

h) $\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{[\ln(1+x)]^2}$

i) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

j) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{2x^2-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2-1}=\frac{0}{-1}=0$, ya que $x\sim\text{sen}\,x$ si $x\to 0$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}^2 2x}{x^2+2x+5}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2+2x+5}=\frac{0}{5}=0$, ya que $2x\sim\text{tg}\,2x$ si $x\to 0$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x}=4$, ya que $x\sim\ln(1+x)$ si $x\to 0$

d) $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1+\text{sen}\,x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}=2^{+\infty}=+\infty$, ya que $1+x\sim 1+\text{sen}\,x$ si $x\to 0$

e) $\lim_{x\to 0}(1+\text{sen}\,x)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}\Rightarrow\lim_{x\to 0}(1+\text{sen}\,x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1+\text{sen}\,x-1)}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\text{sen}\,x)}=e^1=e$, ya que $1+x\sim 1+\text{sen}\,x$ si $x\to 0$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}(1+\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{2}=\frac{2}{2}=1$

ya que $\frac{x^2}{2}\sim 1-\cos x$ si $x\to 0$

g) $\lim_{x\to 0}2x^2\cdot\text{cotg}^2 x=0\cdot\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0}2x^2\cdot\text{cotg}^2 x=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{\text{tg}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=2$, ya que $x\sim\text{tg}\,x$ si $x\to 0$

h) $\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{[\ln(1+x)]^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{x^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$, ya que $x\sim\ln(1+x)$ si $x\to 0$

i) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\frac{x^2}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2-x^2}{4}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}=0$, ya que $\cos x\sim 1-\frac{x^2}{2}$ si $x\to 0$

j) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=1^{\infty}\Rightarrow\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\cos x-1)}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$,

ya que $\frac{x^2}{2}\sim 1-\cos x$ si $x\to 0$

92. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-b\cos x}{x}$ es finito:

a) Calcula el valor de *b*.

b) Para ese valor de *b*, calcula el valor del límite.

a) $b = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2} = 0$

Límites de sucesiones

93. Estudia la monotonía y la acotación de las siguientes sucesiones.

$$a_n = \frac{2n+3}{n^2} \qquad b_n = \frac{2n^2-3}{n^2} \qquad c_n = \frac{2n+3}{2^n}$$

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{2(n+1)+3}{(n+1)^2} - \dfrac{2n+3}{n^2} = -\dfrac{2n^2+8n+3}{n^2(n+1)} < 0 \Rightarrow$ Es decreciente.

$a_n = \dfrac{2n+3}{n^2} > 0 \Rightarrow$ Acotada superiormente por $a_1 = 5$ e inferiormente por 0.

$b_{n+1} - b_n = \dfrac{2(n+1)^2-3}{(n+1)^2} - \dfrac{2n^2-3}{n^2} = \dfrac{2n^2+4n-1}{(n+1)^2} - \dfrac{2n^2-3}{n^2} = \dfrac{3(2n+1)}{n^2(n+1)^2} > 0 \Rightarrow$ Es creciente.

$b_n = \dfrac{2n^2-3}{n^2} = 2 - \dfrac{3}{n^2} < 2 \Rightarrow$ Acotada superiormente por 2 e inferiormente por $b_1 = -1$.

$c_{n+1} - c_n = \dfrac{2(n+1)+3}{2^{n+1}} - \dfrac{2n+3}{2^n} = \dfrac{2n+5-4n-6}{2^{n+1}} = -\dfrac{2n+1}{2^{n+1}} < 0 \Rightarrow$ Es decreciente.

$c_n = \dfrac{2n+3}{2^n} > 0 \Rightarrow$ Acotada superiormente por $c_1 = \dfrac{5}{2}$ e inferiormente por 0.

94. Calcula los límites de las siguientes sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+2n-3}{n^3+n^2}$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+3}{4n+3}}$ **g)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$ **j)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+n-3}{2n^2-n-3}\right)^{3n+\frac{1}{3}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+2n^2-3}{n^2-2n+3}$ **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+5}{n-7}\right)^{\frac{3n+1}{2n+1}}$ **h)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-3}{2n+3}\right)^{2n+1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+3}{n^2-1}\cdot\dfrac{n+1}{5}\right)$ **f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2+1}-n\right)$ **i)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-n}{n^2+1}\right)^{n^2+2n+1}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+2n-3}{n^3+n^2} = \dfrac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+2n-3}{n^3+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{0}{1} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+2n^2-3}{n^2-2n+3} = \dfrac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+2n^2-3}{n^2-2n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+2-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}} = \dfrac{+\infty}{1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+3}{n^2-1}\cdot\dfrac{n+1}{5}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+5n+3}{5n^2-5n}\right) = \dfrac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+5n+3}{5n^2-5n}\right) = \dfrac{2}{5}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+3}{4n+3}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{4n+3}} = \sqrt{\dfrac{\infty}{\infty}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+3}{4n+3}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{3}{n}}{4+\frac{3}{n}}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+5}{n-7}\right)^{\frac{3n+1}{2n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+5}{n-7}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2+1}-n\right) = \infty-\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{2n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{2n^2+1}+n\right)}{\left(\sqrt{2n^2+1}+n\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1-n^2}{\sqrt{2n^2+1}+n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{\sqrt{2n^2+1}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+1} = \dfrac{+\infty}{\sqrt{2}+1} = +\infty$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right) = \infty-\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\left(\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+1}\right)} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \dfrac{+\infty}{2} = +\infty$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-3}{2n+3}\right)^{2n+1} = 1^{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-3}{2n+3}\right)^{2n+1} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)\left(\frac{2n-3}{2n+3}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)\left(\frac{-6}{2n+3}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-12n-6}{2n+3}} = e^{-6}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-n}{n^2+1}\right)^{n^2+2n+1} = 1^{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-n}{n^2+1}\right)^{n^2+2n+1} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+2n+1\right)\left(\frac{n^2-n}{n^2+1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+2n+1\right)\left(\frac{-n-1}{n^2+1}\right)} = e^{-\infty} = 0$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+n-3}{2n^2-n-3}\right)^{3n+\frac{1}{3}} = 1^{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+n-3}{2n^2-n-3}\right)^{3n+\frac{1}{3}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2n^2+n-3}{2n^2-n-3}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2n}{2n^2-n-3}\right)} = e^{3}$

Continuidad de una función

95. Indica si las siguientes funciones son o no continuas en el punto o puntos que se indican.

a) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2-3x+2}$ en $x=2$

b) $f(x)=\dfrac{x}{2-\sqrt{3-2x}}$ en $x=\dfrac{3}{2}$

c) $f(x)=\ln\left(2x^2+4x-6\right)$ en $x=-3$

d) $f(x)=\ln\left(2x^2+4x-6\right)$ en $x=0$

e) $f(x)=\ln\left|2x^2+4x-6\right|$ en $x=0$

f) $f(x)=\operatorname{tg}x$ en $x=\pi$ y en $x=\dfrac{\pi}{2}$

a) No es continua en $x=2$ porque $f(x)$ no está definida en $x=2$, ya que en dicho punto, el denominador se anula.

b) Es continua por la izquierda porque $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{\frac{3}{2}}{2-\sqrt{3-2\cdot\frac{3}{2}}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{2}=\dfrac{3}{4}$ y $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-}f(x)=\dfrac{\frac{3}{2}}{2-\sqrt{3-2\cdot\frac{3}{2}}}=\dfrac{3}{4}$, pero no por la derecha porque $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}f(x)=\dfrac{\frac{3}{2}}{2-\sqrt{0^-}}$ que no existe.

c) No es continua en $x=-3$ que no existe el logaritmo de cero.

d) No es continua ni discontinua en $x=0$ ya que no hay función en $[-3,1]$ porque no existe el logaritmo de los números negativos.

e) Sí, es continua en $x=0$ ya que $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\ln|-6|=\ln 6$.

f) Sí, es continua en $x=\pi$ ya que $f(\pi)=\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=\operatorname{tg}\pi=0$.

No es continua en $x=\dfrac{\pi}{2}$ porque no existe la $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ y además $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\operatorname{tg}x=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\operatorname{tg}x=+\infty$.

96. Traza la gráfica de las siguientes funciones definidas a trozos, indica su dominio y estudia su continuidad, especificando, en su caso, el tipo de discontinuidad.

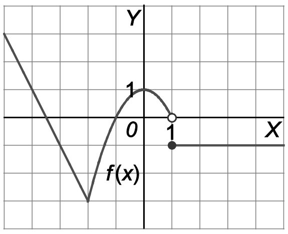
a) $f(x)=\begin{cases}-2x-7 & \text{si } x\leq -2\\ 1-x^2 & \text{si } -2<x<1\\ -1 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & \text{si } x<-1\\ x^2 & \text{si } -1\leq x\leq 2\\ -x+6 & \text{si } x>2\end{cases}$

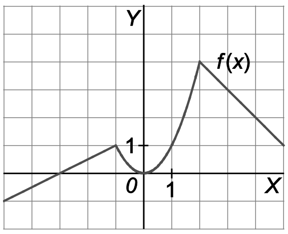
c) $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<-1\\ x^3 & \text{si } -1\leq x\leq 1\\ -x^2+4x-2 & \text{si } x>1\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+2 & \text{si } x<-1\\ 5-x^2 & \text{si } -1\leq x\leq 2\\ \frac{2}{x} & \text{si } x>2\end{cases}$

a) Es continua en todos los puntos excepto en $x=1$ donde presenta un punto de discontinuidad no evitable de salto finito.



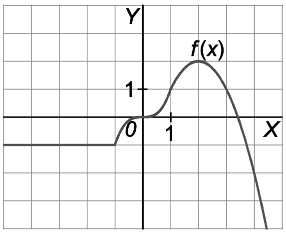
b) Es continua en todo el conjunto de los números reales.



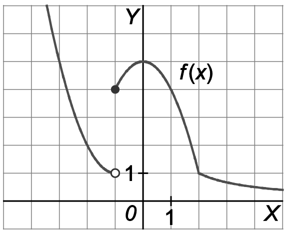
c) $\lim_{x\to -1^+} f(x)=-1,\ \lim_{x\to -1^-} f(x)=-1,\ f(-1)=-1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=1,\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=1,\ f(1)=1$

La función es continua en 1 y –1, luego, en todo $\mathbb{R}$.



d) Es continua en todos los puntos excepto en $x=-1$ donde se presenta un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.



97. Estudia la continuidad de las siguientes funciones estableciendo en cada caso el subconjunto de números reales más amplio posible donde la función sea continua.

a) $f(x)=\dfrac{3x+4}{x^4+x^2+4}$ **e)** $f(x)=\dfrac{2x+x^2}{3-\sqrt{x+4}}$ **i)** $f(x)=xe^x$ **m)** $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$

b) $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^3-x-6}$ **f)** $f(x)=\sqrt{x^3-3x+2}$ **j)** $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ **n)** $f(x)=\dfrac{1}{1-2\cos^2 x-\operatorname{sen} x}$

c) $f(x)=e^{-x^2}+x\cos x$ **g)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x+2}}$ **k)** $f(x)=x^2\ln(x-1)$

d) $f(x)=e^{2x^2}+2xe^x+3$ **h)** $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$ **l)** $f(x)=\dfrac{x}{1+\ln x}$

a) La función es continua en $\mathbb{R}$ excepto en aquellos puntos en que se anula el denominador.

$x^4+x^2+4=0\Rightarrow x^2=\dfrac{-1\pm\sqrt{-15}}{2}\Rightarrow$ No existe ningún real que anule el denominador, es continua en $\mathbb{R}$.

b) La función es continua en $\mathbb{R}$ excepto en aquellos puntos en que se anula el denominador.

$x^3-x-6=0\Rightarrow(x-2)(x^2+2x+3)=0\Rightarrow x=2$. Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$.

c) La función es continua en $\mathbb{R}$ ya que es suma y producto de funciones continuas en $\mathbb{R}$.

d) La función es continua en $\mathbb{R}$ ya que es suma y producto de funciones continuas en $\mathbb{R}$.

e) $3-\sqrt{x+4}=0\Rightarrow\sqrt{x+4}=3\Rightarrow x+4=9\Rightarrow x=5$

$\begin{cases}x+4\geq 0\\ 3-\sqrt{x+4}\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq -4\\ x\neq 5\end{cases}\Rightarrow$ Es continua en $(-4,5)\cup(5,+\infty)$. Además es continua en $x=-4$ por la derecha.

f) Solo existe la raíz cuadrada de los números positivos o nulos. Por tanto:

$x^3-3x+2\geq 0\Rightarrow(x+2)(x-1)^2\geq 0\Rightarrow x+2\geq 0\Rightarrow x\geq -2\Rightarrow$ La función es continua en $(-2,+\infty)$. Además, es continua en $x=2$ por la derecha.

g) $\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x+2}\geq 0\\ x\neq -2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x+2}\geq 0\\ x\neq -2\end{cases}\Rightarrow$ La función es continua en $(-2,1]\cup[2,+\infty)$.

Además, es continua en $x=1$ por la izquierda y en $x=2$ por la derecha.

h) Las raíces cúbicas están definidas tanto para números positivos como para números negativos. La función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$.

i) La función es continua en todo $\mathbb{R}$ ya que es producto de funciones continua en todo $\mathbb{R}$.

j) $\begin{cases}x>0\\ \ln x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow$ Continua en $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

k) La función es continua en todo el dominio de definición del logaritmo neperiano, que, dado que $x-1>0$, implica que $x>1$, es, en este caso, el intervalo $(1,+\infty)$.

l) $\begin{cases}x>0\\ 1+\ln x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq\dfrac{1}{e}\end{cases}\Rightarrow$ La función es continua en $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\cup\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

m) $\cos x\neq 0\Rightarrow$ La función es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en los puntos de la forma $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$.

n) $1-2\cos^2 x-\operatorname{sen}x=0\Rightarrow -2+2\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}x+1=0\Rightarrow 2\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}x-1=0\Rightarrow\operatorname{sen}x=1,\operatorname{sen}x=-\dfrac{1}{2}$

Por tanto, la función es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en los puntos $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi$, $x=\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$.

98. Calcula el valor o los valores que se deben dar a *k* para que las siguientes funciones sean continuas en todo el conjunto de números reales.

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+1 & \text{si } x\le -2\\ 2x+k & \text{si } x>-2\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2-2k & \text{si } x\le 1\\ x^2-3x-k & \text{si } x>1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x^2+kx & \text{si } x<3\\ \ln(x-2) & \text{si } x\ge 3\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}kx^2-1 & \text{si } x\le 3\\ e^{x^2-9} & \text{si } x>3\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3} & \text{si } x\ne 3\\ 2k-3 & \text{si } x=3\end{cases}$

a) $\frac{1}{2}\cdot(-2)^2+1=2\cdot(-2)+k\Rightarrow k=7$.

Para $k=7$: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)=3$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(2x+7)=3$ y $f(-2)=3$. Luego la función es continua en $x=-2$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$

b) $1-2k=-2-k\Rightarrow k=3$.

Para $k=3$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-6)=-5$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-3x-3)=-5$ y $f(1)=-5$. Luego la función es continua en $x=1$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

c) $9+3k=\ln 1=0\Rightarrow k=-3$.

Para $k=-3$: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-3x)=0$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\ln(x-2)=0$ y $f(3)=0$. Luego la función es continua en $x=3$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

d) $9k-1=e^0=1\Rightarrow k=\frac{2}{9}$.

Para $k=\frac{2}{9}$: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\frac{2}{9}x^2-1\right)=1$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} e^{x^2-9}=1$ y $f(3)=1$. Luego la función es continua en $x=3$ y, por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

e) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{1}{4}$. Por tanto, $2k-3=\frac{1}{4}\Rightarrow k=\frac{13}{8}$.

99. Expresa las siguientes funciones como funciones definidas a trozos y estudia su continuidad.

a) $f(x)=|x-2|$

b) $f(x)=2x+|x-2|$

c) $f(x)=|x-2|+|x+1|$

d) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{|x+1|}$

e) $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2+|x+1|}$

f) $f(x)=e^{2|x|+1}$

a) $f(x)=|x-2|=\begin{cases}2-x & \text{si } x<2\\ x-2 & \text{si } x\geq 2\end{cases}\Rightarrow$ Continua en todo $\mathbb{R}$.

b) $f(x)=2x+|x-2|=\begin{cases}2x-x+2 & \text{si } x<2\\ 2x+x-2 & \text{si } x\geq 2\end{cases}=\begin{cases}x+2 & \text{si } x<2\\ 3x-2 & \text{si } x\geq 2\end{cases}\Rightarrow$ Continua en todo $\mathbb{R}$.

c) $f(x)=|x-2|+|x+1|=\begin{cases}-2x+1 & \text{si } x<-1\\ 3 & \text{si } -1\leq x\leq 2\\ 2x-1 & \text{si } x>2\end{cases}\Rightarrow$ Continua en todo $\mathbb{R}$.

d) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{|x+1|}=\begin{cases}\dfrac{x(x+1)}{-(x+1)} & \text{si } x<-1\\ \dfrac{x(x+1)}{x+1} & \text{si } x>-1\end{cases}=\begin{cases}-x & \text{si } x<-1\\ x & \text{si } x>-1\end{cases}\Rightarrow$ Continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en $x=-1$.

e) $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2+|x+1|}=\begin{cases}0 & \text{si } x<-1\\ 0 & \text{si } -1\leq x\leq 0\\ \dfrac{2x}{x+3} & \text{si } x>0\end{cases}=\begin{cases}0 & \text{si } x\leq 0\\ \dfrac{2x}{x+3} & \text{si } x>0\end{cases}\Rightarrow$ Continua en todo $\mathbb{R}$.

f) $f(x)=e^{2|x|+1}=\begin{cases}e^{-2x+1} & \text{si } x<0\\ e^{2x+1} & \text{si } x\geq 0\end{cases}\Rightarrow$ Continua en todo $\mathbb{R}$.

Teorema de Bolzano y teorema de los valores intermedios

100. Comprueba que las siguientes funciones cortan al eje *X* en al menos un punto, e indica un intervalo de extremos de números enteros consecutivos al cual pertenezca dicho punto.

a) $f(x)=2x^4-x^3+x^2-1$

b) $f(x)=\cos x-x+1$

c) $f(x)=xe^x-x-16$

d) $f(x)=x^3+x^2-\cos\pi x+2$

a) $f(0)=-1<0, f(1)=1>0\Rightarrow$ La función corta al eje *X* en un punto del intervalo $(0,1)$.

b) $f(1)=\cos 1>0, f(2)=\cos 2-1<0\Rightarrow$ La función corta al eje *X* en un punto del intervalo $(1,2)$.

c) $f(2)=2e^2-18<0, f(3)=3e^3-19>0\Rightarrow$ La función corta al eje *X* en un punto del intervalo $(2,3)$.

d) $f(-2)=-4-1+2<0, f(-1)=3>0\Rightarrow$ La función corta al eje *X* en un punto del intervalo $(-2,-1)$.

101. Comprueba que las siguientes funciones toman el valor *M* indicado en algún punto del intervalo propuesto.

a) $f(x) = x^5 - x^3 - x + 5$; $M = -1$ en $(-2,-1)$

b) $f(x) = xe^{-x} + 3$; $M = \dfrac{3}{2}$ en $(-1,0)$

c) $f(x) = \text{sen}\,x - \cos x + 2$; $M = 3$ en $(1,2)$

a) $f(-2) = -17, f(-1) = 6$. En $(-2,-1)$ toma todos los valores comprendidos entre –17 y 6.

En particular, toma el valor –1.

b) $f(-1) = 0{,}2817, f(0) = 3$. En $(-1,0)$ toma todos los valores comprendidos entre 0,2817 y 3.

En particular, toma el valor 1,5.

c) $f(1) = 2{,}3, f(2) = 3{,}32$. En $(1,2)$ toma todos los valores comprendidos entre 2,3 y 3,32.

En particular, toma el valor 3.

De otra forma y sin calculadora: $\dfrac{\pi}{2} \in (1,\ 2)$ y $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 + 2 = 3 = M$

102. Para cada una de las siguientes funciones, y considerando el intervalo señalado, estudia, si es acotada, e indica el valor del supremo, ínfimo, máximo y mínimo, si es que existen.

a) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ en $[1,3]$

b) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$ en $[-1,0]$

c) $f(x) = \dfrac{x}{2x - 4}$ en $[-2,1]$

d) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$ en $[-2,0]$

e) $f(x) = x^2 + 5x - 6$ en $(-3,0)$

f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$ en $(0,1]$

a) La función es continua en un intervalo cerrado. Por Weierstrass, existe máximo y mínimo. Supremo y máximo en $x = 2{,}5$ y vale $M = 0{,}25$. Ínfimo y mínimo en $x = 1$ y vale $m = -2$.

b) La función es continua en un intervalo cerrado. Por Weierstrass, existe máximo y mínimo. Supremo y máximo en $x = -1$ y vale $M = 0$. Ínfimo y mínimo en $x = 0$ y vale $m = -1$

c) La función es continua en un intervalo cerrado. Por Weierstrass, existe máximo y mínimo. Supremo y máximo en $x = -2$ y vale $M = 0{,}25$. Ínfimo y mínimo en $x = 1$ y vale $m = -0{,}5$.

d) La función no es acotada ni superiormente ni inferiormente. Por tanto, no posee ni ínfimo, ni mínimo, ni supremo ni máximo.

e) La función es acotada. Ínfimo y mínimo en $x = -2{,}5$ y vale $m = -12{,}25$. Sin máximo pero supremo $M = -6$.

f) La función no es acotada superiormente pero sí inferiormente. No tiene, pues, supremo ni máximo. El ínfimo y mínimo se alcanza en $x = 1$ y vale $m = 1$.

103. a) Comprueba que la ecuación $\operatorname{sen} x - 2x + 3 = 0$ tiene una solución en el intervalo $(1,2)$.

b) Calcula dicha solución con aproximación a las centésimas.

a) $f(x) = sen\, x - 2x + 3$ es continua y $f(1) > 0, f(2) < 0 \Rightarrow$ Por Bolzano tiene una solución en el intervalo $(1,2)$.

b) Como $f(1)f(2) < 0 \Rightarrow$ Puede aplicarse el método de la bisección.

	Intervalo $[a_n, b_n]$		Punto medio	Valor de $f(c_n)$
Paso	a_n	b_n	c_n	
1	1	2	1,5	0,9975
2	1,5	2	1,75	0,4840
3	1,75	2	1,875	0,2041
4	1,875	2	1,9375	0,0585
5	1,9375	2	1,9687	−0,0156
6	1,9375	1,9687	1,9531	0,0216
7	1,9531	1,9687	1,9609	0,0031
8	1,9609	1,9687	1,9648	0,0062

Síntesis

104. Calcula el valor de *k* para que se verifique, en cada caso, que:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+kx-3}-\sqrt{x^2-3x+5}\right)=\dfrac{5}{2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=2$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+kx-3}-\sqrt{x^2-3x+5}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+kx-3}-\sqrt{x^2-3x+5}\right)\left(\sqrt{x^2+kx-3}+\sqrt{x^2-3x+5}\right)}{\sqrt{x^2+kx-3}+\sqrt{x^2-3x+5}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(k+3)x-8}{\sqrt{x^2+kx-3}+\sqrt{x^2-3x+5}}=\dfrac{k+3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\dfrac{k+3}{2}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow k=2$

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{5+k}{0}$. Para que el límite pueda valer 2, es necesario que $5+k=0\Rightarrow k=-5$.

Efectivamente, en este caso:

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2(x+3)}{(x-1)^2(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{4}{2}=2$

105. Calcula los valores de *a* y *b* para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}+an+b\right)=0$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2n+3}{2n+1}+an+b\right)=0$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}+an+b\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1+an^2+bn+an+b}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(1+a)n^2+(a+b)n+1+b}{n+1}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}1+a=0\\a+b=0\end{cases}$

Luego $a=-1$ y $b=1$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2n+3}{2n+1}+an+b\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(1+2a)n^2+(a+2b+2)n+3+b}{2n+1}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}1+2a=0\\a+2b+2=0\end{cases}$.

Luego $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{3}{4}$.

106. Dada la sucesión $a_n = 3 + \dfrac{1}{n}$:

a) Demuestra que es decreciente y acotada inferiormente. Calcula su límite.

b) Averigua a partir de qué término los siguientes se aproximan a 3, con un error menor de $\varepsilon = 0{,}001$.

a) $a_{n+1} - a_n = 3 + \dfrac{1}{n+1} - 3 - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{n^2+n} < 0$. La sucesión es decreciente. Una cota inferior de la sucesión es 3.

El límite es: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 + \dfrac{1}{n}\right) = 3 + \dfrac{1}{+\infty} = 3 + 0 = 3$

b) $|a_n - 3| < 0{,}001 \Rightarrow \left|3 + \dfrac{1}{n} - 3\right| < 0{,}001 \Rightarrow \dfrac{1}{n} < 0{,}001 \Rightarrow n \geq 1001$. A partir del término 1001.

107. Calcula el valor de *a* para que el límite de la sucesión $a_n = \left(\dfrac{n^2+an+2}{n^2+n+2}\right)^n$ sea 2.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2+an+2}{n^2+n+2}\right)^n = 1^{+\infty} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2+an+2}{n^2+n+2}\right)^n = e^{\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(\frac{n^2+an+2}{n^2+n+2}-1\right)}.$$

Calculamos el límite del exponente:

$$\lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{n^2+an+2}{n^2+n+2}-1\right) = \lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{(a-1)n}{n^2+n+2}\right) = \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{(a-1)n^2}{n^2+n+2}\right) = a-1.$$

Entonces:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = e^{a-1} = 2 \Rightarrow a-1 = \ln 2 \Rightarrow a = 1 + \ln 2.$$

108. Calcula los valores de *a* y *b* para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+b & \text{si } x \leq 1 \\ e^{x-1}+ax & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2-2x-2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 1+b = e^{1-1}+a \\ e^{3-1}+3a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = \frac{1-e^2}{3}$$

109. Calcula el $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^2}{3x^2+x+2}\right)^{-x^2+1}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2}{3x^2+x+2}\right)^{-x^2+1} = 1^{-\infty} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2}{3x^2+x+2}\right)^{-x^2+1} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty}(-x^2+1)\left(\frac{3x^2}{3x^2+x+2}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty}(-x^2+1)\left(\frac{-x-2}{3x^2+x+2}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty}(-x^2+1)\left(\frac{-x-2}{3x^2+x+2}\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-x-2}{3x^2+x+2}\right)} = e^{+\infty} = +\infty$$

Cuestiones

110. Pon un ejemplo de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que exista $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)-g(x)\right]$, pero que no exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ni $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ $\qquad g(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<0\\ -1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ $\qquad f(x)+g(x)=0$

111. a) Escribe una sucesión monótona creciente, acotada superiormente, con todos sus términos negativos**.**

b) Escribe una sucesión que no sea creciente ni decreciente, y que sea acotada superiormente y acotada inferiormente.

c) Escribe una sucesión que sea creciente y decreciente a la vez.

d) Escribe una sucesión acotada superiormente, decreciente y no convergente.

a) $a_n=-\dfrac{1}{n}\to -1,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{5},\ldots$

b) $a_n=(-1)^n\to -1,1,-1,1,-1,\ldots$ Es oscilante. Además solo toma dos valores, por lo que está acotada.

c) $a_n=1\to 1,1,1,1,\ldots$ Las funciones constantes son crecientes y decrecientes a la vez.

d) $a_n=-n\to -1,-2,-3,\ldots$

112. Da una explicación de por qué no existen los límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ **e)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{tg} x$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$

Los límites correspondientes a los apartados a), c) y e) no existen, ya que las funciones son periódicas y, por tanto, no se acercan a ningún número ni a infinito cuando x se hace cada vez más grande. Oscilan de forma indefinida.

Los límites correspondientes a los apartados b), d) y f) son equivalentes a los anteriores haciendo el cambio de variable $t=\dfrac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\frac{1}{x}=\lim_{t\to+\infty}\operatorname{sen} t$$

$$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=\lim_{t\to+\infty}\cos t$$

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{tg}\frac{1}{x}=\lim_{t\to+\infty}\operatorname{tg} t$$

113. Escribe la expresión de una función continua en todo $\mathbb{R}$ tal que coincida con $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ en todos los puntos del dominio de esta última.

$$\frac{x^4-1}{x^2-1}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1}$$

Por tanto, $g(x)=x^2+1$ coincide con $f(x)$ en todos los puntos del dominio de esta.

Problemas

114. Una empresa presta servicios de asesoramiento mediante consultas telefónicas. La función que expresa el coste total anual, en euros, de prestar *x* consultas telefónicas, teniendo en cuenta todos los gastos es:

$$f(x) = 7{,}5x + 6500$$

a) Escribe la expresión de la función que facilita el coste por asesoramiento cuando se han contestado *x* consultas telefónicas y halla el coste aproximado de cada servicio telefónico cuando se presta una gran cantidad de ellos.

b) Si se decide cobrar por cada servicio prestado un 25 % más del coste hallado en el apartado anterior, ¿cuál es el beneficio obtenido al resolver 8000 consultas?

a) Coste por asesoramiento: $C(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{7{,}5x + 6500}{x}$.

Coste aproximado de asesoramiento cuando se presta gran cantidad de ellos: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7{,}5x + 6500}{x} = 7{,}5$ €

b) Se cobrará $7{,}5 \cdot 1{,}25 = 9{,}375$ € por servicio. Luego el beneficio es de 1,875 €.

Al resolver 80 000 consultas el beneficio obtenido será de 15 000 €.

115. La población de insectos en una laguna centroamericana evoluciona con el paso de x días según la siguiente función:

$$f(x) = \frac{15\,000x + \sqrt{\frac{20\,000x + 8000}{3}}}{x + 1}$$

a) Indica la población que existe al comienzo del período considerado y cuando han pasado 5,7 y 10 días.

b) Si la población siguiese la ley indicada de forma indefinida, ¿en qué valor aproximado se estabilizará?

a) La población al comienzo: $f(0) = 51{,}6$. Aproximadamente 52 insectos.

A los 5 días: $f(5) = 12\,532$ insectos.

A los 7 días: $f(7) = 13\,153$ insectos.

A los 10 días: $f(10) = 13\,660$ insectos.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{15\,000x + \sqrt{\frac{20\,000x + 8000}{3}}}{x + 1} = \frac{15\,000}{1} = 15\,000$ insectos.

116. El tiempo, en segundos, que tarda un atleta en correr 100 m lisos viene dado por la función $f(x) = 9 + e^{-x}$ donde *x* es el número de días que ha entrenado previamente. Calcula el tiempo que tardará en realizar la carrera tras un largo período de entrenamiento.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(9 + e^{-x}\right) = 9$, entonces tardará 9 segundos en realizar la carrera.

117. Un equipo de investigación ha estimado que el número de bacterias, en miles, de un cultivo, en función del tiempo *t* que ha pasado desde un instante inicial *t* = 0 horas, viene dado por la función:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{9}t^2+1 & \text{si } 0\le t\le 3\\[2mm] \dfrac{4t}{t+1} & \text{si } t>3\end{cases}$$

a) Comprueba que la función es continua en todo su dominio.

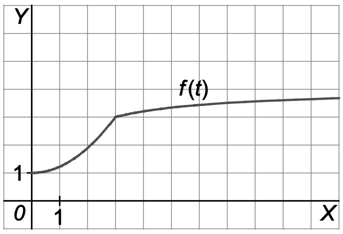
b) Haz una representación de la función.

c) Demuestra que existe algún instante en el que el número de bacterias es de 3500. Da un intervalo de tiempo de longitud menor a 30 minutos en el que esté incluido dicho instante.

a) $\lim\limits_{t\to 3^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 3}\left(\dfrac{2}{9}t^2+1\right)=3$, $\lim\limits_{t\to 3^+}\dfrac{4t}{t+1}=\dfrac{12}{4}=3$ y $f(3)=3$

La función es continua en $t=3$ y, por tanto, en todo su dominio $[0,+\infty)$.

b)



c) $3{,}5=\dfrac{4t}{t+1}\Rightarrow 3{,}5t+3{,}5=4t\Rightarrow 0{,}5t=3{,}5\Rightarrow t=7$ horas.

En el intervalo $(6\text{h } 45\text{min}, 7\text{h } 15\text{min})$, en $t=7$, en el que el número de bacterias es de 3500 (3,5 miles).

Para profundizar

118. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{-(x-1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}-(x+1)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{-(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}-(x+1)=-2$

119. Halla el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{e^x}{e^x}+\dfrac{e^{-x}}{e^x}}{\dfrac{e^x}{e^x}-\dfrac{e^{-x}}{e^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{e^{2x}}}{1-\dfrac{1}{e^{2x}}}=\dfrac{1}{1}=1$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{e^{-x}}{e^x}+\dfrac{e^x}{e^x}}{\dfrac{e^{-x}}{e^x}-\dfrac{e^x}{e^x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{e^{2x}}+1}{\dfrac{1}{e^{2x}}-1}=\dfrac{1}{-1}=-1$

120. Calcula el siguiente límite, estudiando previamente los límites laterales. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}}{\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}-\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\dfrac{1}{e^{\frac{2}{x}}}}{1-\dfrac{1}{e^{\frac{2}{x}}}}=\frac{1}{1}=1$$

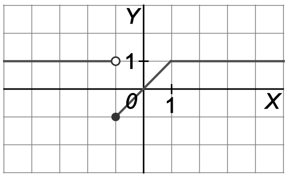
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}}+\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}}}{\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}}-\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{2}{x}}+1}{e^{\frac{2}{x}}-1}=\frac{1}{-1}=-1$$

Como los límites laterales no coinciden, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$ no existe.

121. Representa gráficamente la función y estudia su continuidad.

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } |x|\le 1\\ 1 & \text{si } |x|>1\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<-1\\ x & \text{si } -1\le x\le 1\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$$



Es discontinua en x = -1 ya que: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=1\neq -1=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ y continua en los demás números reales.

122. Determina los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{2n^2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+8+\ldots+2n}{n^2+1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)+\ldots+\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+n)n}{2\cdot 2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{4n^2}=\dfrac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+8+\ldots+2n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+2n)n}{2\left(n^2+1\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n}{2n^2+2}=\dfrac{2}{2}=1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)+\ldots+\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}+1+\dfrac{n}{n}\right)n}{2}\right)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n}=\dfrac{3}{2}$

123. Dada la sucesión por recurrencia $a_1 = 1$ $a_n = \dfrac{1}{1 + a_{n-1}}$:

a) Calcula sus primeros términos.

b) Sabiendo que es convergente, calcula su límite.

a) $a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2},\ a_3 = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3},\ a_4 = \dfrac{1}{1+\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{5},\ a_5 = \dfrac{1}{1+\frac{3}{5}} = \dfrac{5}{8},\ a_6 = \dfrac{1}{1+\frac{5}{8}} = \dfrac{8}{13}$

b) Como la sucesión es convergente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = L$. Por tanto:

$$L = \frac{1}{1+L} \Rightarrow L^2 + L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, L = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

La sucesión a_n es de términos positivos entonces la solución válida es $L = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Autoevaluación

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula el dominio de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{(x-5)^2\left(4x^4+1\right)}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 9}}$

c) $f(x) = \log_3 \sqrt{x^2 - x}$

a) $(x-5)^2\left(4x^4+1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \\ 4x^4 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ La única solución real es $x = 5$. Por tanto, la función existe en todo el conjunto de los números reales excepto en $x = 5$. Luego $D(f) = (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$.

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2 - 9} \geq 0 \\ x^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-3, 0] \cup (3, +\infty)$. Luego $D(f) = (-3, 0] \cup (3, +\infty)$.

c) Para que exista $\log_3 \sqrt{x^2 - x}$ debe ocurrir que $x^2 - x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Luego $D(f) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

2. Halla el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^4-3x+5}{-3x^3+x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt[5]{x^2}-5}{-\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[10]{x^4+x}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2-\sqrt{x+2}}{-2x^2+4x}$

e) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{4x^2}{(x+3)^2}$

f) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

g) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} \dfrac{4x^3+16x^2+21x+9}{4x^3+20x^2+33x+18}$

h) $\lim\limits_{x\to3^-} \left[\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x^2-9}\right]$

i) $\lim\limits_{x\to-4} \left(\dfrac{2x-3}{-11}\right)^{\frac{x+4}{3}}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^2-3}{2x^2+3}\right)^{\frac{-x^3}{x^3+1}}$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^4-3x+5}{-3x^3+x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^4}{-3x^3} = \dfrac{-\infty}{+\infty} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt[5]{x^2}-5}{-\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[10]{x^4+x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt[5]{x^2}}{-\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[10]{x^4+x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt[5]{x^2}}{2\sqrt[5]{x^2}} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right) = \infty-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2-x}\right)}{2x+\sqrt{4x^2-x}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2-\left(4x^2-x\right)}{2x+\sqrt{4x^2-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2x+\sqrt{4x^2+x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{4x} = \dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2-\sqrt{x+2}}{-2x^2+4x} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to2} \dfrac{2-\sqrt{x+2}}{-2x^2+4x} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{\left(2-\sqrt{x+2}\right)\left(2+\sqrt{x+2}\right)}{2x(-x+2)\left(2+\sqrt{x+2}\right)} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{4-x-2}{2x(-x+2)\left(2+\sqrt{x+2}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to2} \dfrac{-x+2}{2x(-x+2)\left(2+\sqrt{x+2}\right)} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{1}{2x\left(2+\sqrt{x+2}\right)} = \dfrac{1}{16}$

e) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{4x^2}{(x+3)^2} = \dfrac{36}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{4x^2}{(x+3)^2} = \dfrac{36}{0^+} = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{4x^2}{(x+3)^2} = \dfrac{36}{0^+} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-3} \dfrac{4x^2}{(x+3)^2} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} = \dfrac{1}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \Rightarrow$ No existe límite.

g) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} \dfrac{4x^3+16x^2+21x+9}{4x^3+20x^2+33x+18} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} \dfrac{4x^3+16x^2+21x+9}{4x^3+20x^2+33x+18} = \lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} \dfrac{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2(4x+4)}{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2(4x+8)} = \dfrac{-6+4}{-6+8} = -1$

h) $\lim\limits_{x\to3^-} \left[\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x^2-9}\right] = \infty-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to3^-} \left[\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x^2-9}\right] = \lim\limits_{x\to3^-} \left[\dfrac{x+3-3}{x^2-9}\right] = \lim\limits_{x\to3^-} \left[\dfrac{x}{x^2-9}\right] = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$

i) $\lim\limits_{x\to-4} \left(\dfrac{2x-3}{-11}\right)^{\frac{x+4}{3}} = 1^0 = 1$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^2-3}{2x^2+3}\right)^{\frac{-x^3}{x^3+1}} = 1^{-1} = 1$

3. **a)** Demuestra que la sucesión $a_n = \dfrac{2n-3}{n+5}$ es monótona creciente y acotada superiormente.

b) Calcula su límite.

a) Monótona creciente. Se debe demostrar que $a_{n+1} - a_n \geq 0$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-3}{n+1+5} - \frac{2n-3}{n+5} = \frac{2n^2+10n-n-5+2n^2-12n+3n+18}{(n+6)(n+5)} = \frac{13}{(n+6)(n+5)} > 0$$

Acotada superiormente por 2. Se debe demostrar que $a_n - 2 \leq 0$.

$$a_n - 2 = \frac{2n-3}{n+5} - 2 = \frac{2n-3-2n-10}{n+5} = -\frac{13}{n+5} < 0$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2n-3}{n+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2n}{n} = 2$

4. **Calcula el valor de *a* para que el siguiente límite valga e^2.**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2-1}\right)^{ax+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2-1}\right)^{ax+1} = 1^{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2-1}\right)^{ax+1} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+1)\left(\frac{3x^2+2x+1}{3x^2-1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+1)\left(\frac{2x+2}{3x^2-1}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2ax^2}{3x^2}} = e^{\frac{2a}{3}} \Rightarrow \frac{2a}{3} = 2 \Rightarrow a = 3$$

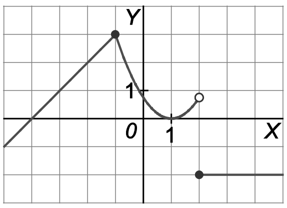
5. **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x < -1 \\ a(x-1)^2 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ -2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **:**

a) Calcula el valor de *a* para que sea continua en el punto $x = -1$.

b) Para este valor de *a* hallado, dibuja la función e indica el tipo de discontinuidad que presenta en $x = 2$.

a) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-}(x+4) = 3$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}\left(a(x-1)^2\right) = 4a = f(-1)$. Luego $4a = 3 \Rightarrow a = \dfrac{3}{4}$

b)



Como $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{3}{4}(x-1)^2\right) = \dfrac{3}{4}$ y $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+}(-2) = -2$,la función presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

6. *Con la ayuda del teorema de Bolzano y de forma razonada, indica tres intervalos, sin puntos comunes entre ellos, en los que la ecuación $-2x^3+3x^2+x-1=0$ tenga una solución.**

$f(x)=-2x^3+3x^2+x-1$ Es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, en cualquier intervalo cerrado.

$$\begin{cases} f(-1)=2+3-1-1=3>0 \\ f(0)=-1<0 \end{cases} \Rightarrow \exists c_1 \in (-1,0) \text{ tal que } f(c_1)=0$$

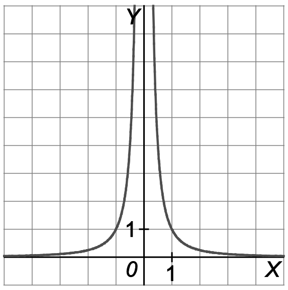
$$\begin{cases} f(0)=-1<0 \\ f(1)=-2+3+1-1=1>0 \end{cases} \Rightarrow \exists c_2 \in (0,1) \text{ tal que } f(c_2)=0$$

$$\begin{cases} f(1)=1>0 \\ f(2)=-16+12+2-1=-3<0 \end{cases} \Rightarrow \exists c_3 \in (1,2) \text{ tal que } f(c_3)=0$$

7. **Estudia si la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ es acotada e indica, si existe, su supremo, ínfimo, máximo y mínimo en:**

a) Toda la recta real $\mathbb{R}$.

b) El intervalo $[-2,-1]$.



a) En $\mathbb{R}$, la función es acotada inferiormente, pero no superiormente.

El ínfimo es $m=0$, pero no tiene mínimo. No tiene ni máximo ni supremo.

b) En el intervalo cerrado $[-2,-1]$ la función es acotada superiormente e inferiormente.

El máximo absoluto (y supremo) lo alcanza en $x=-1$ y vale 1 y el mínimo absoluto (e ínfimo) lo alcanza en $x=-2$ y vale 0,25.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. **El valor de $\lim\limits_{x\to-\infty} \log_2\left(\dfrac{2-2^x}{2}\right)$ vale:**

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 1 **D.** 0

La solución es D. Calculando el límite: $\lim\limits_{x\to-\infty} \log_2\left(\dfrac{2-2^x}{2}\right)=\log_2\left(\dfrac{2-0}{2}\right)=\log_2 1=0$

2. **Calcula a y b para que $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2+ax+b}{x^3-7x^2+16x-12}=-5$**

A. $a=8$, $b=-12$ **B.** $a=-8$, $b=12$ **C.** $a=8$, $b=12$ **D.** $a=-8$, $b=-12$

La solución es B. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2+ax+b}{x^3-7x^2+16x-12}=\dfrac{8-4+2a+b}{0}$. Para que este límite sea finito, es necesario que $4+2a+b=0$.

En este caso, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2+ax+b}{x^3-7x^2+16x-12}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+x+a+2)}{(x-2)(x^2-5x+6)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+a+2}{x^2-5x+6}=\dfrac{8+a}{0}\Rightarrow a=-8, b=12$

Se comprueba que para estos valores el límite vale: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-7x^2+16x-12}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{6x-2}{6x-14}=\dfrac{10}{-2}=-5$

3. **La función $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$:**

A. Es continua en $x=3$

B. Presenta una discontinuidad evitable en $x=3$.

C. Presenta una discontinuidad de salto finito en $x=3$.

D. Presenta una discontinuidad de salto infinito en $x=3$.

La solución es B. En x = 3, la función no está definida pero tomando límites se tiene:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x+2)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}(x+2)=5$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x+2)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}(x+2)=5$$

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **La ecuación $x^5+ax^3+b=0$:**

A. Tiene al menos una solución.

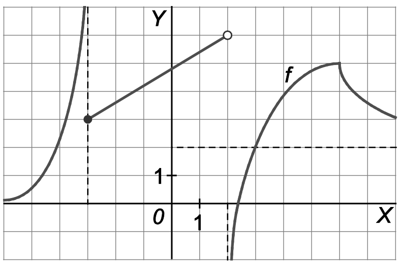
B. Tiene al menos dos soluciones.

C. Puede no tener solución.

D. Puede tener más de una solución.

Las soluciones son A y D. Por tener grado impar sus límites en $\pm\infty$ son $\pm\infty$, respectivamente, y por ser además continua, la función debe cortar al menos una vez al eje de abscisas, es decir, tener al menos una solución. Puede que solo corte una vez o puede que lo corte hasta 5 veces, dependerá de si las soluciones son reales o complejas.

5. **Dada la gráfica de $f(x)$:**



A. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

B. $\lim_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$

C. $\lim_{x\to -3^+} f(x)=3$

D. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

Las soluciones son A, C y D. Observando la gráfica, se aprecia que B no es cierta porque $\lim_{x\to 3^-} f(x)=2$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **El dominio de la función f es el intervalo $[3,7]$ y es continua en dicho dominio.**

1. **$f(x)=0$ tiene una raíz en $(3,7)$.**

2. **$f(3)f(7)<0$**

A. 1 $\Leftrightarrow$ 2

B. 1 $\Rightarrow$ 2 pero 2 $\not\Rightarrow$ 1

C. 2 $\Rightarrow$ 1 pero 1 $\not\Rightarrow$ 2.

D. 1 y 2 no se pueden dar a la vez.

La solución es C. Esta relación es clara por el teorema de Bolzano, que asegura al menos una raíz si hay cambio de signo en los extremos. Las respuestas A y B no son correctas, porque por ejemplo la función constante cero verifica 1, pero no 2. Finalmente, la respuesta D sería un contraejemplo del teorema de Bolzano.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Se desea estudiar si la ecuación $f(x)=6$ tiene o no solución en el intervalo $[-3,3]$. ¿Qué dato es innecesario?**

A. $D(f)=\mathbb{R}$ **B.** $f(x)$ es continua en $[-3,3]$ **C.** $2<f(-3)<4$ **D.** $8<f(3)<10$

No es necesario conocer que el dominio de la función sea $\mathbb{R}$, porque es suficiente conocer el comportamiento de la función definida por esa ecuación $h(x)=f(x)-6$ en el intervalo $[-3,3]$. Por tanto, el dato innecesario es A.

2 Derivadas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Aplicando la definición de derivada, decide si las siguientes funciones son derivables en los puntos indicados y calcula, si existe, la derivada.

a) $f(x) = x^3$ en $x = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x+2}$ en $x = 2$

c) $f(x) = x|x|$ en $x = 0$

d) $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^3 - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h\left(h^2+3h+3\right)}{h} = 3$

b) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{h+4}-2\right)\left(\sqrt{h+4}+2\right)}{h\left(\sqrt{h+4}+2\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h\left(\sqrt{h+4}+2\right)} = \dfrac{1}{4}$

c) Se expresa $f(x)$ como una función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x(-x) & \text{si } x \le 0 \\ xx & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h^2}{h} = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h^2}{h} = 0 \end{cases}$$. Luego $f'(0) = 0$.

d) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$

4. Estudia si las siguientes funciones son derivables en el punto en el que se cambia su definición.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0 \\ 3x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \le 1 \\ x^3 - x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

En todos los casos se comienza estudiando si la función es continua en los puntos donde cambia su definición, porque si no lo es, no será derivable.

a) La función es continua en $x = 0$ porque $\lim\limits_{h\to 0^+} f(0+h) = 0 = f(0) = \lim\limits_{h\to 0^-} f(0+h)$.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{3h}{h} = 3 \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h^2}{h} = 0 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ Luego no existe el límite, por tanto, la función no es derivable.

b) La función es continua en $x = 1$ porque $\lim\limits_{h\to 0^+} f(1+h) = 3 = f(1) = \lim\limits_{h\to 0^-} f(1+h)$.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{(1+h)^2 + 2 - 3}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h(h+2)}{h} = 2 \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{(1+h)^3 - (1+h) + 3 - 3}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h\left(h^2+3h+2\right)}{h} = 2 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ Luego $f'(1) = 2$

5. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $f(x)=\sqrt{x+1}$ en el punto de abscisa 0.

La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(0+h)+1}-\sqrt{0+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h+1}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{h+1}-1)(\sqrt{h+1}+1)}{h(\sqrt{h+1}+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{h+1}+1)}=\frac{1}{2}.$$

Luego la recta tangente es $y-1=\frac{1}{2}x \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+1$ y la recta normal es $y-1=-2x \Rightarrow y=-2x+1$.

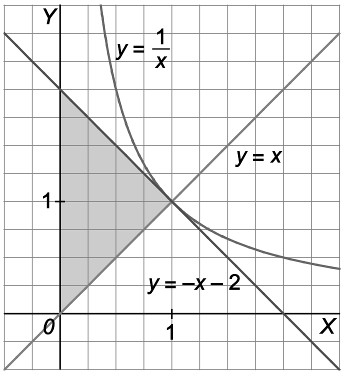
6. Calcula el área del triángulo formado por el eje vertical y las rectas tangente y normal a la curva $f(x)=\frac{1}{x}$ en el punto de abscisa 1, previa deducción del número $f'(1)$.

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(1+h)}=-1$$

La recta tangente tiene pendiente m = -1 y pasa por el punto $A(1, f(1))=A(1,1)$, luego su ecuación es $y=-x+2$ y la recta normal en $A(1,1)$ tiene pendiente m' = 1, luego su ecuación es $y=x$.

Hay que calcular el área del triángulo rectángulo cuyos vértices son $O(0,0)$, $A(1,1)$ y $B(0,2)$.

Por tanto, el área es 1 u^2.

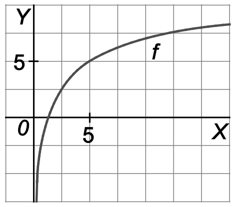


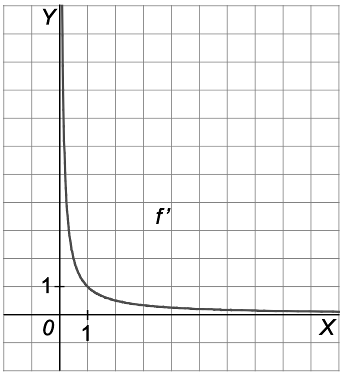
7. La tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $P(2, f(2))$ pasa también por el punto $Q(-3,0)$. Si $f'(2)=\frac{1}{2}$, calcula $f(2)$.

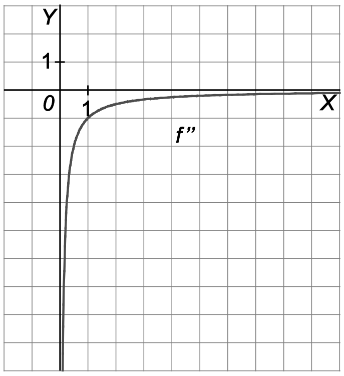
La ecuación de la recta que pasa por Q con pendiente $\frac{1}{2}$ es $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. Además, como la recta pasa por el punto $P(2, f(2))$, entonces $f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

8 y 9. Ejercicios resueltos.

10. **Para una función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ cuya gráfica es la de la figura, esboza las gráficas de $y=f'(x)$ y $y=f''(x)$.**







11. **Si $f(x)=|x-3|(x-3)$, ¿existen los números $f''(0)$ y $f''(3)$?**

$$f(x)=\begin{cases}(-x+3)(x-3) & \text{si } x\le 3\\ (x-3)(x-3) & \text{si } x>3\end{cases}=\begin{cases}-(x-3)^2 & \text{si } x\le 3\\ (x-3)^2 & \text{si } x>3\end{cases}$$

Se estudia que ocurre con $f'(3)$:

$$f'(x)=\begin{cases}-2(x-3) & si\ x<3\\ 2(x-3) & si\ x>3\end{cases}\Rightarrow f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h^2}{h}=0\\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2}{h}=0\end{cases}$$

Así pues, $f'(x)=\begin{cases}-2(x-3) & si\ x\le 3\\ 2(x-3) & si\ x>3\end{cases}=2|x-3|$ que, como ya se sabe, no es derivable en $x=3$, pues

$$f''(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(3+h)-f'(3)}{h}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-2h}{h}=-2\\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{2h}{h}=2\end{cases}$$

Si $x\ne 3$, $f''(x)=\begin{cases}-2 & \text{si } x<3\\ 2 & \text{si } x>3\end{cases}$. Luego $f''(0)=-2$.

12. Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si } x\le 0 \\ 2x-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$. Calcula, si existen: $f'(-2)$, $f''(-2)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'(3)$ y $f''(3)$.

Si $x<0$, $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2+2(x+h)-1-(x^2+2x-1)}{h}=2x+2$ y

$f''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(x+h)+2-(2x-2)}{h}=2$

Se sabe que $f'(-2)=-2$ y $f''(-2)=2$.

Si $x>0$, $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(x+h)-1-(2x-1)}{h}=2$ y, por tanto, $f''(x)=0$

Así pues, $f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } x>0 \end{cases}\Rightarrow f'(3)=2$ y $f''(3)=0$

Para calcular las derivadas en $x=0$ se observa primero si f y f' son continuas allí y se calculan los límites laterales:

$f'(0):\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^2-2h-1-(-1)}{h}=2 \\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{2h-1-(-1)}{h}=2 \end{cases}$, así pues, $f'(0)=2$

$f''(0):\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{2h+2-(-2)}{h}=2 \\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{2-2}{h}=0 \end{cases}$, así pues, no existe $f''(0)$.

13. ¿Es la siguiente función derivable en $x=0$?

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{2}+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

$f'(0^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^2+h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}(h+1)=1$

$f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\frac{h^2}{2}+1-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{2}=0$

Luego la función no es derivable en $x=0$.

14. ¿Es f derivable en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -2 \\ -4(x+1) & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ 3x^2 - 4 & \text{si } 0 < x \le 2 \\ 12x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$f'(-2^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(-2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2 - 4h}{h} = -4$$

$$f'(-2^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-4(-2+h+1) - 4}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-4h}{h} = -4$$

Luego la función es derivable en $x = -2$ y $f'(-2) = -4$.

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-4(0+h+1) - (-4)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-4h}{h} = -4$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h^2 - 4 - (-4)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3h^2}{h} = 0$$

La función no es derivable en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 8$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 25$$

Por tanto, la función no es continua en $x = 2$ y, en consecuencia, no es derivable en $x = 2$.

15 a 18. Ejercicios resueltos.

19. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 8(7x^5 - x^2) + 6(-x+4)$

b) $f(x) = (x-1)(3x^2 - x + 4)$

c) $f(x) = (4x+2)(x^2 - 2x + 1) - x^3(6x^2 - 3x - 3)$

d) $f(x) = \dfrac{x^5}{x^4 + x^2 + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{(x^2 - 3)(x-1)}{x^2 + 1}$

f) $f(x) = (x^4 + 3x^3 + 2x - 1)(2x+1)(x^2 - 3x + 4)$

a) $f'(x) = 8(35x^4 - 2x) - 6 = 280x^4 - 16x - 6$

b) $f'(x) = (3x^2 - x + 4) + (x-1)(6x-1) = 9x^2 - 8x + 5$

c) $f'(x) = 4(x^2 - 2x + 1) + (4x+2)(2x-2) - 3x^2(6x^2 - 3x - 3) - x^3(12x - 3) = -30x^4 + 12x^3 + 21x^2 - 12x$

d) $f'(x) = \dfrac{5x^4(x^4 + x^2 + 1) - x^5(4x^3 + 2x)}{(x^4 + x^2 + 1)^2} = \dfrac{x^8 + 3x^6 + 5x^4}{x^8 + 2x^6 + 3x^4 + 2x^2 + 1}$

e) $f'(x) = \dfrac{[2x(x-1) + (x^2 - 3)](x^2 + 1) - 2x(x^2 - 3)(x-1)}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{x^4 + 6x^2 - 8x - 3}{x^4 + 2x^2 + 1}$

f) $f'(x) = (4x^3 + 9x^2 + 2)(2x+1)(x^2 - 3x + 4) + 2(x^4 + 3x^3 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 4) +$

$+ (x^4 + 3x^3 + 2x - 1)(2x+1)(2x-3) = 14x^6 + 6x^5 - 50x^4 + 92x^3 + 30x + 3$

20. Calcula, sin usar la derivada del cociente, la derivada de las funciones siguientes.

a) $f(x)=\frac{2x+1}{3}$ **b)** $f(x)=\frac{5x^3-6x^2+7x}{x}$

a) $f(x)=\frac{1}{3}(2x+1)\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}$

b) $f(x)=5x^2-6x+7\Rightarrow f'(x)=10x-6$

21. Calcula la derivada de la función $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$. ¿Hay algún punto en la gráfica de $f(x)$ en el que la tangente sea horizontal?

La derivada es $f'(x)=\frac{(x^2-1)-x2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$.

La tangente en un punto es horizontal si la derivada se anula. Es decir, buscamos valores de x tales que $\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}=0$, como $-x^2-1=0$ no tiene soluciones reales. Por tanto, no hay ningún punto con tangente horizontal.

22. Calcula la derivada de $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+x+1$ y halla la abscisa de los puntos de la curva en los que la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante, $y=x$.

La derivada es $f'(x)=x^2-2x+1$.

Se buscan los puntos en los que la pendiente de la recta tangente sea 1. Para ello se igual la derivada a 1.

$$x^2-2x+1=1\Rightarrow x=0, x=2$$

Luego la abscisa de los puntos buscados es $x=0$ o $x=2$.

23. Demuestra que, para cualesquiera números reales *a* y *b* (no simultáneamente nulos), la gráfica de $y=\frac{ax+b}{ax-b}$ no tiene ninguna tangente horizontal.

La derivada es $y'=\frac{-2ab}{(ax-b)^2}$.

Si tuviera tangente horizontal, entonces $y'=0$. Luego $\frac{-2ab}{(ax-b)^2}=0\Rightarrow a=0, b=0$.

Si $a=0$, $b\neq 0$, entonces $y=-1$, recta paralela al eje X.

Si $a\neq 0$, $b=0$, entonces $y=1$, recta paralela al eje X.

24. Comprueba que las funciones $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ y $g(x)=\frac{x+2}{x-1}$ tienen la misma derivada. Sin calcular las derivadas, ¿sabrías deducir que iban a ser iguales?

$f'(x)=\frac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$ $g'(x)=\frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$

Sí se podría deducir que iban a ser iguales porque $f(x)-g(x)=\frac{2x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}=1$. Luego, $f(x)=g(x)+1$.

Por tanto, sus derivadas son iguales.

25 a 27. Ejercicios resueltos.

28. Copia y completa la siguiente tabla.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$	$(f \circ g)(x)$	$(f \circ g)'(x)$
–1	1	0	1	0	•••	•••
0	3	2	–2	1	•••	•••
2	–1	–1	0	2	•••	•••

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$	$(f \circ g)(x)$	$(f \circ g)'(x)$
–1	1	0	1	0	3	0
0	3	2	–2	1	–1	0
2	–1	–1	0	2	1	2

29. Sean $f(x) = \left(x^2+1\right)^3$ y $g(x) = \dfrac{5}{x}$. Calcula.

a) $t(x) = (f \circ g)(x)$ y $t'(x)$

b) $f'(g(x))$ y $g'(x)$

c) Comprueba que el resultado del apartado a) coincide con el resultado del producto de las funciones del apartado b).

a) $t(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{5}{x}\right) = \left(\left(\dfrac{5}{x}\right)^2 + 1\right)^3 = \left(\dfrac{25+x^2}{x^2}\right)^3$

$t'(x) = 3\left(\dfrac{25+x^2}{x^2}\right)^2 \dfrac{2x^3 - 2x\left(25+x^2\right)}{x^4} = 3\left(\dfrac{25+x^2}{x^2}\right)^2 \dfrac{(-50)}{x^3}$

b) $f'(x) = 3\left(x^2+1\right)^2 2x$. Luego $f'(g(x)) = 3\left(\dfrac{25}{x^2}+1\right)^2 \dfrac{10}{x}$ y $g'(x) = \dfrac{-5}{x^2}$.

c) $f'(g(x))g'(x) = 3\left(\dfrac{25}{x^2}+1\right)^2 \dfrac{10}{x}\dfrac{(-5)}{x^2} = 3\left(\dfrac{25+x^2}{x^2}\right)^2 \dfrac{(-50)}{x^3} = t'(x)$

30 y 31. Ejercicios resueltos.

32. Calcula, utilizando la derivada de la función inversa, la derivada de la función:

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

Elevamos a n, tenemos que $[f(x)]^n = x$ y derivamos ambos miembros.

$n[f(x)]^{n-1} f'(x) = 1$. Despejando obtenemos $f'(x) = \dfrac{1}{n[f(x)]^{n-1}} = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

33. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

b) $f(x)=\sqrt[4]{1-\sqrt{x}}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{2x+1}}$

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

a) $f'(x)=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$

b) $f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(1-\sqrt{x})^3}}\dfrac{(-1)}{2\sqrt{x}}=-\dfrac{1}{8\sqrt{x}\sqrt[4]{(1-\sqrt{x})^3}}$

c) $f'(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}-x\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}}{\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^2}=\dfrac{4x+3}{3(2x+1)\sqrt[3]{2x+1}}$

d) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{2x\sqrt[3]{(2x+1)^2}}{2\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{4\sqrt{x^2+1}}{3\sqrt[3]{2x+1}}}{\sqrt[3]{(2x+1)^4}}=\dfrac{6x(2x+1)-8(x^2+1)}{6(2x+1)\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{(2x+1)^2}}=\dfrac{2x^2+3x-4}{(6x+3)\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

34. Calcula en cada caso, el valor de *a*:

a) $f'(2)=3$ $\quad f^{-1}(0)=2$ $\quad (f^{-1})'(0)=a$

b) $f'(-1)=4$ $\quad f^{-1}(4)=-1$ $\quad (f^{-1})'(4)=a$

c) $f'(5)=a$ $\quad f^{-1}(3)=5$ $\quad (f^{-1})'(3)=6$

a) $(f^{-1})'(0)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{3}$

b) $(f^{-1})'(4)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(4))}=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{4}$

c) $f'(5)=f'(f^{-1}(3))=\dfrac{1}{(f^{-1})'(3)}=\dfrac{1}{6}$

35. Calcula la ecuación de la tangente a la curva $y=\sqrt[5]{x}$ en el punto de abscisa 32, previa deducción de la derivada de dicha función.

Como $f^{-1}(x)=x^5$ y $(f^{-1})'(x)=5x^4$, se tiene que $x=(f^{-1}\circ f)(x)$. Derivando se obtiene:

$1=(f^{-1}\circ f)'(x)=(f^{-1})'(\sqrt[5]{x})f'(x)=5\sqrt[5]{x^4}f'(x)$, luego $1=5\sqrt[5]{x^4}f'(x)$ por lo que $f'(x)=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente buscada es $y=f'(32)(x-32)+f(32)=\dfrac{1}{80}x+\dfrac{8}{5}$.

36. Calcula la derivada de $x=-1$ de la inversa de la función $f(x)=x^3$.

La función inversa de *f* es $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$. Teniendo en cuenta que $f'(x)=3x^2$, se obtiene:

$(f^{-1})'(-1)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(-1))}=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{3\cdot(-1)^2}=\dfrac{1}{3}$

37 y 38. Ejercicios resueltos.

39. Halla la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=e^{x^3+4}$ **b)** $f(x)=(3x^2-2x+1)e^{\sqrt{x}+2}$ **c)** $f(x)=7^{\sqrt[5]{x^3}+x}$

a) $f'(x)=3x^2e^{x^3+4}$

b) $f'(x)=(6x-2)e^{\sqrt{x}+2}+\dfrac{(3x^2-2x+1)}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}+2}=\left(6x-2+\dfrac{3x^2-2x+1}{2\sqrt{x}}\right)e^{\sqrt{x}+2}$

c) Escribimos $f(x)=7^{\sqrt[5]{x^3}+x}=e^{\ln 7^{\sqrt[5]{x^3}+x}}=e^{\left(\sqrt[5]{x^3}+x\right)\ln 7}$

$$f'(x)=\ln 7\left(\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}+1\right)e^{\left(\sqrt[5]{x^3}+x\right)\ln 7}=\ln 7\left(\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}+1\right)7^{\sqrt[5]{x^3}+x}$$

40. Obtén la ecuación de la tangente a la curva $y=e^{2x+1}$ en el punto de abscisa $-\dfrac{1}{2}$.

$f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)+1}=2$ y $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+1=2x+2$.

41. Determina si existe algún punto con tangencia horizontal en la curva:

$$y=e^{x^3+x+1}$$

Igualando la derivada a cero: $f'(x)=(3x^2+1)e^{x^3+x+1}=0$. No obstante, como la derivada no se anula nunca, ya que tanto $3x^2+1$ como e^{x^3+x+1} son positivas, la curva no tiene tangentes horizontales.

42. Obtén la ecuación de la tangente a la curva $y=e^{e^x-1}$ en el punto de abscisa 0.

$f'(x)=e^xe^{e^x-1}$, $f'(0)=1$ y $f(0)=1$, luego la recta tangente es $y=x+1$.

43 a 45. Ejercicios resueltos.

46. Calcula la derivada de:

a) $f(x)=\ln\left[\left(x^3+1\right)\left(x^2-3\right)\right]$

b) $f(x)=\ln\left[\left(x^2+1\right)\right]^3$

c) $f(x)=\sqrt{4x^2-3x}\ln\sqrt{x+2}$

d) $f(x)=\log_3\left[\left(x^4+2x^2+1\right)\right]^2$

a) $f'(x)=\dfrac{3x^2\left(x^2-3\right)+\left(x^3+1\right)2x}{\left(x^3+1\right)\left(x^2-3\right)}=\dfrac{3x^4-9x^2+2x^4+2x}{x^5-3x^3+x^2-3}=\dfrac{5x^4-9x^2+2x}{x^5-3x^3+x^2-3}$

b) $f'(x)=\dfrac{3\left(x^2+1\right)^2 2x}{\left(x^2+1\right)^3}=\dfrac{6x}{x^2+1}$ (si se escribe $f(x)=3\ln\left(x^2+1\right)$ se obtiene la derivada con mayor facilidad).

c) $f'(x)=\dfrac{8x-3}{2\sqrt{4x^2-3x}}\ln\sqrt{x+2}+\dfrac{\sqrt{4x^2-3x}}{\sqrt{x+2}\,2\sqrt{x+2}}=\dfrac{8x-3}{2\sqrt{4x^2-3x}}\ln\sqrt{x+2}+\dfrac{\sqrt{4x^2-3x}}{2(x+2)}$

d) Se escribe $f(x)=\dfrac{2\ln\left(x^4+2x^2+1\right)}{\ln3}=\dfrac{4\ln\left(x^2+1\right)}{\ln3}$, entonces $f'(x)=\dfrac{8x}{\left(x^2+1\right)\ln3}$.

47. Calcula la ecuación de la tangente a la curva $y=\ln x$ trazada desde el origen.

La ecuación de la recta tangente a la curva por el punto $(a,f(a))$ es $y=\dfrac{1}{a}x+\ln a-1$.

Si pasa por el origen debe ser $0=\ln a-1$, entonces $\ln a=1$, $a=e$ y la ecuación buscada es $y=\dfrac{x}{e}$.

48. ¿Hay algún punto de la gráfica de $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ con tangente horizontal?

Como $D(f)=(-1,1)$ y $f'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ no se anula en ese intervalo, por tanto, la gráfica no tiene tangentes horizontales.

49. Calcula, simplificando al máximo, la derivada de la función: $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$

Derivando directamente obtenemos $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)\left(\dfrac{e^x\left(e^x-1\right)-e^x\left(e^x+1\right)}{\left(e^x-1\right)^2}\right)=\dfrac{-2e^x}{e^{2x}-1}$.

Si antes de derivar usamos las propiedades de logaritmos para reescribir la función: $f(x)=\ln\left(e^x+1\right)-\ln\left(e^x-1\right)$, entonces se obtiene también: $f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-\dfrac{e^x}{e^x-1}=\dfrac{-2e^x}{e^{2x}-1}$

50. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\operatorname{sen}x$ en el origen.

$f'(0)=\cos 0=1$ y $f(0)=0$.

Así pues, la recta tangente es $y=x$.

51. ¿Hay algún punto de la gráfica de $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ en el que la tangente esté menos inclinada que la bisectriz del primer cuadrante?

$f'(x) = \dfrac{2}{\cos^2 2x} \geq 2$, luego las tangentes a la curva siempre tienen pendiente mayor que 2. Por tanto, no existe un punto donde la tangente a la gráfica de la función esté menos inclinada que la bisectriz del primer cuadrante.

52. Obtén la derivada de las funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen}\left(x^2 + e^{2x} - \sqrt{x}\right)$

b) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$

a) $f'(x) = \cos\left(x^2 + e^{2x} - \sqrt{x}\right)\left(2x + 2e^{2x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

b) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$

53. Encuentra los puntos con abscisa en $[0, 2\pi]$ para los que la tangente a la curva $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ es horizontal.

$f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x = 0$ si $\cos x = \operatorname{sen} x$, luego $x = \dfrac{\pi}{4}$ o $x = \dfrac{5\pi}{4}$.

Los puntos buscados son $P\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y $Q\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

54. Pon tu calculadora en grados y obtén, con ayuda de la misma, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Compara el resultado con el obtenido en radianes y justifica la ventaja de utilizar radianes en Análisis.

x	0,1º	–0,1º	0,01	0,001º
$f(x)$	0,017453283	0,017453283	0,017453292	0,017453292

El límite es $\dfrac{\pi}{180}$.

55. Halla las derivadas de las funciones:

a) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2 - x)$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^3(3x^2 + 2x)}$

a) $f'(x) = 3\operatorname{sen}^2(x^2 - x)\cos(x^2 - x)(2x - 1)$

b) $f'(x) = \dfrac{3\cos^2(3x^2 + 2x)\operatorname{sen}(3x^2 + 2x)(6x + 2)}{\cos^6(3x^2 + 2x)} = \dfrac{(18x + 6)\operatorname{sen}(3x^2 + 2x)}{\cos^4(3x^2 + 2x)}$

56. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \operatorname{arcsen}\sqrt{x}$

b) $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$

c) $f(x) = \arccos e^x$

d) $f(x) = \operatorname{arcsen} x - \arccos x$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1 - x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x(1 - x)}}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{x(1 + \ln^2 x)}$

c) $f'(x) = -\dfrac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$

57. Deriva $f(x) = \text{arcsen}\, x + \arccos x$ y explica el resultado.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

La razón de este resultado es que $\arccos x + \text{arcsen}\, x = \frac{\pi}{2}$ y al derivar ambos miembros se obtiene:

$$(\arccos x + \text{arcsen}\, x)' = 0$$

58. Deriva las funciones:

a) $f(x) = \text{arctg}(\text{arctg}\, x)$

b) $f(x) = \text{arctg}(\text{tg}\, x \cdot \text{arctg}(x))$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\text{arctg}^2(x)} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\text{tg}^2 x \cdot \text{arctg}^2(x)} \cdot \left(\dfrac{\text{arctg}\, x}{\cos^2 x} + \dfrac{\text{tg}\, x}{1+x^2}\right)$

59. Ejercicio interactivo.

60. Calcula, mediante derivada logarítmica las derivadas de:

a) $f(x) = x^x$ con $x > 0$

b) $f(x) = x^{2+\text{sen}\, x}$ con $x > 0$

a) $\ln(f(x)) = \ln x^x = x \ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) = x^x(\ln x + 1)$

b) $\ln(f(x)) = \ln\left(x^{2+\text{sen}\, x}\right) = (2+\text{sen}\, x)\ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \dfrac{2+\text{sen}\, x}{x} \Rightarrow f'(x) = x^{2+\text{sen}\, x}\left(\cos x \ln x + \dfrac{2+\text{sen}\, x}{x}\right)$

61. Si f y g son funciones positivas y derivables, deduce la derivada de fg y $\frac{f}{g}$ mediante derivación logarítmica.

$\ln(fg) = \ln f + \ln g$, derivando, se obtiene: $\dfrac{(fg)'}{fg} = \dfrac{f'}{f} + \dfrac{g'}{g} \Rightarrow (fg)' = f'g + fg'$

$\ln\left(\dfrac{f}{g}\right) = \ln f - \ln g$, derivando se obtiene: $\dfrac{\left(\frac{f}{g}\right)'}{\frac{f}{g}} = \dfrac{f'}{f} - \dfrac{g'}{g} \Rightarrow \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

62. Calcula mediante derivación logarítmica la derivada de las siguientes funciones sin preocuparte del dominio de las funciones que aparecen ni de su signo.

a) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

b) $f(x)=(\text{arctg}\,x)^x$

c) $f(x)=x^{(x^x)}$

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$

a) $\ln(f(x))=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=x(\ln(x+1)-\ln x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(x+1)-\ln x+\frac{x}{x+1}-1\Rightarrow f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln(x+1)-\ln x+\frac{x}{x+1}-1\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$$

b) $\ln(f(x))=\ln\left((\text{arctg}\,x)^x\right)=x\ln(\text{arctg}\,x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(\text{arctg}\,x)+\frac{x}{(1+x^2)\text{arctg}\,x}\Rightarrow f'(x)=(\text{arctg}\,x)^x\left(\ln(\text{arctg}\,x)+\frac{x}{(1+x^2)\text{arctg}\,x}\right)$$

c) $\ln(f(x))=\ln\left(x^{(x^x)}\right)=x^x\ln x$

Por el ejercicio 60 a) sabemos que $(x^x)'=x^x(\ln x+1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=(x^x)'\ln x+\frac{x^x}{x}=x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}\Rightarrow f'(x)=x^{(x^x)}\left(x^x(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}\right)$$

d) $\ln(f(x))=\ln\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}\right)=\dfrac{1}{2}\ln(x-1)-\dfrac{2}{3}\ln(x+2)-\dfrac{3}{2}\ln(x+3)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2}{3(x+2)}-\frac{3}{2(x+3)}\Rightarrow f'(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}\left(\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2}{3(x+2)}-\frac{3}{2(x+3)}\right)$$

63. Obtén, en $P(\pi,1)$, la ecuación de la tangente a la curva:

$$\pi^2y^3\cos x-x^2y+2\pi^2\,.$$

Derivando la expresión, se obtiene: $-\pi^2y^3\,\text{sen}\,x+3\pi^2y^2y'\cos x-2xy-x^2y'=0$, si $x=\pi$, $y=1$ y se obtiene:

$-3\pi^2y'-2\pi-\pi^2y'=0$, luego $y'=-\dfrac{1}{2\pi}$ y la ecuación de la recta tangente es $y=-\dfrac{1}{2\pi}(x-\pi)+1=-\dfrac{x}{2\pi}+\dfrac{3}{2}$.

64. Obtén la ecuación de la tangente a la curva $x^2+y^2=13$ en $P(2,3)$ de dos formas: utilizando la derivación implícita y despejando *y*.

Derivación implícita: $2x+2yy'=0$ en $x=2$, $y=3$ se tiene $y'=-\dfrac{2}{3}$.

Despejando *y* (observa que está cerca de $y=3$, luego *y* es positivo):

$y=\sqrt{13-x^2}\Rightarrow y'=-\dfrac{x}{\sqrt{13-x^2}}$, en $x=2$, $y'=-\dfrac{2}{3}$. Así pues la recta tangente es $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{13}{3}$.

65. Calcula, derivando implícitamente, la derivada segunda en cada punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

Derivando una vez tenemos: $2x + 2yy' = 0$, luego $y' = -\dfrac{x}{y}$. Derivando de nuevo tenemos: $2 + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$.

Por tanto, $y'' = -\dfrac{1+(y')^2}{y} = -\dfrac{1+\dfrac{x^2}{y^2}}{y} = -\dfrac{y^2+x^2}{y^3} = -\dfrac{9}{y^3} = -\dfrac{9}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$.

66. Usa la derivación implícita para calcular la pendiente de la recta tangente a la curva dada en el punto de abscisa *x*.

a) $x^2y^3 = 27$, si $x = 1$

b) $x^2y - 2xy^3 + 6 = 2x + 2y$, si $x = 0$

a) Se deriva: $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0$. Si $x = 1$, entonces $y = 3$. Por tanto, $y' = -2$.

La ecuación de la recta tangente es $y = -2x + 5$.

b) Se deriva: $2xy + x^2y' - 2y^3 - 6xy^2y' = 2 + 2y'$. Si $x = 0$, entonces $y = 3$. Por tanto, $y' = -28$.

La ecuación de la tangente es: $y = -28x + 3$

67. Usa la derivación implícita para calcular $f''(x)$ si:

$$\mathbf{3x^2 - 2(f(x))^2 = 12.}$$

Se deriva una vez la expresión: $6x - 4f(x)f'(x) = 0 \Rightarrow 3x - 2f(x)f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3x}{2f(x)} = \dfrac{3x}{\sqrt{2}\sqrt{3x^2-12}}$

Se deriva esta expresión: $3 - 2\left[(f'(x))^2 + f(x)f''(x)\right] = 0 \Rightarrow (f'(x))^2 + f(x)f''(x) = \dfrac{3}{2} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{1}{f(x)}\left[\dfrac{3}{2} - (f'(x))^2\right]$

Por tanto: $f''(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3x^2-12}}\left[\dfrac{3}{2} - \dfrac{9x^2}{2(3x^2-12)}\right]$

68 y 69. Ejercicios resueltos.

70. Las aproximaciones lineales son útiles solo si Δx es pequeño. Justifica esta afirmación obteniendo con la calculadora $\sqrt{117}$ considerando 117 como cercano a 100 en lugar de a 121.

Con la calculadora obtenemos $\sqrt{117} \simeq 10{,}81665$.

Con la aproximación lineal tomando $f(x) = \sqrt{x}$ como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\sqrt{117} = f(117) \simeq f(100) + f'(100)(117-100) = 10 + \frac{17}{20} = 10{,}85$$

Sin embargo, si hacemos la aproximación con 121 obtenemos:

$$\sqrt{117} = f(117) \simeq f(121) + f'(121)(117-121) = 11 - \frac{4}{22} = 10{,}\widehat{81}$$

71. Utiliza las diferenciales para aproximar el valor de $2{,}001^7 + 3 \cdot 2{,}001^4 - 5 \cdot 2{,}001^2$ y compara el resultado con el número obtenido directamente con la calculadora.

Se considera $f(x) = x^7 + 3x^4 - 5x^2$, $f'(x) = 7x^6 + 12x^3 - 10x$. Por tanto, $f(2) = 156$ y $f'(2) = 534$.

Valor de la aproximación lineal: $L(2{,}001) = f(2) + f'(2) \cdot 0{,}001 = 156 + 0{,}534 = 156{,}534$.

Con la calculadora se obtiene: 156,5247396.

72 a 83. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica

84. Calcula, usando la definición, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = 3x^2 - 4x$ en $x = 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ en $x = -1$

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(1+h)^2 - 4(1+h) + 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h^2 + 2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (3h+2) = 2$

b) $f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{h+2} - \frac{1}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{2h(h+2)} = -\dfrac{1}{4}$

85. Explica por qué no existen las derivadas de las funciones siguientes.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ en $x = 2$

b) $f(x) = \left|x^2 - 7x + 12\right|$ en $x = 4$

a) La función no es continua en x = 2 (tiene una asíntota vertical) y, por tanto, no es derivable.

b) $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \dfrac{\left|h^2 + h\right|}{h} = \begin{cases} h+1 & \text{si } h > 0 \\ -h-1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$. Luego no existe la derivada porque no existe $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$.

86. Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{si } x\neq 1\\ -1 & \text{si } x=1\end{cases}$ en $x=1$

b) $f(x)=\begin{cases}7-3x & \text{si } x<2\\ x^2-7x+11 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$ en $x=2$

c) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x-6 & si\ x<3\\ \dfrac{x}{2-x} & si\ x\geq 3\end{cases}$ en $x=3$

a) Continuidad: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-1}=-1=f(-1)$. Luego la función es continua en $x=1$.

Derivabilidad: $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{(1+h)^2-3(1+h)+2}{h}+1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2}{h^2}=1$. Luego la función es derivable en $x=1$ y $f'(1)=1$.

b) Continuidad: $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(7-3x)=1$, $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-7x+11)=1$ y $f(2)=1$. Por tanto, la función es continua en $x=2$.

Derivabilidad: $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{7-3(2+h)-1}{h}=-3\\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{(2+h)^2-7(2+h)+11-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h(h-3)}{h}=-3\end{cases}$. Por tanto, la función es derivable en $x=2$ y $f'(2)=-3$.

c) Continuidad: $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-2x-6)=-3$, $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{x}{2-x}\right)=-3$ y $f(3)=-3$. Por tanto, la función es continua en $x=3$.

Derivabilidad: $f'(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{(3+h)^2-2(3+h)-6+3}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^2+4h}{h}=4\\ \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\dfrac{3+h}{-1-h}+3}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{-2h}{h(-1-h)}=2\end{cases}$. Por tanto la función no es derivable en $x=3$.

87. Calcula la ecuación de la recta tangente a cada gráfica en el punto indicado. Comprueba a continuación tu respuesta representando, con ayuda de una calculadora gráfica o un ordenador, la gráfica de la función y la recta tangente.

a) $f(x) = x^2 + 1$ en $A(3, f(3))$

b) $g(x) = \sqrt{x+1}$ en $B(3, g(3))$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en $C(0, h(0))$

a) $f'(x) = 2x$, $f'(3) = 6$ y $f(3) = 10$

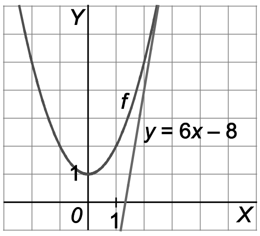
Recta tangente: $y = 6x - 8$

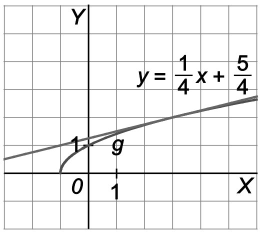
b) $g'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(3+h) - g(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h+4} - 2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h\left(\sqrt{h+4} + 2\right)} = \dfrac{1}{4}$ y $g(3) = 2$

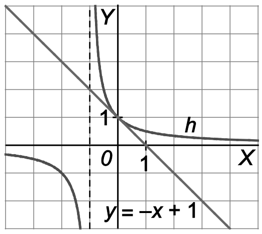
Recta tangente: $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$

c) $h'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{h(t) - h(0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{1+t} - 1}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{-t}{t(t+1)} = -1$ $h(0) = 1$

Recta tangente: $y = -x + 1$







88. Halla los puntos de intersección de las funciones $y = x$ e $y = \dfrac{1}{x}$. Comprueba que en dichos puntos la tangente a $y = \dfrac{1}{x}$ es perpendicular a $y = x$.

$x = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ o $x = -1$. Calculamos la pendiente de la tangente en los puntos $x = 1$ y $x = -1$.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{h+1} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(h+1)} = -1$$

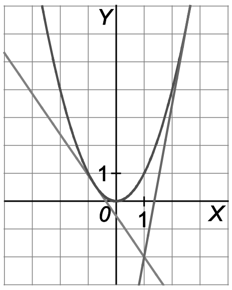
$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{h-1} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(h-1)} = -1$$

Luego las rectas tangentes son $y = -x + 2$ e $y = -x - 2$, ambas perpendiculares a $y = x$.

89. Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $y = x^2$ trazadas desde el punto $P(1,-2)$. Representa gráficamente la parábola y las dos tangentes obtenidas.

$f(a) = a^2$ y $f'(a) = 2a$, la ecuación de la recta tangente a la parábola por el punto $A(a,a^2)$ es $y = 2ax - a^2$.

Si se quiere que pase por el punto $P(1,-2)$ debe ser $-2 = 2a - a^2$ cuyas soluciones son $a = 1+\sqrt{3}$ y $a = 1-\sqrt{3}$ y las tangentes buscadas son $y = 2\left(1+\sqrt{3}\right)x - 2\left(2+\sqrt{3}\right)$ y $y = 2\left(1-\sqrt{3}\right)x - 2\left(2-\sqrt{3}\right)$.



90. Sea $f(x) = x^2 + ax + b$. Halla los valores de a y b para que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica en el punto $P(2,4)$.

Como la parábola pasa por $P(2,4)$ debe ser $4 + 2a + b = 4$.

Además, como la tangente en ese punto tiene pendiente 2, debe ser $f'(2) = 2\cdot 2 + a = 2$, luego $a = -2$ y $b = 4$.

91. Halla todas las tangentes a la curva $y = x^4$ que pasen por $P(2,0)$.

La tangente a la curva por el punto de abscisa $x = a$ tiene ecuación $y = 4a^3x - 3a^4$. Para que pase por $P(2,0)$ debe ser $0 = 8a^3 - 3a^4$ cuyas soluciones son $a = 0$ y $a = \dfrac{8}{3}$.

Luego las tangentes buscadas son $y = 0$ e $y = \left(\dfrac{8}{3}\right)^3(4x - 8)$.

92. Halla el área limitada por la recta $y = 4$, la normal a la curva $y = -x^2 + 5x$ en el punto de abscisa $x = 2$ y la tangente a la parábola $y = x^2 + 2x + 3$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Se representa gráficamente dicha área.

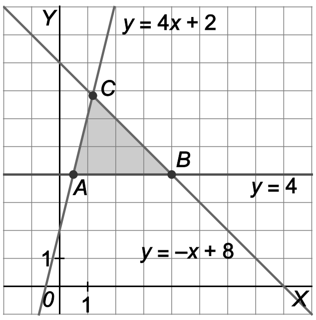
Para ello se halla la normal a la curva $y = -x^2 + 5x$ en el punto de abscisa $x = 2$:

$$f'(2) = 1,\ y = -x + 8$$

Y la tangente a la parábola $y = x^2 + 2x + 3$ en $x = 1$ es $y = 4x + 2$.

Se hallan los puntos de intersección de las tres rectas:

$$A\left(\frac{1}{2},4\right),\ B(4,4)\ \text{y}\ C\left(\frac{6}{5},\frac{34}{5}\right)$$



El área es $A = \dfrac{1}{2}\left(4 - \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{34}{5} - 4\right) = 4{,}9\ \text{u}^2$.

93. Halla el valor de los números reales *a* y *b* sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la curva de ecuación $y = ax^2 + bx$ en el punto $P(2,2)$ vale 5.

Sabemos que $f(2) = 2$ y $f'(2) = 5$, es decir $4a + 2b = 2$ y $4a + b = 5$, luego $b = -3$ y $a = 2$ con lo que la ecuación de la parábola es $y = 2x^2 - 3x$.

Función derivada. Derivadas laterales

94. Aplicando la definición, calcula la derivada de las funciones siguientes en los puntos en los que estén definidas.

a) $f(x) = \sqrt{12 - 4x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

a) $f(x) = \sqrt{12 - 4x}$ si $x < 3$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{12 - 4(x+h)} - \sqrt{12 - 4x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{12 - 4(x+h)} - \sqrt{12 - 4x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{12 - 4(x+h)} + \sqrt{12 - 4x}}{\sqrt{12 - 4(x+h)} + \sqrt{12 - 4x}} = \lim_{h\to 0} \frac{-4h}{h\left(\sqrt{12 - 4(x+h)} + \sqrt{12 - 4x}\right)} = \frac{-2}{\sqrt{12 - 4x}}$$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ si $x > 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\sqrt{x+h}}{x+h+1} - \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+1)\sqrt{x+h} - (x+h+1)\sqrt{x}}{h(x+h+1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+1)\sqrt{x+h} - (x+h+1)\sqrt{x}}{h(x+h+1)(x+1)} \cdot \frac{(x+1)\sqrt{x+h} + (x+h+1)\sqrt{x}}{(x+1)\sqrt{x+h} + (x+h+1)\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left[(x+1)^2 - 2x(x+1) - hx\right]}{h(x+h+1)(x+1)\left((x+1)\sqrt{x+h} + (x+h+1)\sqrt{x}\right)} = \frac{-x+1}{2(x+1)^2\sqrt{x}}$$

95. Demuestra que la segunda derivada de una función polinómica de segundo grado es siempre una función constante. ¿Cuánto vale esa constante?

$P(x) = ax^2 + bx + c$; entonces $P'(x) = 2ax + b$ y $P''(x) = 2a$ que es constante. La constante es el doble del coeficiente principal.

96. Encuentra un polinomio $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 2$; $f'(1) = 4$; $f''(1) = 10$; $f'''(1) = 12$, y $f^{n)}(x) = 0$ si n > 3.

Como las derivadas son cero a partir de la cuarta, el polinomio es de tercer grado: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ y sus derivadas sucesivas son: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$ y $f'''(x) = 6a$.

Utilizando los valores de la función y las derivadas en $x = 1$ se plantea el sistema $\begin{cases} 6a = 12 \\ 6a + 2b = 10 \\ 3a + 2b + c = 4 \\ a + b + c + d = 2 \end{cases}$

Resolviendo el sistema se tiene que el polinomio buscado es $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$.

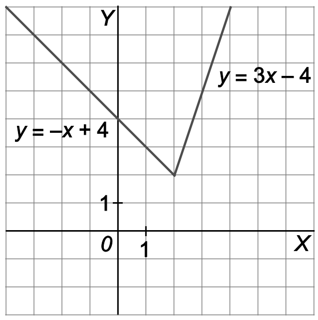
97. Calcula las derivadas laterales de la función $f(x) = |2x - 4| + x$ en el punto $x = 2$. ¿Es la función derivable en dicho punto? Esboza su gráfica.

Se escribe la función a trozos: $f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 2 \\ 3x - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$$f'(2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{4 - 2 - h - 2}{h} = -1$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{6 + 3h - 4 - 2}{h} = 3$$

La función no es derivable en $x = 2$



98. Calcula las derivadas laterales en $x = 1$ (si existen) y decide si las funciones son derivables en dicho punto.

a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

b) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) La función está definida en $[-1, 1]$, luego no existe la derivada lateral derecha.

$f'(1^-) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{-2h - h^2}}{h} = -\infty$. La función no es derivable en $x = 1$.

b) $f'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^3}{h} = 0$, $f'(1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0$. La función es derivable en $x = 1$ y $f'(1) = 0$.

c) $f'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{2h + h^2}{h} = 2$, $f'(1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{2h + 2 - 1}{h} = +\infty$. La función no es continua en en $x = 1$ y, por tanto, no es derivable en ese punto.

d) $f'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = 2$, $f'(1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1 + h - 1}{h} = 1$. La función no es derivable en $x = 1$.

99. Dadas las funciones $f(x)=x^2+2x-1$, $g(x)=-x^2+6x+2$ y $F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x<1 \\ g(x) & \text{si } x\geq 1\end{cases}$, calcula:

a) $f'(1)$ y $f'(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)$

b) $g'(1)$ y $g'(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} g'(x)$

c) $F'(1^-)$ y $F'(1^+)$

¿Es $F(x)$ derivable en $x=1$? ¿Es $F(x)$ continua en $x=1$?

a) $f'(x)=2x+2$, $f'(1)=4$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=4$

b) $g'(x)=-2x+6$, $g'(1)=4$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} g'(x)=4$

c) Observa que $F(1)=g(1)=7$

$$F'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2+2(1+h)-1-7}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+4h-5}{h}=+\infty$$

$$F'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(1+h)^2+6(1+h)+2-7}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(-h+4)}{h}=4$$

d) Como $F'(1^+)$ y $F'(1^-)$ no coinciden, la función $F(x)$ no es derivable en $x=1$ a pesar de que $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$. El problema es que $F(x)$ no es continua en $x=1$ pues $\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=7=F(1)$.

Derivadas de las operaciones con funciones

100. Dadas las funciones $f(x)=x^2+2x+1$ y $g(x)=3x-1$, calcula:

a) $f'(x)$ y $g'(x)$

b) $(5f)'(x)$

c) $(f+g)'(x)$

d) $(2f-3g)'(x)$

e) $(f^2)'(x)$

f) $(fg)'(x)$

g) $\left(\dfrac{g}{f}\right)'(x)$

h) $\left(\dfrac{1}{f+g}\right)'(x)$

a) $f'(x)=2x+2$ y $g'(x)=3$

b) $(5f)'(x)=5f'(x)=10x+10$

c) $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)=2x+5$

d) $(2f-3g)'(x)=2f'(x)-3g'(x)=2(2x+2)-9=4x-5$

e) $(f^2)'(x)=(ff)'(x)=2f(x)f'(x)=2(x^2+2x+1)(2x+2)$

f) $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=(2x+2)(3x-1)+3(x^2+2x+1)$

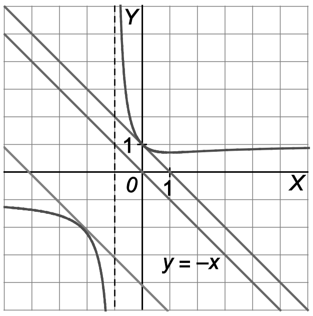
g) $\left(\dfrac{g}{f}\right)'(x)=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{(f(x))^2}=\dfrac{3(x^2+2x+1)-(3x-1)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$

h) $\left(\dfrac{1}{f+g}\right)'(x)=\dfrac{-(f+g)'(x)}{((f+g)(x))^2}=-\dfrac{f'(x)+g'(x)}{(f(x)+g(x))^2}=-\dfrac{2x+2+3}{(x^2+2x+1+3x-1)^2}=-\dfrac{2x+5}{(x^2+5x)^2}$

101. Sea la función:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

Represéntala con la calculadora gráfica o el ordenador y halla aproximadamente los puntos en los que su gráfica admite una tangente paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.



En la gráfica hay dos puntos en los que la tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.

Como se quiere $f'(x)=1$, se calcula:

$$f'(x)=\frac{\frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^2}=\frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}=-1 \text{ si } (x+1)^2\sqrt{x^2+1}+x-1=0$$

La solución $x=0$ es fácil de encontrar por tanteo. La segunda solución se aproxima con ayuda de la calculadora. En la gráfica se observa que está entre -3 y -2 más cerca del -2.

Haciendo una pequeña tabla de valores:

–2	–2,2	–2,16	–2,15	–2,1
0,34164	0,08044	0,01338	–0,0045	–0,10148

Se observa que $x-1+(x+1)^2\sqrt{x^2+1}>0$ si $x>-2{,}16$ y $x-1+(x+1)^2\sqrt{x^2+1}<0$ si $x<-2{,}15$.

Luego el punto buscado tiene abscisa $x=-2{,}15\ldots$

Derivada de la composición de funciones

102. Calcula la derivada de las siguientes funciones compuestas.

a) $f(x)=\left(\sqrt{x}+x\right)^5$ **b)** $f(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x^3}}$ **c)** $f(x)=\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^3$

a) $f'(x)=5\left(\sqrt{x}+x\right)^4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)$

b) $f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3}{2x+1}}\cdot\frac{-4x-3}{x^4}$

c) $f'(x)=3\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^2\cdot\frac{-8}{(x-5)^2}=-\frac{8}{3}\frac{(x+3)^2}{(x-5)^4}$

103. Sabiendo que $f(2)=1$; $f'(2)=3$; $g(2)=2$; $g'(2)=5$ y $g'(1)=0$, calcula:

a) $(f\circ g)'(2)$ **c)** $(f^2\circ g)'(2)$ **e)** $(\sqrt{g})'(2)$

b) $(g\circ f)'(2)$ **d)** $\left(\frac{1}{f}\circ g\right)'(2)$ **f)** $(f^n)'(2)$

a) $(f\circ g)'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(2)5=15$

b) $(g\circ f)'(2)=g'(f(2))f'(2)=g'(1)3=0$

c) $(f^2\circ g)'(2)=2f(g(2))f'(g(2))g'(2)=2f(2)f'(2)5=10\cdot 1\cdot 3=30$

d) $\left(\frac{1}{f}\circ g\right)'(2)=\left(\frac{1}{f}\right)'(g(2))g'(2)=-\frac{f'(g(2))}{(f(g(2)))^2}g'(2)=-\frac{f'(2)}{(f(2))^2}5=-15$

e) $(\sqrt{g})'(2)=\frac{g'(2)}{2\sqrt{g(2)}}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$

f) $(f^n)'(2)=nf^{n-1}(2)f'(2)=3n$

104. Obtén la derivada de $f(x)=\frac{1+x^3}{2-x}$ y, a partir del resultado obtenido, escribe la derivada de $g(x)=\frac{1-x^3}{2+x}$.

$f'(x)=\frac{3x^2(2-x)+1+x^3}{(2-x)^2}=\frac{-2x^3+6x^2+1}{(2-x)^2}$

Como $g(x)=f(-x)$, se tiene que $g'(x)=-f'(-x)=\frac{-2x^3-6x^2-1}{(2+x)^2}$.

105. Sea *f* una función derivable que cumple $f(x+3)=8x-12$ cualquiera que sea el valor de *x*. Calcula:

a) $f(f'(1))$ **b)** $f'(f(1))$

Derivando la expresión $f(x+3)=8x-12$ se tiene $(f(x+3))'=(8x-12)'\Rightarrow f'(x+3)\cdot 1=8$, para todo *x*.

a) Como $f'(1)=8$, entonces $f(f'(1))=f(8)=f(5+3)=8\cdot 5-12=28$.

b) $f'(f(1))=f'(f(-2+3))=f'(-28)=8$

Derivada de la función inversa

106. Calcula en cada caso, el valor de *b*.

a) $f'(1)=-5$ $f^{-1}(0)=1$ $(f^{-1})'(0)=b$

b) $f'(0)=1$ $f^{-1}(5)=0$ $(f^{-1})'(-5)=b$

c) $f'(-1)=b$ $(f^{-1})(6)=-1$ $(f^{-1})'(6)=8$

a) $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(0))}=\frac{1}{f'(1)}=-\frac{1}{5}$

b) $(f^{-1})'(-5)=\frac{1}{f'(f^{-1}(-5))}=\frac{1}{f'(0)}=1$

c) $f'(-1)=f'(f^{-1}(6))=\frac{1}{(f^{-1})'(6)}=\frac{1}{8}$

107. Si $f(x)=x^3+x-10$, calcula $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

Como $f'(x)=3x^2+1$ y $f^{-1}(0)=2$, entonces $\left(f^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)}=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{13}$

Derivadas de las funciones exponencial y logarítmica

108. Calcula las derivadas de estas funciones.

a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{3+x^2}{3}\right)$ **b)** $f(x)=e^{3+x^2}$

a) $f'(x)=\dfrac{2x}{3+x^2}$ **b)** $f'(x)=2xe^{3+x^2}$

109. Calcula las derivadas de las siguientes funciones en los puntos en los que existan.

a) $f(x)=\dfrac{x^2\ln x}{x^2-1}$ **b)** $f(x)=\dfrac{e^x}{\ln x}$ **c)** $f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{x-1}}$ **d)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{xe^x}}{\sqrt[4]{x^3-x^2}}$

a) $f'(x)=\dfrac{(2x\ln x+x)\left(x^2-1\right)-2x^3\ln x}{\left(x^2-1\right)^2}$

b) $f'(x)=\dfrac{e^x\ln x-\dfrac{e^x}{x}}{\ln^2 x}=\dfrac{e^x(x\ln x-1)}{x\ln^2 x}$

c) $f'(x)=\dfrac{e^{x^2}\left(2x\sqrt{x-1}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)}{x-1}=\dfrac{e^{x^2}\left(4x(x-1)-1\right)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$

d) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{e^x(1+x)\sqrt[4]{x^3-x^2}}{2\sqrt{xe^x}}-\dfrac{\sqrt{xe^x}\left(3x^2-2x\right)}{4\left(\sqrt[4]{x^3-x^2}\right)^3}}{\sqrt{x^3-x^2}}=\dfrac{2e^x(1+x)\left(x^2-x\right)-e^x\left(3x^2-2x\right)}{4\sqrt{xe^x}\left(x^2-x\right)\sqrt[4]{x^3-x^2}}=\dfrac{e^x\left(2x^2-3x\right)}{4\sqrt{xe^x}\,(x-1)\sqrt[4]{x^3-x^2}}$

110. Calcula las derivadas sucesivas de las siguientes funciones y escribe la expresión general de la derivada enésima.

a) $f(x)=e^{7x}$ **b)** $f(x)=\ln x$

a) $f^{n)}(x)=7^n e^{7x}$

b) $f^{n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

111. ¿Para qué valores de x se anulan las derivadas de las funciones siguientes?

a) $f(x) = e^{2x} - 4e^{x}$ **c)** $f(x) = x \ln x - x$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$ **d)** $f(x) = e^{\frac{x^2}{x-3}}$

a) $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^{x} = e^{x}\left(2e^{x} - 4\right) = 0 \Rightarrow 2e^{x} - 4 = 0 \Rightarrow x = \ln 2$

b) $f'(x) = \dfrac{-3}{(x+1)(x-2)}$ no se anula nunca.

c) $f'(x) = \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

d) $f'(x) = e^{\frac{x^2}{x-3}} \cdot \dfrac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 6$.

Derivadas de las funciones trigonométricas y sus inversas

112. Calcula las derivadas de estas funciones.

a) $f(x) = \operatorname{sen}^3\left(x^2\right)$

b) $f(x) = 3\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

c) $f(x) = \left(\operatorname{sen} x^2 + \cos 3\right)^3$

a) $f'(x) = 6x\operatorname{sen}^2\left(x^2\right)\cos\left(x^2\right)$

b) $f'(x) = \dfrac{-6}{x\sqrt{x^4 - 1}}$

c) $f'(x) = 3\left(\operatorname{sen}\left(x^2\right) + \cos 3\right)^2\left(2x\cos\left(x^2\right)\right)$

113. Calcula las derivadas de las siguientes funciones en los puntos en los que existan.

a) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{arctg}x}$

b) $f(x)=e^{x}\cos x+e^{-x}\operatorname{sen}x$

c) $f(x)=\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^3 x^3+1\right)^3$

d) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}^2(2x)+2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}$

e) $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)\operatorname{tg}x$

f) $f(x)=\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+4}\right)$

g) $f(x)=\dfrac{2\pi^2\ln\left(x^3+x\right)}{\operatorname{tg}(\pi x)}$

h) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arcsen}3^x}{x\cos^3\left(e^x\right)}$

a) $f'(x)=\dfrac{\cos x\operatorname{arctg}x-\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+x^2}}{(\operatorname{arctg}x)^2}$

b) $f'(x)=e^{x}(\cos x-\operatorname{sen}x)+e^{-x}(-\operatorname{sen}x+\cos x)=(\cos x-\operatorname{sen}x)\left(e^{x}+e^{-x}\right)$

c) $f'(x)=\cos\left(\left(\operatorname{sen}^3\left(x^3\right)+1\right)^3\right)3\left(\operatorname{sen}^3\left(x^3\right)+1\right)^2 3\operatorname{sen}^2\left(x^3\right)\cos\left(x^3\right)3x^2=$

$=27\cos\left(\left(\operatorname{sen}^3\left(x^3\right)+1\right)^3\right)\left(\operatorname{sen}^3\left(x^3\right)+1\right)^2\operatorname{sen}^2\left(x^3\right)\cos\left(x^3\right)x^2$

d) Se escribe la función como:

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}^2(2x)+2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}=\frac{1+2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}(2x)}=\frac{1+\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}=\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}+1$$

$$f'(x)=\frac{-2\cos(2x)}{(\operatorname{sen}(2x))^2}$$

e) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}\operatorname{tg}x+\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{\cos^2 x}$

f) $f'(x)=\dfrac{x\cos\left(\sqrt{x^2+4}\right)}{\sqrt{x^2+4}}$

g) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{2\pi^2\left(3x^2+1\right)\operatorname{tg}(\pi x)}{x^3+x}-\dfrac{2\pi^3\ln\left(x^3+x\right)}{\cos^2(\pi x)}}{(\operatorname{tg}(\pi x))^2}$

h) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{\ln 3\left(x\cos^3\left(e^x\right)\right)3^x}{\sqrt{1-3^{2x}}}-\operatorname{arcsen}\left(3^x\right)\left(\cos^3\left(e^x\right)-3xe^x\cos^2\left(e^x\right)\operatorname{sen}\left(e^x\right)\right)}{\left(x\cos^3\left(e^x\right)\right)^2}$

114. Calcula las derivadas sucesivas de las siguientes funciones y escribe la expresión general de la derivada enésima.

a) $f(x)=\operatorname{sen}x$ **b)** $f(x)=\cos(3x)$

a) $f^{4n)}(x)=\operatorname{sen}x$, $f^{4n+1)}(x)=\cos x$, $f^{4n+2)}(x)=-\operatorname{sen}x$ y $f^{4n+3)}(x)=-\cos x$

b) $f^{4n)}(x)=3^{4n}\cos(3x)$, $f^{4n+1)}(x)=-3^{4n+1}\operatorname{sen}(3x)$, $f^{4n+2)}(x)=-3^{4n+2}\cos(3x)$ y $f^{4n+3)}(x)=3^{4n+3}\operatorname{sen}(3x)$

115. La función $f(x)=\sqrt{x}$ no es derivable en x = 0, y la función $g(x)=\operatorname{sen}x$, sí. ¿Es derivable en x = 0 la función $p(x)=\sqrt{x}\operatorname{sen}x$?

Como $D(p)=[0,+\infty)$, solo se puede calcular la derivada lateral a derecha. Dicha derivada, sí existe, y para calcularla observa que existen los límites $\lim\limits_{h\to 0^+}\sqrt{h}$ y $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen}h}{h}=1$.

Luego $p'(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\sqrt{h}\operatorname{sen}h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\sqrt{h}\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen}h}{h}=0\cdot 1=0$.

116. ¿Para qué valores de x se anulan las derivadas de las funciones siguientes?

a) $f(x)=\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen}x}$ **b)** $f(x)=\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}\right)$ **c)** $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{sen}x}$

a) $f'(x)=\dfrac{-\operatorname{sen}x(1-\operatorname{sen}x)+\cos^2 x}{(1-\operatorname{sen}x)^2}=\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}x}$ no se anula nunca.

b) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen}x}-\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen}x}\right)=\dfrac{-\operatorname{sen}x\cos x}{\cos^2 x}=-\operatorname{tg}x=0\Rightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

c) $f'(x)=\dfrac{1+sen\,x-\operatorname{sen}x\cos^2 x}{\cos^2 x(1+\operatorname{sen}x)^2}=\dfrac{\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}x+1}{\cos^2 x(1+\operatorname{sen}x)}$ no se anula nunca.

117. Estudia la continuidad y la derivabilidad en $x=3\pi$ de la función: $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}x & \text{si } \dfrac{3\pi}{2}\le x<3\pi\\ x-3\pi & \text{si } 3\pi\le x\le 12\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 3\pi^-}f(x)=\operatorname{sen}(3\pi)=0=\lim\limits_{x\to 3\pi^+}f(x)=f(3\pi)$. Luego la función es continua en $x=3\pi$.

Calculemos la derivada a izquierda y a derecha:

$f'(3\pi^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{(3\pi+h)-3\pi}{h}=1$ $f'(3\pi^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}(3\pi+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}3\pi\cos h+\cos 3\pi\operatorname{sen}h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-\operatorname{sen}h}{h}=-1$

La función es derivable en $x=3\pi$ y $f'(3\pi)=1$.

118. Estudia en qué puntos es derivable la función: $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } 0\le x\le 2\\ x-1 & \text{si } x>2\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x\le 0\\ 0 & \text{si } 0\le x\le 2\\ 1 & \text{si } x>2\end{cases}$. Se estudia la derivabilidad en $x=0$ y en $x=2$.

$f'(0^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{h^2+1-1}{h}=0$ $f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1-1}{h}=0$

$f'(2^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{1-1}{h}=0$ $f'(2^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{(2+h)-1-1}{h}=1$

Así pues, f es derivable en $x=0$ y no lo es en $x=2$.

Derivación logarítmica e implícita

119. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^{1-x}$

b) $f(x) = x^{e^x}$

c) $f(x) = (x + \operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^{\operatorname{sen} x - \cos x}$

a) $f'(x) = x^{1-x}\left(-\ln x + \dfrac{1-x}{x}\right)$

b) $f'(x) = x^{e^x} e^x \left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$

c) $f'(x) = (x + \operatorname{sen} x)^{\sqrt{x}} \left(\dfrac{\ln(x + \operatorname{sen} x)}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}\,(1 + \cos x)}{x + \operatorname{sen} x}\right)$

d) $f'(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^{\operatorname{sen} x - \cos x} \left((\cos x + \operatorname{sen} x)\ln(\operatorname{sen} x + \cos x) - \dfrac{(\cos x - \operatorname{sen} x)^2}{\operatorname{sen} x + \cos x}\right)$

120. Dada la curva $x^2 y + xy^2 + \operatorname{sen}(x + y) + x = \pi$:

a) Comprueba que el punto $P(\pi, 0)$ pertenece a dicha curva.

b) Calcula la ecuación de la tangente en dicho punto.

a) $\pi^2 \cdot 0 + \pi \cdot 0^2 + \operatorname{sen}(\pi + 0) + \pi$ es, efectivamente, π.

b) Calculemos $y'(\pi)$: $2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' + (1 + y')\cos(x + y) + 1 = 0$.

Sustituyendo $x = \pi$ e $y = 0$: $\pi^2 y'(\pi) + (1 + y'(\pi))\cos(\pi) + 1 = 0 \Rightarrow \pi^2 y'(\pi) - y'(\pi) = 0$.

Luego $y'(\pi) = 0$ y la recta tangente en $P(\pi, 0)$ es $y = 0$.

Diferencial de una función. Aproximación lineal de una función en un punto

121. Sabiendo que $\ln 2 \simeq 0{,}69315$:

a) Obtén la aproximación lineal de la función $f(x) = \log_2 x$ en $x = 2$ y utilízala para obtener los valores aproximados de $f(x)$ en $x = 2{,}01$; $x = 1{,}9$ y $x = 2{,}9$. Compara estos resultados con los obtenidos con la calculadora.

b) ¿Qué ocurre a medida que nos alejamos del 2?

a) $L(x) = \ln 2 + \dfrac{x - 2}{2}$

$L(2{,}01) = \ln 2 + \dfrac{0{,}01}{2} = 0{,}69315 + 0{,}005 = 0{,}69815$. Con la calculadora se obtiene $L(2{,}01) = 0{,}698134722$.

$L(1{,}9) = \ln 2 - \dfrac{0{,}1}{2} = 0{,}69315 - 0{,}05 = 0{,}64315$. Con la calculadora se obtiene $L(1{,}9) = 0{,}641853886$.

$L(2{,}9) = \ln 2 + \dfrac{0{,}9}{2} = 0{,}69315 + 0{,}45 = 1{,}14315$. Con la calculadora se obtiene $L(2{,}9) = 1{,}064710737$.

b) A medida que nos alejamos del 2 la aproximación lineal va empeorando.

122. Realiza una estimación lineal de la variación de la siguiente función al incrementar la *x* de 2 a 2,1.

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{x+1}$$

$f(2) = \frac{7}{3}$, $f'(2) = \frac{8}{9}$; $L(x) = \frac{7}{3} + \frac{8}{9}(x-2)$ y $L(2{,}1) = \frac{7}{3} + \frac{8}{9}(2{,}1-2) = \frac{7}{3} + \frac{4}{45}$

Por tanto, la variación es $\frac{4}{45}$.

Síntesis

123. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } x \le 1 \\ -\dfrac{1}{x} + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

¿Hay algún valor de *k* para que *f* sea derivable en $x = 1$?

Continuidad en $x = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{2} = 1 = f(1)$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(-\frac{1}{x} + k\right) = -1 + k$

Luego $-1 + k = 1 \Rightarrow k = 2$

Derivabilidad en $x = 1$ para $k = 2$

$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{(1+h)^2+1}{2} - 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1+h^2+2h+1-2}{2}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(h+2)}{2h} = 1$$

$$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{1}{1+h} + 2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h(1+h)} = 1$$

Por tanto para $k = 2$ la función *f* es derivable en $x = 1$ y $f'(1) = 1$.

124. Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x)=\begin{cases} x^3-x & \text{si } x<0 \\ -x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ en $x=0$

b) $f(x)=\begin{cases} 2\operatorname{sen}x-2 & \text{si } x\neq \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ en $x=\frac{\pi}{2}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{si } x<0 \\ \sqrt{4-x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ en $\mathbb{R}$

a) Continuidad en $x=0$:

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0=f(0)$ y $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^3-x)=0$. Así pues, la función es continua en $x=0$.

Derivabilidad en $x=0$:

$f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{-h}{h}=-1$ $\quad f'(0^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{h^3-h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{h(h^2-1)}{h}=-1$. Luego f es derivable en $x=0$.

b) Continuidad en $x=\frac{\pi}{2}$:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$ y $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2\operatorname{sen}x-2)=0$. Así pues, la función es continua en $x=\frac{\pi}{2}$.

Derivabilidad en $x=\frac{\pi}{2}$:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}^+\right)=\lim_{h\to 0^+}\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos h+2\cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}h-2}{h}=2\lim_{h\to 0^+}\frac{\cos h-1}{h}=2\cos'(0)=0$$

$f'\left(\frac{\pi}{2}^-\right)=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-2}{h}=2\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{\cos h-1}{h}=2\cos'(0)=0$. Luego la función f es derivable en $x=\frac{\pi}{2}$.

c) Basta con estudiar la continuidad y derivabilidad en $x=0$, porque en otro caso la función es continua y derivable.

Continuidad en $x=0$:

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{4-x}=2=f(0)$ y $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+2)=2$. Así pues, la función es continua en $x=0$.

Derivabilidad en $x=0$:

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{4-h}-2}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\left(\sqrt{4-h}-2\right)\left(\sqrt{4-h}+2\right)}{h\left(\sqrt{4-h}+2\right)}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h}{h\left(\sqrt{4-h}+2\right)}=\frac{-1}{4}$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+2-2}{h}=\lim_{h\to 0^-}h=0$$

Luego la función f no es derivable en $x=0$.

125. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \left(x^4 - 3x^2\right)\sqrt[3]{x^2 - 2}$

b) $f(x) = \dfrac{\ln(2x-3)}{x^3 + x - 1}$

c) $f(x) = e^{3x^2-1}\text{sen}(x+3)$

d) $f(x) = \text{arcsen}\left(x^2 - 1\right) - \text{arctg}\left(x^2 - 1\right)$

a) $f'(x) = \left(4x^3 - 6x\right)\sqrt[3]{x^2 - 2} + \dfrac{2x\left(x^4 - 3x^2\right)}{3\left(\sqrt[3]{x^2-2}\right)^2} = \dfrac{2x\left(7x^4 - 24x^2 + 18\right)}{3\left(\sqrt[3]{x^2-2}\right)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2\left(x^3 + x - 1\right)}{2x-3} - \ln(2x-3)\left(3x^2+1\right)}{\left(x^3+x-1\right)^2} = \dfrac{2\left(x^3+x-1\right) - \left(3x^2+1\right)(2x-3)\ln(2x-3)}{(2x-3)\left(x^3+x-1\right)^2}$

c) $f'(x) = e^{3x^2-1}\left(6x\,\text{sen}(x+3) + \cos(x+3)\right)$

d) $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1 - \left(x^2-1\right)^2}} - \dfrac{2x}{1 + \left(x^2-1\right)^2}$

126. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3}$.

Comprueba que la recta tangente en el punto de corte con el eje *Y* es paralela a la asíntota de dicha función.

La función corta al eje *Y* en $A(0, f(0))$, luego $A\left(0, \dfrac{5}{3}\right)$ y la pendiente de la recta tangente en ese punto es $f'(0)$.

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 2x + 3)(x^2+3) - 2x(x^3 - x^2 + 3x + 5)}{(x^2+3)^2} \Rightarrow f'(0) = 1$$

Como $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2+3} = x - 1 + \dfrac{8}{x^2+3}$, la asíntota es $y = x - 1$ que también tiene pendiente 1.

127. Dada la curva $2xy + y - x - 6 = 0$, se pide:

a) Calcular la segunda coordenada del punto $P(5, \bullet)$, que pertenece a dicha curva.

b) Calcular $y'(5)$ utilizando la derivación implícita.

c) Calcular $y'(5)$ despejando previamente la *y* y derivando posteriormente la función obtenida. (Los valores obtenidos deben coincidir).

a) Sustituyendo *x* por 5 se tiene $10y + y = 11$. Luego $y = 1 \Rightarrow P(5, 1)$

b) Derivando se obtiene $2y + 2xy' + y' - 1 = 0$ y sustituyendo *x* por 5 e *y* por 1:

$$2 \cdot 1 + 10y' + y' - 1 = 0$$

Luego $y'(5) = -\dfrac{1}{11}$

c) $(2x+1)y = x + 6$. Luego $y = \dfrac{x+6}{2x+1}$ e $y' = \dfrac{-11}{(2x+1)^2} \Rightarrow y'(5) = -\dfrac{1}{11}$

Cuestiones

128. **Si** $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si } x\le 0 \\ \operatorname{sen} x + x^3 + 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ **se verifica que:**

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<0 \\ \cos x + 3x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

¿Coinciden las derivadas laterales de f en $x = 0$?

Aunque $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 1$, las derivadas laterales en $x = 0$ no coinciden, pues, en caso de hacerlo, f sería derivable en $x = 0$ y no lo es, puesto que no es continua ya que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

Las derivadas laterales son:

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} h + h^3 + 1 - 0}{h} = +\infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (h+1) = 1$$

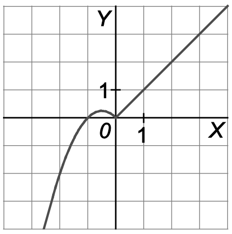
129. **La función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$ y la función $g(x) = \operatorname{sen} x$ sí lo es. ¿Es derivable en $x = 0$ la función $p(x) = f(x)g(x)$?**

Veamos si existe $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{p(0+h)-p(0)}{h}$:

Como $\dfrac{p(0+h)-p(0)}{h} = \dfrac{|h|\operatorname{sen} h}{h}$, entonces $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{p(0+h)-p(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|\operatorname{sen} h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} |h| \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} = 0\cdot 1 = 0$

Luego $p(x) = |x|\operatorname{sen} x$ es derivable en $x = 0$, y su derivada es 0.

130. **La función $f(x)=\begin{cases} -x^2-x & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$, cuya gráfica es la de la figura no es derivable en x = 0 como puedes observar. ¿Lo es $g(x) = xf(x)$?**



La función $g(x)$ es: $g(x)=\begin{cases} -x^3-x^2 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

$$g'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^3-h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \left(-h^2-h\right) = 0$$

$$g'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} h = 0$$

Así pues, $g(x)$ es derivable en $x = 0$ y su derivada es 0.

131. Si f es una función par y derivable en $\mathbb{R}$, ¿es $f'(0)=0$ necesariamente?

$$f'(0^+)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{f(-h)-f(0)}{-h}$$

Como *f* es par, $f(-h)=f(h)$, así que $f'(0^-)=-\lim_{h\to0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=-f'(0^+)$

Al ser *f* derivable en $x=0$, debe ser $f'(0^-)=f'(0^+)$, es decir, $f'(0)=0$.

132. Si la función *f* verifica que para cualesquiera números reales *a* y *b* se cumple que $f(a+b)=f(a)+f(b)+2ab$ y que $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$, demuestra que *f* es derivable en todos los números reales.

Veamos si existe $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ sea cual fuere *x*.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}=\frac{f(h)}{h}+2x$$

Así pues, $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\left[\frac{f(h)}{h}+2x\right]=2+2x$, es decir, *f* es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x)=2+2x$

133. Si $f(x)g(x)=e^x$, ¿puede haber algún número real para el que se anulen simultáneamente las derivadas de *f* y *g*?

$(f(x)g(x))'=e^x=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ no se hace cero nunca, por lo que no puede haber ningún número *x* para el que se anule simultáneamente f' y g', puesto que, de ser así, se anularía la suma.

134. La función $f(x)=x^4+x^2$ es una función par ($f(-x)=f(x)$) y su derivada $f'(x)=4x^3+2x$ es una función impar, ($f'(-x)=-f'(x)$). Justifica que esto ocurre siempre; en concreto: si *f* derivable en $\mathbb{R}$ es una función par, entonces f' es una función impar y si *f* es impar entonces f' es una función par.

Si *f* es par, $f(-x)=f(x)\Rightarrow[f(-x)]'=[f(x)]'\Rightarrow -f'(-x)=f'(x)\Rightarrow$ f' es impar

Si *f* es impar, $f(-x)=-f(x)\Rightarrow[f(-x)]'=[-f(x)]'\Rightarrow -f'(-x)=-f'(x)\Rightarrow f'(-x)=f'(x)\Rightarrow$ f' es par

135. Demuestra esta sencilla fórmula que nos da la derivada segunda de un producto:

$$(fg)''=f''g+2f'g'+fg''$$

$$(fg)''=((fg)')'=(f'g+fg')'=f''g+f'g'+f'g'+fg''=f''g+2f'g'+fg''$$

136. Comprueba que las definiciones:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

son la misma y, aplicando la segunda definición, calcula: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos^3 x+1}{x-\pi}$**.**

En $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ llamamos $x=a+h$, por lo que $x\to a \Leftrightarrow h\to 0$ y escribimos:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Tomando $f(x)=\cos^3 x$, $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos^3 x+1}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)$.

$f'(x)=3\cos^2 x(-\operatorname{sen} x)$, así que $f'(\pi)=0$, es decir, $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos^3 x+1}{x-\pi}=0$.

137. Sin calcular la derivada, comprueba que las siguientes parejas de funciones tienen la misma derivada:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ y $g(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

b) $f(x)=\cos 2x$ y $g(x)=2\cos^2 x$

c) $f(x)=\operatorname{arctg} x$ y $g(x)=-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

d) $f(x)=\ln\left(2x^2+1\right)$ y $g(x)=\ln\left(20x^2+10\right)$

Para comprobarlo no es necesario derivar, basta ver que las funciones difieren en una constante.

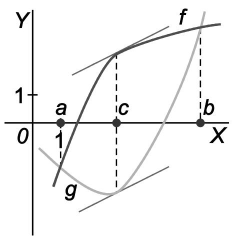
a) $g(x)-f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}-\dfrac{x}{x+1}=1$

b) $f(x)-g(x)=\cos 2x-2\cos^2 x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x-2\cos^2 x=-\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=-1$

c) $f(x)-g(x)=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. Si $\operatorname{arctg} x=n$, $\operatorname{tg} n=x$; $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=v$, $\operatorname{tg} v=\dfrac{1}{x}$. Entonces n y v son ángulos complementarios, es decir, $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$.

d) $g(x)-f(x)=\ln\left(20x^2+10\right)-\ln\left(2x^2+1\right)=\ln\left[10\left(2x^2+1\right)\right]-\ln\left(2x^2+1\right)=\ln 10+\ln\left(2x^2+1\right)-\ln\left(2x^2+1\right)=\ln 10$.

138. Si *f* y *g* son funciones derivables en $\mathbb{R}$ cuyas gráficas en el intervalo $[a,b]$ son como las de la figura, es decir, $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, $f(x)>g(x)$ en (a,b), parece que hay un número *c* en (a,b) tal que $f'(c)=g'(c)$. ¿Será eso siempre cierto?



Sí, siempre es cierto, pues la función $h(x)=f(x)-g(x)$ es continua y derivable en $[a,b]$. Tomemos el valor de c donde alcanza el máximo $h(x)$. Se trata, pues, de un punto en (a,b) pues $h(a)=0$ y $h(b)=0$.

Así que, $h'(c)=0$, es decir, $f'(c)=g'(c)$.

Problemas

139. Dadas las parábolas $f(x)=x^2-4x+3$ y $g(x)=x^2-16x+63$, calcula el área del triángulo formado por el eje *X* y las rectas tangentes a dichas parábolas en el punto de corte entre ellas.

Se comienza calculando el punto de corte entre las parábolas: $x^2-4x+3=x^2-16x+63 \Rightarrow x=5$. El punto de corte es $A(5,8)$.

En $A(5,8)$ la recta tangente a $f(x)=x^2-4x+3$ es $y-8=6(x-5)$. Operando se obtiene $y=6x-22$.

En $A(5,8)$ la recta tangente a $g(x)=x^2-16x+63$ es $y-8=-6(x-5)$. Operando se obtiene $y=-6x+38$.

El área del triángulo de vértices $A(5,8)$, $B\left(\frac{11}{3},0\right)$ y $C\left(\frac{19}{3},0\right)$ es $A=\left(\frac{19}{3}-\frac{11}{3}\right)\cdot\frac{8}{2}=\frac{32}{3}$ u^2.

140. Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva $y=\frac{2x}{1-x^2}$ para $x>1$. En el punto $P\left(2,-\frac{4}{3}\right)$ la abandona y sigue desplazándose a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

a) Halla la ecuación de dicha recta tangente.

b) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, encuentra el punto en el que la partícula encuentra al eje *X*.

c) Si el desplazamiento es de derecha a izquierda, encuentra el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto *P*.

a) $y'=\frac{2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$, $y'(2)=\frac{10}{9}$. La ecuación de la tangente es $y=\frac{10}{9}x-\frac{32}{9}$.

b) Como la partícula no corta al eje si *x* está en el intervalo $(1,2)$, cuando sigue la trayectoria $y=\frac{2x}{1-x^2}$, el corte debe darse si $x>2$. Así pues, debe ser $\frac{10}{9}x-\frac{32}{9}=0$. La partícula encuentra el eje *X* en el punto $A(3,2;0)$.

c) La asíntota más próxima a *P* es $x=1$. Luego la partícula se encuentra con esa asíntota en $B\left(1,-\frac{22}{9}\right)$.

141. Dadas las dos curvas:

$$y^3+5xy+3x-2y=0 \qquad\qquad xy^2+7xy+2x+3y=0$$

a) Demuestra que ambas pasan por el origen de coordenadas.

b) Demuestra que las rectas tangentes a dichas curvas en el origen son perpendiculares entre sí.

a) Al sustituir en ambas ecuaciones $x=y=0$, se observa que se cumplen ambas igualdades.

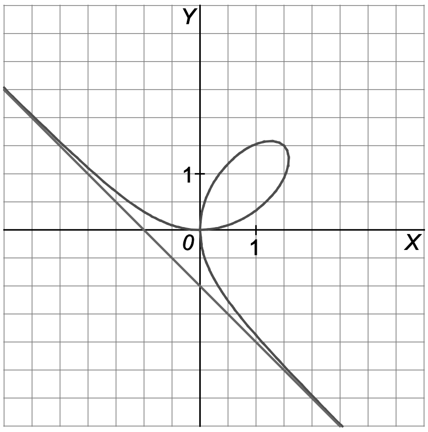
b) Se calculan las derivadas implícitas de ambas curvas y se sustituye *x* e *y* por 0 para obtener $y'(0)$.

$3y^2y'+5y+5xy'+3-2y'=0$. Por tanto, $y'(0)=\frac{3}{2}$

$y^2+2xyy'+7y+7xy'+2+3y'=0$. Por tanto, $y'(0)=-\frac{2}{3}$

Luego las tangentes tienen pendientes $\frac{3}{2}$ y $-\frac{2}{3}$ y, por tanto, son perpendiculares.

142. La *Hoja de Descartes* es la curva que corresponde a la gráfica de la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$ y tiene esta bella forma.



a) Explica por qué la Hoja de Descartes no es una función.

b) Comprueba que el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ pertenece a la *Hoja de Descartes*.

c) Mediante la derivación implícita comprueba que la tangente a la hoja en el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ es paralela a la asíntota de la *Hoja de Descartes*.

a) La Hoja de Descartes no es una función porque corta a algunas rectas verticales más de una vez (por ejemplo, a la recta $x = 1$)

b) Sustituyendo x e y por $\frac{3}{2}$ se observa que se verifica la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$

c) Derivando: $3x^2 + 3y^2y' = 3y + 3xy'$

Si $x = y = \frac{3}{2}$, se tiene $\frac{27}{4} + \frac{27}{4}y' = \frac{9}{2} + \frac{9}{2}y'$

Luego la pendiente de la tangente en dicho punto es $y' = -1$, que es paralela a la asíntota.

143. Sea $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = (1 - |x|)(1 - [x])$$

donde $[x]$ representa la parte entera de *x*, es decir, el mayor entero menor o igual que *x*.

Justifica la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) f es derivable en $(-2, 2)$.

b) Si x no es entero, $f^{4)}(x) = 0$.

a) Se escribe f como función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} 3(1+x) & \text{si } -2 \le x < -1 \\ 2(1+x) & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$.

Derivando se tiene que: $f'(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } -2 < x < -1 \\ 2x & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$, luego la función es derivable si x no es entero.

b) $f''(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -2 < x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$, $f'''(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2 < x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$. Por tanto, las derivadas sucesivas ya serán 0.

144. Sea f la función definida en $(0,+\infty)$ por: $f(x)=x^2\ln x-\frac{3}{2}x^2$

Demuestra que para todo entero $n\geq 3$, es: $f^{n)}=\frac{2(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}$

$f'(x)=2x\ln x-2x$, $f''(x)=2\ln x$, $f'''(x)=\frac{2}{x}$ y a partir de aquí se tiene las derivadas sucesivas de $\frac{1}{x}$ siempre multiplicadas por 2. Como si $g(x)=\frac{1}{x}$, entonces $g^{n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, se obtiene el resultado buscado.

145. Determina todas las funciones *f* de la forma $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ con $a\neq 0$ y que verifican $f'(-1)=f'(1)=0$

¿Algunas de las funciones obtenidas anteriormente verifica $f(0)=f(1)$?

Derivando se obtiene $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Se quiere que $3a-2b+c=3a+2b+c=0$. Luego $b=0$ y $c=-3a$.

Las funciones que verifican esto son de la forma $f(x)=ax^3-3ax+d$.

Si además se impone la condición de que $f(0)=f(1)$ debe ser $d=a-3a+d$, luego *a* debería ser 0. Así pues, ninguna de las anteriores verifica que $f(0)=f(1)$.

146. Un profesor algo despistado propone a sus estudiantes que encuentren una función *f* definida en $(0,+\infty)$ tal que:

$$f'(x)=\begin{cases}1 & \text{si } 0<x\leq 7\\ 2 & \text{si } x>7\end{cases}$$

y que $f(7)=3$. Un estudiante intenta calcular *f* y se lleva una sorpresa. Explica qué ha ocurrido.

Si intenta hallar una función con estas características se tendría $f(x)=\begin{cases}x+a & \text{si } 0<x\leq 7\\ 2x+b & \text{si } x>7\end{cases}$ que debería ser continua en $x=7$ pues es derivable allí, luego $a=-4$ y $b=-11$ pero la función así obtenida no es derivable en $x=7$ y, por tanto, su derivada no vale 1 en $x=7$ como debería.

147. Supón que f es derivable en x. Demuestra que:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

(Indicación: resta y suma en el numerador $f(x)$).

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-(f(x-h)-f(x))}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right)=$$

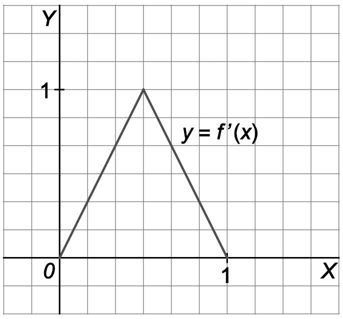
$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right)==\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right)=\frac{1}{2}(f'(x)+f'(x))=f'(x)$$

148. En la figura se representa la gráfica de la función derivada f' de una cierta función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

a) Halla una expresión algebraica de *f* sabiendo que su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

b) Representa gráficamente la función $f(x)$.

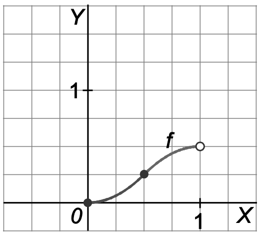
c) ¿Se verifica $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$?



a) $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -2x+2 & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$. Luego $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -x^2 + 2x + b & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$

Como $f(0) = 0$ y, al ser derivable, f es continua en $\frac{1}{2}$, se tiene que $a = 0$ y $\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + 1 + b$. Luego $b = -\frac{1}{2}$.

b)



c) En la gráfica de $f'(x)$ se observa que no existe $f''\left(\frac{1}{2}\right)$. Se comprueba calculando:

$$f''\left(\frac{1}{2}^-\right) = \lim_{h\to 0^-} \frac{2\left(h+\frac{1}{2}\right)-1}{h} = 2 \ne f''\left(\frac{1}{2}^+\right) = \lim_{h\to 0^+} \frac{-2\left(h+\frac{1}{2}\right)+2-1}{h} = -2$$

149. El coste total de producción de *q* unidades de cierto producto viene dado, en euros, por la expresión:

$$C(q) = 2q^2 + 5q + 10$$

Una empresa produce en la actualidad un total de 50 unidades y estudia la posibilidad de aumentar la producción a 50,5 unidades. Estima, utilizando la aproximación lineal, cuál será la diferencia de costes si se producen 50,5 unidades en lugar de 50.

$L(q+0{,}5) = C(q) + 0{,}5C'(q)$

$L(50{,}5) = 5260 + 102{,}5$

Luego la diferencia de costes es de 102,5 €.

150. Sea *f* una función definida en $\mathbb{R}$ que pasa por el origen, y que admite segunda derivada y que verifica:

$$\left[f'(x)\right]^2 + f(x)f''(x) = 2$$

Calcula la ecuación de la tangente a la gráfica de *f* en el punto $(3,1)$.

Se sabe que $2 = \left[f'(x)\right]^2 + f(x)f''(x) = \left(f(x)f'(x)\right)'$.

Luego $2 = \left(f(x)f'(x)\right)'$ y una función cuya derivada es 2 tiene la forma $2x + a$, así pues $f(x)f'(x) = 2x + a$. Como $f(0) = 0$, debe ser a = 0 y se tiene $f(3)f'(3) = 6 \Rightarrow 1 \cdot f'(3) = 6 \Rightarrow f'(3) = 6$.

Así pues, la ecuación de la recta tangente en $(3,1)$ es $y = 6x - 17$.

151. Supón que *f* y *g* son funciones derivables en todo $\mathbb{R}$ y tales que:

i) $f(0) = 1$ **y** $g(0) = 0$

ii) $f'(x) = -g(x)$ **y** $g'(x) = f(x)$

a) Sea $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$. Calcula $h'(x)$ y utiliza el resultado obtenido para probar que $f^2(x) + g^2(x) = 1$ para todo *x*.

b) Supón que *F* y *G* son otro par de funciones derivables que verifican i), ii) y considera la función:

$$k(x) = \left[f(x) - F(x)\right]^2 + \left[g(x) - G(x)\right]^2$$

Calcula $k'(x)$ y utiliza el resultado obtenido para decidir qué relación existe entre *f* y *F* y entre *g* y *G*.

c) ¿Conoces algún par de funciones *f* y *g* que verifiquen i), ii)? ¿Puede haber otras?

a) $h'(x) = \left(f^2(x) + g^2(x)\right)' = 2f'(x)f(x) + 2g'(x)g(x) = -2g(x)f(x) + 2f(x)g(x) = 0$

Luego $h(x)$ es constante y como $h(0) = f(0) + g(0) = 1 + 0 = 1$, entonces $h(x) = 1$ para todo x y, por tanto, $f^2(x) + g^2(x) = 1$ para todo *x*.

b) $k'(x) = \left(\left[f(x) - F(x)\right]^2 + \left[g(x) - G(x)\right]^2\right)' = 2\left(f'(x) - F'(x)\right)\left(f(x) - F(x)\right) + 2\left(g'(x) - G'(x)\right)\left(g(x) - G(x)\right) =$

$= 2\left(-g(x) + G(x)\right)\left(f(x) - F(x)\right) + 2\left(f(x) - F(x)\right)\left(g(x) - G(x)\right) = 0$

Luego *k* es constante y como $k(0) = \left(f(0) - F(0)\right) + \left(g(0) - G(0)\right) = 0$, entonces $k(x) = 0$ para todo *x*, y como *k* es la suma de dos cuadrados, deben ser $f(x) - F(x) = 0$ y $g(x) - G(x) = 0$. Luego $f(x) = F(x)$ y $g(x) = G(x)$ para todo *x*.

c) Sí, $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$ satisfacen las condiciones, y por b) son las únicas.

152. Una partícula que se mueve en el plano *XY* baja deslizándose a lo largo de la curva de ecuación $y=\sqrt{x^2+9}$. En el punto $P(4,5)$ abandona la curva y sigue por la recta tangente a dicha curva.

a) Calcula el punto *R* del eje *Y* por el que pasará la partícula.

b) ¿Existe algún otro punto *Q* de la curva tal que la recta tangente a la curva en el punto *Q* corte al eje *Y* en el mismo punto *R* anterior?

a) Como $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$, $y'(4)=\dfrac{4}{5}$. Recta tangente en $P(4,5)$: $y-5=\dfrac{4}{5}(x-4)\Rightarrow y=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{9}{5}$

Punto de corte de la recta tangente con el eje *Y*: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{9}{5}\Rightarrow R\left(0,\dfrac{9}{5}\right)$.

b) Recta tangente a la curva $y=\sqrt{x^2+9}$ en el punto $Q\left(a,\sqrt{a^2+9}\right)$:

$$y-\sqrt{a^2+9}=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+9}}\right)(x-a)\Rightarrow y=\frac{a}{\sqrt{a^2+9}}x+\frac{9}{\sqrt{a^2+9}}$$

Si queremos que pase por $R\left(0,\dfrac{9}{5}\right)$, entonces $\dfrac{9}{5}=\dfrac{9}{\sqrt{a^2+9}}\Rightarrow a=4$ o $a=-4$.

Luego si $a=4$, $Q(4,5)$ y si $a=-4$, $Q(-4,5)$. Por tanto, la recta tangente a la curva en $Q(-4,5)$ también corta al eje *Y* en el punto $R\left(0,\dfrac{9}{5}\right)$.

153. Define a trozos la función:

$$f(x)=\min\left(\frac{x^2}{2},\frac{1}{1+x^2}\right)$$

y calcula $(f\circ f')(2)$.

Resolvemos la inecuación $\dfrac{x^2}{2}\le\dfrac{1}{1+x^2}$, como $1+x^2$ es siempre positiva, se obtiene la inecuación equivalente:

$$x^2\left(1+x^2\right)\le 2\Rightarrow x^4+x^2-2\le 0$$

Resolviendo la ecuación bicuadrada $x^4+x^2-2=0$ se obtienen las soluciones $x=-1$ y $x=1$. Observando qué ocurre en los intervalos $(-\infty,-1)$, $[-1,1]$ y $(1,+\infty)$ se tiene que:

$\dfrac{x^2}{2}\le\dfrac{1}{1+x^2}$ si $x\in[-1,1]$ $\qquad$ $\dfrac{x^2}{2}>\dfrac{1}{1+x^2}$ si $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

La función es $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2} & \text{si } x\in[-1,1]\\[2mm] \dfrac{1}{1+x^2} & \text{si } x\notin[-1,1]\end{cases}$

Como $f'(2)=\dfrac{-2\cdot 2}{\left(1+2^2\right)^2}=-\dfrac{4}{25}$, entonces $(f\circ f')(2)=f\left(f'(2)\right)=f\left(-\dfrac{4}{25}\right)=\dfrac{\left(-\dfrac{4}{25}\right)^2}{2}=\dfrac{8}{625}$

Para profundizar

154. Halla la función f que cumple la ecuación:

$$\left(1+x^2\right)f''(x)+2xf'(x)=2$$

para todo *x*, sabiendo que $f(0)=f'(0)=0$.

De la ecuación anterior se deduce que: $(1+x^2)f''(x)+2xf'(x)=((1+x^2)f'(x))'=2 \Rightarrow (1+x^2)f'(x)=2x+a$.

Por tanto, $f'(x)=\dfrac{2x+a}{1+x^2}$, pero como $f'(0)=0$, $a=0$.

Ahora debemos encontrar una función cuya derivada sea $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ y esta es $f(x)=\ln(1+x^2)+b$.

Como $f(0)=0$, $b=0$ y la función buscada es $f(x)=\ln(1+x^2)$.

155. Los siguientes límites se pueden escribir como el valor de una cierta función en un punto. Aplicando esta idea, calcúlalos.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{20}-1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

d) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{x-\pi}$

a) Tomando $f(x)=x^{20}$, $f'(1)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{20}-1}{x}=20$.

b) Sea $f(x)=\cos x-\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos\left(h+\frac{\pi}{2}\right)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(h+\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

c) Llamando $f(x)=\operatorname{tg}x$ y $h=x-\dfrac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\left(h+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}=f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}=2$.

d) Llamando $f(x)=\cos x$ y $h=x-\pi$, $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{x-\pi}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(h+\pi)-\cos\pi}{h}=f'(\pi)=-\operatorname{sen}(\pi)=0$.

156. a) Encuentra dos números reales *a* y *b* para los que: $\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$

b) Sea $f:\mathbb{R}-\{-1,1\}\to\mathbb{R}$ definida mediante la fórmula: $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$

Obtén la fórmula para la derivada *n*-ésima de *f*.

a) Debe ser $2x=ax+a+bx-b$ para todo *x*. En particular, si $x=0$, se tiene $0=a-b$ y si $x=1$, $2=2a$. Luego los números buscados son $a=1$ y $b=1$.

b) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$. Como si $g(x)=\dfrac{1}{x}$, entonces $g^{n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, se tiene:

$$f^{n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

157. Considera una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$ **para cualesquiera** x_1,x_2.

2. $f(0)\neq 0$

3. $f'(0)=1$

a) Demuestra que $f(0)=1$. Indicación: Toma $x_1=x_2=0$ en 1.

b) Demuestra que $f(x)\neq 0$ para todo *x*. Indicación: Toma $x_2=-x_1$ en 1.

c) Utiliza la definición de derivada para probar que $f'(x)=f(x)$ para todo número real *x*.

d) Sea *g* otra función que satisface las tres condiciones y considera $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Demuestra que *k* es derivable en todo $\mathbb{R}$, y obtén $k'(x)$. ¿Qué relación entre *f* y *g*?

e) ¿Conoces alguna función f que satisfaga las tres condiciones? ¿Puede haber más de una?

a) Llamando $a=f(0)=f(0+0)=f(0)f(0)=a^2$. Por tanto, $a=a^2$. Luego $a=0$ o $a=1$ y como $f(0)\neq 0$ se concluye que $f(0)=1$.

b) Como $f(0)=f(x+(-x))=f(x)f(-x)=1$, entonces $f(x)$ no puede ser cero.

c) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=f(x)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-1}{h}=f(x)f'(0)=f(x)1=f(x)$.

d) $k'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k(x+h)-k(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)f(h)}{g(x)g(h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)f(h)-f(x)g(h)}{g(x)g(h)h}=\dfrac{f(x)}{g(x)}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-g(h)}{g(h)h}=$

$=\dfrac{f(x)}{g(x)}0=0$.

Luego $k(x)$ es una función constante ya que su derivada se anula para todo *x*.

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=a\Rightarrow f(x)=ag(x)$. Pero como $f(0)=1$ y $g(0)=1$, entonces a = 1 y $f(x)=g(x)$.

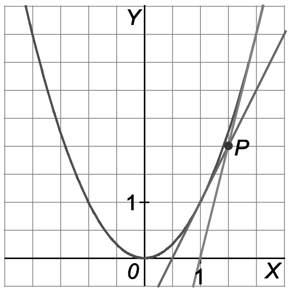
e) La función $f(x)=e^x$ satisface las tres condiciones y por d) es la única.

Autoevaluación

Comprueba qué has aprendido

1. **Calcula las ecuaciones de las tangentes a la parábola $y = x^2$ trazadas desde el punto $P\left(\frac{3}{2},2\right)$.**

Llamemos *a* a la abscisa del punto de tangencia como se muestra en la figura (habrá dos tangentes desde *P*).



La pendiente de *r* es 2*a* y también es $\dfrac{a^2-2}{a-\frac{3}{2}}$.

Así pues, $2a = \dfrac{a^2-2}{a-\frac{3}{2}} \Rightarrow 2a^2 - 3a = a^2 - 2 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1$ o $a = 2$.

Los puntos de tangencia son, pues $(1,1)$ y $(2,4)$ por lo que las ecuaciones de las tangentes pedidas son:

$y-1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x-1 \quad y-4 = 4(x-2) \Rightarrow y = 4x-4$

2. ***Como ya sabes, si *f* es continua en *a*, y existe $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$, dicho número coincide con $f'(a^-)$ (derivada en *a* por la izquierda). Análogamente por la derecha. Aplicando ese resultado, calcula los números *a* y *b* para que $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \le 1 \\ b + \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea derivable en $\mathbb{R}$.**

El único punto donde podría no ser derivable es en $x = 1$. Para que lo sea, *f* debe ser continua en $x = 1$, es decir, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, por lo que $a = b$.

Por otra parte, $f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$, así que, $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = 2a$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = 1$.

Entonces, si $a = b$ y $2a = 1$, *f* es derivable en $x = 1$, por tanto, si $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$ se verifica que *f* es derivable en $\mathbb{R}$.

3. **Calcula la derivada de las siguientes funciones (no te preocupes por el dominio de *f* o de *f* ').**

a) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\cos x}{x^2}\right)$ **b)** $f(x) = \operatorname{sen}^3\left[(x^3+1)\right]^3$ **c)** $f(x) = \sqrt{1 + e^{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}}$

a) $f'(x) = \left[\cos\left(\dfrac{\cos x}{x^2}\right)\right]\dfrac{-x^2\operatorname{sen} x - 2x\cos x}{x^4} = -\left(\cos\left(\dfrac{\cos x}{x^2}\right)\right)\dfrac{x\operatorname{sen} x + 2\cos x}{x^3}$

b) $f'(x) = 3\operatorname{sen}^2\left[(x^3+1)\right]^3 \cos\left[(x^3+1)\right]^3 3(x^3+1)^2 3x^2$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+e^{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}}} e^{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

4. **Calcula la derivada en $x = 0$ de la inversa de la función $f(x) = x^3 + x - 30$.**

Llamando $g(x)$ a la inversa de $f(x)$ tenemos que $g(f(x)) = x$, así que $g'(f(x))f'(x) = 1$. Nos piden $g'(0)$.

Si $f(x) = 0$, $x^3 + x - 30 = 0$, $x = 3$, así pues $g'(0)\cdot f'(3) = 1$, por lo que $g'(0) = \dfrac{1}{f'(3)}$ siendo $f'(x) = 3x^2 + 1$, es decir, $f'(3) = 28$, con lo que $g'(0) = \dfrac{1}{28}$.

5. Calcula la derivada por la derecha en $x = 1$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} & \text{si } x < 1 \\ \text{arctg}(1 + \ln x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

¿Diferiría mucho de la derivada en $x = 1$ de la función $g(x) = \text{arctg}(1 + \ln x)$?

$f(x)$ es continua en $x = 1$.

Derivando la función se obtiene: $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{1 + (1 + \ln x)^2} \cdot \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Por tanto $f'(1^+) = \dfrac{1}{1 + (1 + \ln 1)^2} \cdot \dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{2}$.

Se obtiene el mismo resultado calculando $g'(1) = \dfrac{1}{2}$ puesto que $f(x) = g(x)$ si $x \geq 1$.

6. Calcula la ecuación de la tangente a la elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ en los puntos de ordenadas $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

Realiza los cálculos sin obtener *y* como función de *x*.

Derivando implícitamente, tenemos que $\dfrac{2x}{9} + \dfrac{2yy'}{4} = 0$, por lo que $y' = -\dfrac{4x}{9y}$.

Si $y = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$, tenemos que $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{4 \cdot 5}{4 \cdot 9} = 1$, con lo que $\dfrac{x^2}{9} = 1 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{4}{9}$, luego $x = 2$ o $x = -2$.

Si $x = 2$, $y' = -\dfrac{8}{6\sqrt{5}} = -\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$ y la recta pedida será $y - \dfrac{2\sqrt{5}}{3} = \dfrac{-4}{3\sqrt{5}}(x - 2)$.

Si $x = -2$, $y' = \dfrac{4}{3\sqrt{5}}$ y la recta pedida será $y - \dfrac{2\sqrt{5}}{3} = \dfrac{4}{3\sqrt{5}}(x + 2)$.

7. Obtén la función *f* para la que $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 5 + \cos \pi x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y $f(0) = 2$.

Si $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 5 + \cos \pi x & \text{si } x > 1 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + x + a & \text{si } x \leq 1 \\ 5x + \dfrac{1}{\pi}\text{sen}\, \pi x + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Como $f(0) = 2$, tenemos que $0^3 + 0 + a = 2$, $a = 2$ y si *f* es derivable en $x = 1$, debe ser continua, por lo que:

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$, es decir, $2 + a = 5 + \dfrac{1}{\pi}\text{sen}\, \pi + b$, con lo que $4 = 5 + b$, $b = -1$, así que:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 5x + \dfrac{1}{\pi}\text{sen}\, \pi x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

8. Calcula las derivadas laterales en $x = 0$ de la función $f(x) = \sqrt{x^2(1 + x)}$. ¿Existe $f'(0)$?

$f(x) = |x|\sqrt{1 + x}$

$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{|h|\sqrt{1 + h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \dfrac{h\sqrt{1 + h}}{h} = 1$

$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{|h|\sqrt{1 + h}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \dfrac{-h\sqrt{1 + h}}{h} = -1$

Por tanto, *f* no es derivable en $x = 0$.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Sea f una función definida en $\mathbb{R}$, que admite segunda derivada.

A. Si $f(0) > f(1)$, entonces $f'(0) \geq f'(1)$.

B. Si $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$, entonces $g'(0) > f'(0)$.

C. Para cualquier número real *x*, se verifica que:

$$(f \cdot f')'(x) - f(x)f''(x) \geq 0$$

D. Existen números *a* para los que $\lim_{x\to a^-} f'(x) \neq \lim_{x\to a^+} f'(x)$.

La respuesta correcta es C. $(f \cdot f')'(x) = f'(x)f'(x) + f(x)f''(x)$, por lo que $(f \cdot f')'(x) - f(x)f''(x) = (f'(x))^2 \geq 0$.

2. Sea $g(x) = 2x - 6$ y *f* una función tal que $f'(x) = e^{x^2}$. La tangente a la curva $y = (f \circ g)(x)$ en el punto de abscisa 3 verifica que:

A. Es horizontal.

B. Tiene pendiente negativa.

C. Su pendiente es mayor que $f'(1)$.

D. Es paralela a la gráfica de $y = g(x)$.

La respuesta correcta es D. $(f \circ g)'(3) = f'(g(3))g'(3)$. Como $g(3) = 0$ y $g'(3) = 2$, es $(f \circ g)'(3) = f'(0) \cdot 2 = 2$.

3. Considera la función $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$.

A. Presenta un punto con tangente horizontal.

B. Su derivada siempre es positiva.

C. No es derivable en los puntos de corte con el eje horizontal.

D. $|f'(x)| \geq 1$ en los puntos en los que es derivable.

La respuesta correcta es D. Como $|\cos x| \leq 1$ para todo valor de *x*, entonces $|f'(x)| = \dfrac{1}{|\cos x|} \geq 1$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable y tal que su gráfica es simétrica respecto de la recta $x = 2$.

A. $\forall x, f(2+x) = f(2-x)$

B. $\forall x, f(x) = f(4-x)$

C. $\forall x, f'(2+x) = f'(2x)$

D. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

Son verdaderas la A y la D. Si la gráfica es simétrica respecto de la recta $x = 2$, debe ocurrir que $f(2+x) = f(2-x)$ sea cual fuere *x*.

Observando ahora que los números *x* y $4 - x$ equidistan de 2 pues $|2-x| = |4-x-2|$ concluimos que B también es verdadera.

La afirmación C es falsa como lo prueba, por ejemplo, la función $f(x) = (x-2)^2$ y $x = 0$.

5. **Para todo x mayor que 1 se verifica:**

A. Si $f(x)=e^{x^2} \Rightarrow f''(x)=e^{x^2}$

B. Si $f(x)=e^{x^2} \Rightarrow f''(x)=2xe^{x^2}$

C. Si $f(x)=\operatorname{sen} x \Rightarrow f''(x)=\operatorname{sen}(x+\pi)$

D. Si $f(x)=\cos x \Rightarrow f''(x)=\cos(x+\pi)$

C es verdadera ya que si $f(x)=\operatorname{sen} x$, $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen}(x+\pi)=-\operatorname{sen} x$.

D también es verdadera ya que $f(x)=\cos x$ nos lleva a $f'(x)=-\operatorname{sen} x$, $f''(x)=-\cos x$ y $\cos(x+\pi)=-\cos x$.

A y B son falsas porque $f''(x)=(2+4x^2)e^{x^2}$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable.**

1. La tangente a la curva $y=f^2(x)$ en $x=3$ es horizontal.

2. La curva $y=f(x)$ corta al eje de abscisas en el punto $x=3$.

A. 1 $\Leftrightarrow$ 2

B. 1 $\Rightarrow$ 2 pero 2 $\not\Rightarrow$ 1

C. 2 $\Rightarrow$ 1 pero 1 $\not\Rightarrow$ 2.

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

La relación correcta es la C.

$y'=2f(x)f'(x)$, por lo que si se da 2 es $f(3)=0$, con lo que $y'(3)=0$ y se da 1. Así que 2 $\Rightarrow$ 1 pero 1 $\not\Rightarrow$ 2, como prueba, por ejemplo, $y=\left((x-3)^2+1\right)^2$, con lo que $f(x)=(x-3)^2+1$ verifica pues $y'=2\left((x-3)^2+1\right)2(x-3)$, es decir, $y'(3)=0$ pero $f(x)=(x-3)^2+1$ no corta al eje horizontal, es decir, no se verifica 2.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Sea $f(x)=xg(x)+a\operatorname{sen} x+be^x$ donde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función derivable. Para calcular la ecuación de la tangente a la curva $y=f(x)$ en $x=0$ nos dan los siguientes datos:**

1. La curva $y=g(x)$ corta al eje vertical en $(0,4)$.

2. Las curvas $y=f(x)$ y $y=g(x)$ se cortan en $x=1$.

3. $y=f(x)$ tiene tangente paralela a la bisectriz del primer cuadrante en $(0,4)$.

4. El punto $(0,a+b)$ es el máximo de la curva $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse el dato 4.

La ecuación de la tangente pedida es $y-f(0)=f'(0)x$, $f(0)=b$.

$f'(x)=g(x)+xg'(x)+a\cos x+be^x$, por lo que $f'(0)=g(0)+a+b$ con el dato 1, se obtiene $g(0)=4$.

El dato 2 nos dice que $f(1)=g(1)$, o sea, $g(1)+a\operatorname{sen}1+be=g(1)$, así que $a\operatorname{sen}1+be=0$, que junto con el dato 4 nos permite calcular a y b que el máximo de la curva $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ se alcanza en $x=0$ y vale 1, por lo que según el dato 4, $a+b=1$, que junto a la igualdad anterior, dada por el dato 2, nos permite calcular a y b y hemos obtenido la ecuación de la tangente a $y=f(x)$ sin tener que utilizar el dato 3. Por tanto, la respuesta correcta es C.

3 Aplicaciones de las derivadas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 a 4. Ejercicios resueltos.

5. *Sea $f(x)=(x+1)^3(x-2)^2+3$. Demuestra que la ecuación $f'(x)=0$ tiene alguna solución en el intervalo $(-1, 2)$.

La función *f* es continua y derivable ya que es una función polinómica. Además, $f(-1)=f(2)$, por tanto, puede aplicarse el teorema de Rolle que nos asegura que $f'(x)=0$ tiene una solución en el intervalo $(-1, 2)$.

6. Aplicando el teorema de Rolle, justifica que la gráfica de la función $f(x)=3x^5+7x+1$ no puede cortar 2 veces al eje horizontal.

La función *f* es continua por ser polinómica. Además $f(-2)=-109$ y $f(0)=1$, así pues, el teorema de Bolzano nos asegura que *f* corta al menos una vez al eje horizontal en un punto *c* perteneciente al intervalo $(-2,0)$. Si cortara al eje horizontal en otro punto *d*, se tendría que $f(c)=0$ y $f(d)=0$ y, por tanto, se podría aplicar el teorema de Rolle en el intervalo cerrado de extremos *c* y *d* y resultaría que la derivada de *f* se anularía al menos una vez. Sin embargo, la derivada de *f* es $f'(x)=15x^4+7$ que no se anula nunca porque siempre es positiva. Así pues, la suposición que se hizo de que cortaba más veces al eje horizontal es falsa.

7. Demuestra que la ecuación $2x^5-30x+c=0$ no puede tener más de una solución en el intervalo $[-1,1]$ sea cual fuere el número *c*.

Definimos la función polinómica $f(x)=2x^5-30x+c$. Si la ecuación $f(x)=0$ tuviese dos soluciones en el intervalo $[-1,1]$, entonces, por el teorema de Rolle, sabríamos que existe un *c* en $(-1, 1)$ con $f'(c)=0$. Pero $f'(x)=10x^4-30$ no se hace cero en el intervalo $(-1, 1)$, por lo que la premisa es falsa: $f(x)$ no puede cortar más de una vez al eje *X* en el intervalo $[-1,1]$.

Nota: las soluciones de $10x^4-30=0$ son $x=+\sqrt[4]{3}>1$ y $x=+\sqrt[4]{3}<-1$.

8. Sea $f(x)=2+\sqrt[3]{x^2}$. Comprueba que *f* es continua en $\mathbb{R}$, $f(-8)=f(8)$ y en cambio $f'(x)$ no se anula nunca. ¿Contradice este hecho el teorema de Rolle?

Trabajando en el intervalo cerrado $[-8,8]$, se ve que:

$f(-8)=2+\sqrt[3]{(-8)^2}=2+\sqrt[3]{64}=2+4=6$, $f(8)=2+\sqrt[3]{8^2}=2+\sqrt[3]{64}=2+4=6$

Su derivada, $f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, nunca se anula.

La clave está en darse cuenta de que la derivada no está definida para $x=0$ y, por tanto, *f* no es derivable en el intervalo abierto $(-8,8)$ y no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle.

9. Para la siguiente función, demuestra que existe un $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

$$f(x) = (x-2)e^{\sqrt{x^2-4x+5}}\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}x\right)$$

La función f es una función continua en el intervalo $[1,3]$ porque es producto de funciones continuas en ese intervalo. También es derivable en $(1,3)$ porque es producto de funciones derivables en ese intervalo.

Además $f(1) = -e^{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}\right) = e^{\sqrt{2}}\text{sen}\frac{\pi}{5}$ y $f(3) = e^{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{2}\right) = e^{\sqrt{2}}\text{sen}\frac{\pi}{5}$. Luego $f(1) = f(3)$.

Aplicando el teorema de Rolle se tiene que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

10. Ejercicio resuelto.

11. Sea $f(x) = \begin{cases} 4x^2+4x & \text{si } x \le 1 \\ -4x^3+12x^2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ x^3-3x^2+20 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$, comprueba que:

a) Verifica el teorema del valor medio en $[0,4]$. **b)** Halla $c \in (0,4)$ cuya existencia asegura el teorema.

a) f es continua en $[0,4]$ pues está definida por polinomios y en los únicos puntos problemáticos $x = 1$ y $x = 2$ se cumple: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 8 = f(1)$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 16 = f(2)$

Por otra parte, f es derivable en $(0,4)$ pues: $f'(x) = \begin{cases} 8x+4 & \text{si } x \le 1 \\ -12x^2+24x & \text{si } 1 < x < 2 \\ 3x^2-6x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = 12$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = 0$

Por tanto, habrá al menos un valor c tal que $f'(c) = \frac{f(4)-f(0)}{4} = \frac{36-0}{4} = 9$.

b) Si $0 < c < 1$: $8c+4 = 9 \Rightarrow c = \frac{5}{8}$

Si $1 < c < 2$: $-12c^2+24c = 9 \Rightarrow -12c^2+24c-9 = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}, c = \frac{3}{2}$. Pero $\frac{1}{2}$ no está entre 1 y 2.

Si $2 < c < 4$: $3c^2-6c = 9 \Rightarrow 3c^2-6c-9 = 0 \Rightarrow c = -1, c = 3$. El valor -1 no pertenece al intervalo $(0, 4)$.

Luego son válidos los valores $\frac{5}{8}, \frac{3}{2}$ y 3, que pertenecen a $(0,4)$ y verifican el teorema.

12. Comprueba que la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,2) \\ 3 & \text{si } x \in (2,3) \end{cases}$ verifica que $f'(x) = 0$ en todos los puntos donde está definida f y, sin embargo, f obviamente, no es constante. ¿Contradice este ejemplo el teorema del valor medio?

La afirmación de que *f* es constante sí se cumple en el intervalo $(0,2)$ y también en el intervalo $(2,3)$ pero no en la unión de ambos ($x = 2$ no pertenece a dicha unión, existe una discontinuidad).

No hay contradicción porque el teorema del valor medio hace referencia a un intervalo.

13. Ejercicio resuelto.

14. Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,3x}{\text{sen}\,2x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$ **e)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\text{sen}\,x}$

a) Como $\lim\limits_{x\to 0}\text{sen}\,3x=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\text{sen}\,2x=0$, se puede aplicar L´Hôpital para calcular el límite pedido:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,3x}{\text{sen}\,2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{2\cos 2x}=\frac{3\cos 0}{2\cos 0}=\frac{3}{2}.$$

b) Como $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}=+\infty$, se puede aplicar L´Hôpital para calcular el límite pedido:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

c) Como $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-e^{-x}\right)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)=0$, se puede aplicar L´Hôpital para calcular el límite pedido:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}(1+x)\left(e^x+e^{-x}\right)=2.$$

d) Para calcular $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ hay que transformar esa resta en un cociente: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. Como $\lim\limits_{x\to 1}(x-1-\ln x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 1}\left((x-1)\ln x\right)=0$. Se puede aplicar L´Hôpital para calcular el límite pedido:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x\ln x+x-1}\right),$$ y de nuevo se puede aplicar L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x\ln x+x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x+1+1}\right)=\dfrac{1}{2}.$

e) Es una indeterminación del tipo ∞^0. Escribiendo $x^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$, se halla $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$, así que $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^0=1.$

f) Este límite da lugar a una indeterminación del tipo 0^0, por tanto, debemos transformar un poco su expresión para poder aplicar L'Hôpital. Si $y=x^{\text{sen}\,x}$, entonces $\ln y=\ln x^{\text{sen}\,x}=\text{sen}\,x\cdot\ln x$. Se calcula el límite de esta última expresión: $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y=\lim\limits_{x\to 0^+}\text{sen}\,x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{\text{sen}\,x}}$, y ya se está en condiciones de aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\text{sen}\,x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\text{sen}\,x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\text{sen}^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\text{sen}^2 x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\,\text{sen}\,x\cos x}{\cos x-x\,\text{sen}\,x}=\frac{0}{1}=0$$

Se ha obtenido que $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y=0$ siendo $y=x^{\text{sen}\,x}$, así pues $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x^{\text{sen}\,x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\text{sen}\,x}=1.$

15. Calcula $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x}$ para cualquier $k > 0$.

Para calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x}$ puede aplicarse L'Hôpital, ya que numerador y denominador tienden a más infinito (recuérdese que el exponente k es positivo), y se repite el proceso hasta que el numerador sea un número (el denominador no se altera porque la derivada de $y = e^x$ es ella misma):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx^{k-1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{k(k-1)x^{k-2}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}{e^x} = 0$$

16. Calcula $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{\left(e^x + x\right)}$.

Puede escribirse el límite buscado como $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{(e^x + x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$ que da lugar a una indeterminación del tipo $(+\infty)^0$. Si llamamos y a la última expresión, se observa que:

$y = \left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \ln\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln\left(e^x + x\right) = \frac{\ln\left(e^x + x\right)}{x}$, y ya se puede calcular el límite de esta última expresión aplicando L´Hôpital dos veces:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x + x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x + 1}{e^x + x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1$$

Así pues, se ha obtenido que $\lim_{x\to+\infty} \ln y = 1$, por tanto: $\lim_{x\to+\infty} \ln\sqrt[x]{(e^x + x)} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{(e^x + x)} = e$

17. Ejercicio interactivo.

18 y 19. Ejercicios resueltos.

20. Sea f derivable en $x = x_0$. Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si $f'(x_o) \geq 0$, entonces f es creciente en x_0.

b) Si f es decreciente en x_0, entonces $f'(x_0) < 0$.

c) Si $f'(x_0) = 0$, entonces f presenta un extremo relativo en x_0.

a) Es falsa, ya que si $f'(x_0) = 0$, hay casos en los que la función puede presentar un extremo relativo en x_0 y, entonces, ni crece ni decrece. Por ejemplo, $f(x) = (x-3)^2$ cumple que $f'(3) = 0$ y no es creciente en $x = 3$ ya que es un mínimo. Si la desigualdad fuera estricta sí sería cierta la afirmación.

b) Es falsa ya que x_0 podría ser un punto de inflexión con tangente horizontal y la función ser decreciente en él. Por ejemplo, la función $f(x) = -x^3$ es siempre decreciente, y en $x = 0$ su derivada vale cero.

c) Es falsa; $f'(x_0) = 0$ solo demuestra que en dicho punto la tangente es horizontal. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ cumple que $f'(0) = 0$ y en $x = 0$ no hay máximo ni mínimo relativo ya que se trata de un punto de inflexión, eso sí, con tangente horizontal.

21. Señala las abscisas de todos los puntos donde es posible que la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ presente extremos relativos.

Las abscisas de los posibles extremos relativos son los valores de x que anulan la derivada de $f(x)$: $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1)$. Se resuelve ahora la ecuación $f'(x) = 0$:

$15x^2(x^2 - 1) = 0$ si $x = 0$, $x = 1$, o $x = -1$, que son las abscisas de los posibles extremos relativos.

22. Considera la función $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x+3}$.

Encuentra sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos, si existen.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$

Su derivada, $f'(x) = \dfrac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}$ se anula para $x = -2$ y para $x = -4$. Se estudia el signo de la derivada en los intervalos definidos por estos dos valores y el valor que no pertenece al dominio:

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, -3)$	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
Signo de f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	$-3 \notin D(f)$	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función es creciente en $(-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$.

La función es decreciente en $(-4, -3) \cup (-3, -2)$.

Tiene un máximo relativo en el punto $A(-4, f(-4)) = A(-4, -4)$.

Tiene un mínimo relativo en el punto $A(-2, f(-2)) = A(-2, 0)$.

23. Obtén, en cada caso, los extremos relativos de las funciones:

a) $f'(x)=(x-1)(x-3)(x-5)$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{1+|x-1|}+\dfrac{1}{1+|x-4|}$

a) La derivada se anula para $x=1$, $x=3$ y $x=5$, que son las abscisas de los puntos susceptibles de ser máximos o mínimos relativos. Se estudia el signo de la derivada en los intervalos definidos por dichos valores:

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,5)$	5	$(5,+\infty)$
Signo de f'	–	0	+	0	–	0	+
f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

b) Como intervienen valores absolutos, se debe definir la función a trozos, limitados por los valores que anulan los valores absolutos: $x=1$ y $x=4$. La función es:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{5-x} & \text{si } x<1\\[2mm] \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{5-x} & \text{si } 1\le x\le 4\\[2mm] \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-3} & \text{si } x>4\end{cases}$$

Dentro de cada tramo la función es continua, pues es suma de cocientes de funciones continuas (los denominadores nunca se hacen cero). En los puntos de cambio los límites laterales coinciden: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{5}{4}$ y $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\dfrac{5}{4}$. Así pues, la función f es continua en $\mathbb{R}$.

Su derivada, salvo en los puntos $x=1$ y $x=4$, es: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(2-x)^2}+\dfrac{1}{(5-x)^2} & \text{si } x<1\\[2mm] -\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(5-x)^2} & \text{si } 1<x<4\\[2mm] -\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x-3)^2} & \text{si } x>4\end{cases}$

La derivada no se anula ni en el primer tramo (siempre es positiva) ni en el tercer tramo (siempre es negativa), así que los puntos con tangente horizontal deben buscarse en el tramo intermedio:

$$-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(5-x)^2}=0\Rightarrow\frac{-(5-x)^2+x^2}{x^2(5-x)^2}=0\Rightarrow -25+10x-x^2+x^2=0\Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

Falta estudiar qué ocurre con la derivada en los puntos de abscisa $x=1$ y $x=4$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=1+\dfrac{1}{16}$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=-1+\dfrac{1}{16}$ por lo que f no es derivable en $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 4^-} f'(x)=-\dfrac{1}{16}+1$ y $\lim\limits_{x\to 4^+} f'(x)=-\dfrac{1}{16}-1$ por lo que f no es derivable en $x=4$.

x	$(-\infty,1)$	1	$\left(1,\frac{5}{2}\right)$	$\frac{5}{2}$	$\left(\frac{5}{2},4\right)$	4	$(4,+\infty)$
Signo de f'	+	No existe $f'(1)$	–	0	+	No existe $f'(4)$	–
f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

Por tanto, f presenta en $A\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{4}{5}\right)$ un mínimo relativo de tangente horizontal y en los puntos $B\left(1,\dfrac{5}{4}\right)$ y $C\left(4,\dfrac{5}{4}\right)$ f presenta máximos relativos no derivables.

24 a 26. Ejercicios resueltos.

27. Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 m^3. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.

Se determinan las variables, que son el radio de la base, *r*, y la altura del cilindro, *h*.

Se relacionan las variables: el volumen ha de ser 125 m^3, así que $125 = \pi r^2 h$ y $h = \dfrac{125}{\pi r^2}$.

La función que se quiere minimizar es la superficie del depósito (recordemos que no tiene tapa, solo base): $S = 2\pi rh + \pi r^2 \Rightarrow S(r) = 2\pi r \dfrac{125}{\pi r^2} + \pi r^2 = \dfrac{250}{r} + \pi r^2$

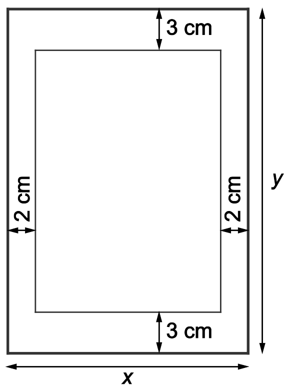
La variable r se mueve en el intervalo $(0,+\infty)$.

Se busca el mínimo de $S(r) = \dfrac{250}{r} + \pi r^2$ en el intervalo $(0,+\infty)$.

La derivada, $S'(r) = \dfrac{-250}{r^2} + 2\pi r$, se anula si $2\pi r = \dfrac{250}{r^2}$, es decir, si $r = \sqrt[3]{\dfrac{250}{2\pi}} \simeq 3,41$.

Como $\lim\limits_{r \to 0^+} S(r) = \lim\limits_{r \to 0^+} \dfrac{250}{r} + \pi r^2 = +\infty$ y también $\lim\limits_{r \to +\infty} S(r) = \lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{250}{r} + \pi r^2 = +\infty$, concluimos que la mínima superficie se obtiene con un radio de $r = 3,41$ m y una altura $\left(h = \dfrac{125}{\pi r^2}\right)$ del mismo valor, $h = 3,41$ m.

28. Queremos escribir un texto de 96 cm^2, tal que deje 2 cm en cada margen lateral de la hoja en la que está escrito, así como 3 cm arriba y abajo. Calcula las dimensiones de la hoja más pequeña posible.



Se determinan las variables, que son las dimensiones de la hoja:

x los cm que mide la base e *y* los cm que mide la altura.

Se relacionan las variables:

el texto escrito debe ser 96 cm^2, así pues $(x-4)(y-6) = 96$, y operando se obtiene:

$(x-4)(y-6) = 96 \Rightarrow xy - 6x - 4y + 24 = 96 \Rightarrow y(x-4) = 72 + 6x \Rightarrow y = \dfrac{72+6x}{x-4}$.

La función que se quiere minimizar es la superficie de la hoja:

$S = xy \Rightarrow S(x) = x\dfrac{72+6x}{x-4} = \dfrac{72x+6x^2}{x-4}$.

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable *x*. En este caso, *x* debe estar en el intervalo abierto $(4,+\infty)$.

Se busca el mínimo de $S(x) = \dfrac{72x+6x^2}{x-4}$ en $(4,+\infty)$.

La derivada $S'(x) = \dfrac{(72+12x)(x-4)-(72x+6x^2)}{(x-4)^2} = \dfrac{6x^2-48x-288}{(x-4)^2} = \dfrac{6(x-12)(x+4)}{(x-4)^2}$ se anula si $x = 12$.

La solución negativa no aporta nada. Si $0 < x < 12$, la derivada es negativa y la función decrece; si $x > 12$, la derivada es positiva y la función crece, así pues, en $x = 12$ está el mínimo.

La altura, *y*, mide $y = \dfrac{72+6\cdot 12}{12-4} = 18$ cm.

Las dimensiones de la hoja más pequeña posible son: 12 cm de base y 18 cm de altura.

29. Ejercicio resuelto.

30. Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de la función: $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$.

$D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

La derivada es $f'(x)=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$ y solo se anula para $x=0$. Estudiamos su signo, sin olvidarnos del $x=-1$:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
Signo de f'	$-$		$-$	0	$+$
f	Decreciente	$-1\notin D(f)$	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

El punto $A(0,f(0))=A(0,1)$ es un mínimo relativo. No tiene máximos.

La derivada segunda es $f'(x)=\dfrac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3}$ y no se anula nunca, ya que su numerador tampoco lo hace, así pues, la función no tiene puntos de inflexión.

31. Determina la curvatura y los puntos de inflexión de:

a) $f(x)=x^3+6x^2-5$ **b)** $f(x)=x^2+\operatorname{sen}x-1$ **c)** $f(x)=xe^x$

Para hallar los puntos de inflexión se deben calcular los valores de x que anulan la derivada segunda de la función y después estudiar si en ellos cambia la curvatura, es decir, si cambia el signo de esta segunda derivada:

a) $f'(x)=3x^2+12x$, $f''(x)=6x+12=6(x+2)$

La derivada segunda se anula si $x=-2$.

A la izquierda de -2, la segunda derivada es negativa por lo que la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty,-2)$ y a su derecha es positiva por lo que la función es cóncava hacia arriba $(-2,+\infty)$. El punto $A(-2,f(-2))=A(-2,11)$ es un punto de inflexión.

b) $f'(x)=2x+\cos x\Rightarrow f''(x)=2-\operatorname{sen}x$

$f''(x)=0\Rightarrow 2-\operatorname{sen}x=0\Rightarrow \operatorname{sen}x=2$, que no tiene solución.

Por tanto, la función f no tiene puntos de inflexión. La derivada segunda es siempre positiva y la función es cóncava hacia arriba en todo su dominio.

c) La primera derivada es $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$.

La segunda derivada es $f''(x)=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$. Se anula solo si $x=-2$. Se estudia la curvatura para saber si en dicho valor hay o no punto de inflexión:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
Signo de f''	$-$	0	$+$
f	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba

Así pues, el punto $A(-2,-2e^{-2})$ es un punto de inflexión.

32. Encuentra una relación entre *a*, *b* y *c* para que la curva $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ no tenga puntos de inflexión.

La primera derivada es $f''(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx$ y la segunda es $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$. Para que no tenga puntos de inflexión, la derivada segunda no debe anularse nunca:

$f''(x) = 0 \Rightarrow 12ax^2 + 6bx + 2c = 0 \Rightarrow 6ax^2 + 3bx + c = 0$ y para que esta ecuación de segundo grado no tenga soluciones debe tener su discriminante negativo, es decir: $(3b)^2 - 4 \cdot 6ac < 0 \Rightarrow 9b^2 - 24ac < 0$.

33. Ejercicio interactivo.

34. Para anestesiar a una persona hacen falta 20 mg de anestésico por cada kilogramo de masa. El anestésico se elimina de la circulación sanguínea con una rapidez proporcional a la cantidad presente. Si tarda 2 horas en reducirse a la mitad, calcula aproximadamente la dosis necesaria para mantener anestesiada a una persona de 60 kg durante 1 hora.

Sea $A(t)$ la función que da los mg de anestésico que hay en la sangre transcurridas *t* horas desde su aplicación.

Sabemos que la velocidad de eliminación es proporcional a la cantidad de anestésico presente, así que:

$$A'(t) = kA(t) \Rightarrow k = \frac{A'(t)}{A(t)},$$

como el segundo miembro es la derivada de una función logaritmo, dicha igualdad viene de $kt + b = \ln[A(t)]$, de donde $e^{kt+b} = e^{\ln[A(t)]} \Rightarrow e^{kt}e^{b} = A(t)$ y, llamando $M = e^b$ concluimos que $A(t) = Me^{kt}$.

Se calculan ahora los valores de los parámetros *M* y *k* ayudándonos de los datos del problema.

Nos aseguran que a las dos horas se reduce a la mitad, es decir: $A(t+2) = \dfrac{A(t)}{2}$.

Operando se obtiene que: $Me^{k(t+2)} = \dfrac{Me^{kt}}{2} \Rightarrow e^{kt}e^{2k} = \dfrac{e^{kt}}{2} \Rightarrow e^{2k} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow k \simeq -0{,}34657$

Así pues, se puede asignar el valor *k* = – 0,35. La función buscada es $A(t) = Me^{-0{,}35t}$.

Para mantener anestesiada a una persona de 60 kg se necesitan 1200 mg de anestésico y se requiere que esta sea la cantidad que haya en su sangre al cabo de una hora: $A(1) = 1200$.

Por tanto:

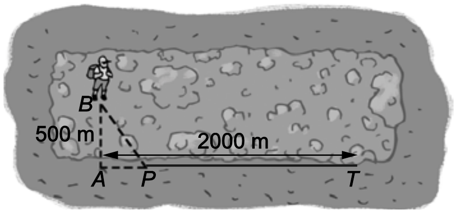
$$A(1) = Me^{-0{,}35} = 1200 \Rightarrow M \simeq 1702{,}8811 \; A(1) = Me^{-0{,}35} = 1200 \Rightarrow M \simeq 1702{,}8811$$

Se puede asignar $M = 1702{,}88$ y la función ya queda definida: $A(t) = 1702{,}88 \cdot e^{-0{,}35t}$.

La cantidad de anestésico que debemos suministrar al paciente la dará el valor de $A(t)$ para $t = 0$:

$$A(0) = 1702{,}88 \text{ mg.}$$

35. Un senderista despistado se halla en el punto *B* en una zona de matorral que se encuentra rodeada de una zona arcillosa. Quiere llegar hasta el punto *T* en el borde de la zona. Si al andar por el matorral gasta el doble de energía que sobre la zona arcillosa, calcula la dirección que debe elegir para consumir la mínima energía en llegar de *B* a *T*.



Llamamos $AP = x$. Si suponemos que, andando sobre zona arcillosa, el senderista consume R unidades de energía por km, entonces consumirá $2R$ unidades sobre el matorral.

El consumo total viene dado por la función: $f(x) = 2R\sqrt{x^2 + 500^2} + R(2000 - x)$

Su derivada es (observa que R es una constante) $f'(x) = R\left(\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+500^2}} - 1\right)$, que se anula si $x = \pm\dfrac{500}{\sqrt{3}}$.

La variable x se mueve en el intervalo $[0, 2000]$.

Evaluamos: $f(0) = 3000$ u, $f(2000) = 1000\sqrt{17}$ u, $f\left(\dfrac{500}{\sqrt{3}}\right) = \left(\dfrac{1500}{\sqrt{3}} + 2000\right)$ u.

Así pues, el menor consumo de energía corresponde a $x = \dfrac{500}{\sqrt{3}}$ que equivale a una dirección de α grados con

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\frac{500}{\sqrt{3}}}{500} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, es decir, $\alpha = 30^{\circ}$ respecto de la recta *AB*.

36. La función que nos da la posición, en metros, de un móvil con trayectoria rectilínea es:

$$\boldsymbol{e(t) = 2 + 30t - 3t^2}$$

siendo *t* el tiempo medido en segundos.

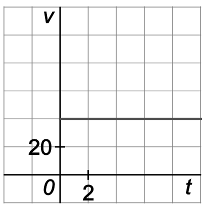
a) Calcula su velocidad a los 6 segundos.

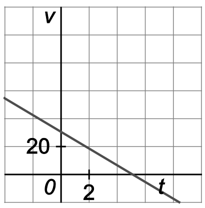
b) Calcula su aceleración. ¿Qué tipo de movimiento es?

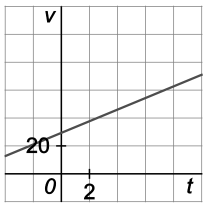
c) ¿En qué momento cambia de sentido su trayectoria?

d) ¿Para qué *t* vuelve a pasar por el punto de partida?

e) De las siguientes gráficas, indica cuál representa la velocidad del móvil en función del tiempo.







a) La velocidad es la derivada del espacio respecto del tiempo, $v(t) = e'(t) = 30 - 6t$, así pues, a los 6 segundos la velocidad es $v(6) = 30 - 6 \cdot 6 = -6$ m/s. (Avanza en sentido contrario).

b) La aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo, $a(t) = v'(t) = -6$ m/s^2. Es un movimiento uniformemente acelerado (la aceleración es negativa).

c) Como la trayectoria es rectilínea, el punto de retroceso será aquel en el que su velocidad se hace cero y, por tanto, pasa de positiva a negativa: $v(t) = 0 \Rightarrow 30 - 6t = 0 \Rightarrow t = 5$ s.

d) Pasará por el origen cuando $e(t) = 0$, es decir, para $t = 10{,}07$ s.

e) La segunda gráfica (la única con pendiente negativa).

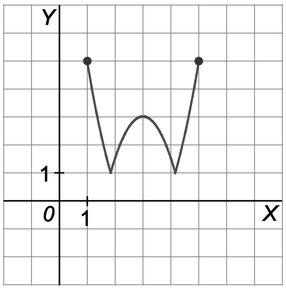
37 a 45. Ejercicios resueltos.

Ejercicios

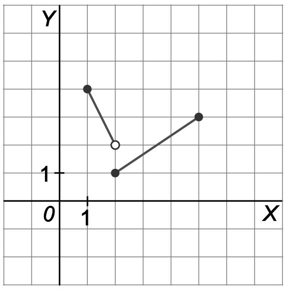
Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica

46. Explica claramente por qué las siguientes funciones no cumplen las condiciones del teorema de Rolle en los intervalos que se muestran.

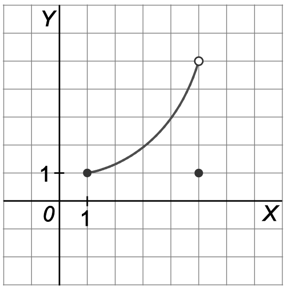
a)



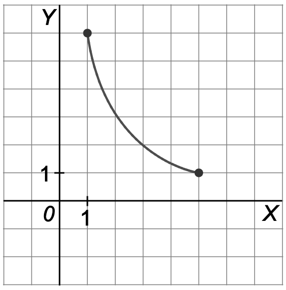
c)



b)



d)



a) Aunque la función es continua y $f(1) = f(5)$, tiene dos puntos angulosos en los que no existe la derivada.

b) La función no es continua en el intervalo cerrado. Aunque sí derivable en el abierto.

c) La función es discontinua.

d) Aunque es continua y derivable no cumple que la función valga lo mismo en los extremos del intervalo cerrado.

47. Sea la función $f(x) = x^3 - 3x + 5$.

Comprueba que cumple las condiciones de Rolle en el intervalo $[-2, 1]$ y determina el valor de *c* del teorema de Rolle. ¿Hay más de uno?

La función es continua y derivable ya que es una función polinómica. Por otra parte, $f(-2) = 3$ y $f(1) = 3$, así que *f* cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo cerrado $[-2, 1]$.

Se halla ahora el valor $c \in (-2, 1)$ en el que se anula la derivada $f'(x) = 3x^2 - 3$:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$$

Así pues, $c = -1$. El otro valor en el que se anula derivada es $x = 1$, que no pertenece al intervalo $(-2, 1)$.

48. Determina, en cada caso, si es aplicable el teorema de Rolle a la función f en el intervalo que se especifica. En caso afirmativo, encuentra todos los valores c del intervalo en los que $f'(c)=0$.

a) $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ en $[1,3]$

b) $f(x)=\dfrac{4x^2-4x+4}{4x^2-4x+1}$ en $[-1,2]$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x^2-x+1}$ en $[-1,2]$

d) $f(x)=|x|+1$ en $[-2,2]$

e) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x+1}$ en $[0,2]$

f) $f(x)=|x^2+x|+5-4x$ en $[1,2]$

a) La función es continua y derivable por ser polinómica y $f(1)=0$ y $f(3)=0$. Sí se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1,3]$. La derivada de $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ es $f'(x)=3x^2-12x+11$ que se anula en $c_1=\dfrac{6-\sqrt{3}}{3}\simeq 1{,}42$ y para $c_2=\dfrac{6+\sqrt{3}}{3}\simeq 2{,}58$, ambos valores pertenecen al intervalo abierto $(1,3)$.

b) La función no es continua en $x=\dfrac{1}{2}\in[-1,2]$ porque anula el denominador. Así que no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo cerrado $[-1,2]$.

c) El denominador de $f(x)$ no se anula nunca, así que la función es continua. La derivada es $f'(x)=\dfrac{-3(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$. El denominador de su derivada, tampoco se anula nunca, por lo que también es derivable.
Se calculan ahora las imágenes en los extremos del intervalo $[-1,2]$: $f(-1)=2$ y $f(2)=2$. Por tanto, sí se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle.

La derivada se anula si $-3(2x-1)=0$, es decir si $x=\dfrac{1}{2}$. Así pues, $c=\dfrac{1}{2}$ cumple que $f'(c)=0$.

d) Se define la función a trozos: $f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{si} \quad x\le 0\\ x+1 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$. La función es continua ya que en $x=0$ es continua porque sus límites laterales en $x=0$ coinciden con $f(0)=1$. La derivada, si $x\neq 0$, es $f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{si} \quad x\le 0\\ 1 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$.
Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=-1$ no coincide con $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=1$, entonces $f'(0)$ no está definida y la función no es derivable en el intervalo cerrado $[-2,2]$, ya que no lo es en un punto del mismo, $x=0$.

Por tanto, no se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle.

e) La función $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x+1}$ no es continua en $x=-1$ pero este valor no pertenece al intervalo $[0,2]$.

Así que *f* sí es continua en [0, 2]. La derivada $f'(x)=\dfrac{e^x(x+1)-(e^x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{xe^x+1}{(x+1)^2}$ también está definida en el intervalo abierto $(0,2)$. Se estudian las imágenes en los extremos del intervalo: $f(0)=0$ y $f(2)=\dfrac{e^2-1}{3}$ y como no coinciden, no se puede aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,2]$.

f) Como debemos trabajar en el intervalo $[1,2]$, $|x^2+x|=x^2+x$, así pues podemos escribir la función en el intervalo $[1,2]$ de esta manera $f(x)=|x^2+x|+5-4x=x^2+x+5-4x=x^2-3x+5$. Es un trozo de parábola, continua y derivable, y además $f(1)=f(2)=3$.

Podemos aplicar el teorema de Rolle en el intervalo cerrado $[1,2]$. Su derivada es $f'(x)=2x-3$ y sea anula para $c=\dfrac{3}{2}\in(1,2)$.

Teorema del valor medio

49. a) Comprueba que $f(x)=\dfrac{3}{x}$ satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[1,3]$.

b) Encuentra el número *c* cuya existencia asegura dicho teorema.

a) La función $f(x)=\dfrac{3}{x}$ es continua y derivable en el intervalo $[1,3]$. Nótese que $x=0$ no pertenece a dicho intervalo.

b) Así pues, existe un número *c* tal que $f'(c)=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=-1$. Por otra parte, $f'(c)=-\dfrac{3}{c^2}$.

Ya se puede calcular *c*: $-1=-\dfrac{3}{c^2}\Rightarrow c=+\sqrt{3}$ (La solución negativa no es del intervalo $[1,3]$).

50. *Demuestra que si α y β son ángulos del primer cuadrante con $\alpha<\beta$, entonces, $\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha<\beta-\alpha$.

Utiliza el teorema del valor medio y la función seno.

A la función $f(x)=\operatorname{sen}x$ se le puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo cerrado $[\alpha,\beta]$. Así pues, existe un número *c* comprendido entre α y β tal que $f(\beta)-f(\alpha)=f'(c)(\beta-\alpha)$, es decir, $\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha=\cos c(\beta-\alpha)$ y como el coseno de un ángulo del interior del primer cuadrante es siempre positivo y menor que 1, se concluye que:

$\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha=\cos c(\beta-\alpha)<1(\beta-\alpha)<\beta-\alpha$.

51. Sea *f* la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & \text{si } x<2\\ 2x & \text{si } x\geq 2\end{cases}$$

¿Existen valores de *a* y *b* para los cuales *f* satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0,4]$? Razona la contestación y, en caso afirmativo, calcula dichos valores.

En primer lugar, la función debe ser continua en $x=2$:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+ax+b\right)=4+2a+b$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 2x=4$ $\qquad$ $f(2)=4$

Por tanto, $4+2a+b=4\Rightarrow 2a+b=0$.

En segundo lugar, la función también debe ser derivable en $x=2$:

La derivada, si *x* es distinto de 2, es: $f'(x)=\begin{cases}2x+a & \text{si } x<2\\ 2 & \text{si } x>2\end{cases}$

Para que *f* sea derivable en $x=2$ debe cumplirse que: $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)\Rightarrow 4+a=2\Rightarrow a=-2\Rightarrow$ $b=4$

Si $a=-2$ y $b=4$, la función *f* satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0,4]$.

52. **Dada la función** $f(x)=\begin{cases} mx & \text{si } x<1 \\ ax^2+bx+1 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

a) Calcula los valores de a, b y m para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$ y tenga un extremo relativo en $x = 3$.

b) Para los valores de $a = 1$, $b = -6$ y $m = -4$, calcula, si existe, un punto $c\in(0,5)$ tal que la tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = c$ sea paralela al segmento que une $O(0,0)$ y $A(5,-4)$.

a) La función es continua dentro de cada tramo (una recta y una parábola), debemos obligarla a que sea continua en $x = 1$. Para ello, estos tres valores han de coincidir:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} mx=m \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(ax^2+bx+1\right)=a+b+1 \qquad f(1)=a+b+1$$

La función será continua en $x = 1$ si $a+b+1=m$.

Cumpliéndose esta condición, la función derivada, para $x\neq 1$, es: $f'(x)=\begin{cases} m & \text{si } x<1 \\ 2ax+b & \text{si } x>1\end{cases}$

Para que sea derivable en $x = 1$, estos dos valores han de coincidir:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-} m=m \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}(2ax+b)=2a+b$$

La función será derivable en $x = 1$ si $m=2a+b$.

Además, como tiene un máximo relativo en $x = 3$, debe cumplirse que $f'(3)=0$, es decir, $f'(3)=6a+b=0$.

Ya podemos calcular a, b y m:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+1=m \\ m=2a+b \\ 6a+b=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b-m=-1 \\ 2a+b-m=0 \\ 6a+b=0 \end{array}\right\}\Rightarrow a=1,\ b=-6 \text{ y } m=-4.$$

b) La función es $f(x)=\begin{cases} -4x & \text{si } x<1 \\ x^2-6x+1 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ y ya sabemos es derivable en todo $\mathbb{R}$.

Su derivada es $f'(x)=\begin{cases} -4 & \text{si } x<1 \\ 2x-6 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$. En particular es continua en $[0,5]$ y derivable en $(0,5)$, por tanto se cumplen las condiciones del teorema del valor medio que asegura que existe un número c en $(0,5)$ con: $f'(c)=\dfrac{f(5)-f(0)}{5-0}=-\dfrac{4}{5}$ (este valor es la pendiente del segmento une los puntos $O(0,0)$ y $A(5,-4)$.

Distinguimos dos casos:

Si $c<1\Rightarrow f'(c)=-4=-\dfrac{4}{5}$ no tiene solución. Si $c\geq 1\Rightarrow f'(c)=2c-6=\dfrac{-4}{5}\Rightarrow c=\dfrac{13}{5}\in(0,5)$.

53. **Aplicando el teorema de Lagrange de los incrementos finitos, demuestra que para $x > 0$ se verifica:**

$$\textbf{arctg}(2x)-\textbf{arctg}(x)<\frac{x}{1+x^2}$$

El teorema del valor medio también se conoce como el teorema de Lagrange de los incrementos finitos. La función $f(x)=\text{arctg}(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ y se puede aplicar, pues, el teorema del valor medio en cualquier intervalo $[a,2a]$ con $0 < a$, es decir, existe un número c, $a<c<2a$, con $f(2a)-f(a)=f'(c)(2a-a)$, esto es, $\text{arctg}(2a)-\text{arctg}(a)=\dfrac{1}{1+c^2}a=\dfrac{a}{1+c^2}$. Como $0<a<c$, entonces $\dfrac{a}{1+c^2}<\dfrac{a}{1+a^2}$ y se concluye que: $\text{arctg}(2a)-\text{arctg}(a)=\dfrac{1}{1+c^2}\cdot a=\dfrac{a}{1+c^2}<\dfrac{a}{1+a^2}$ para cualquier $a > 0$.

54. Se considera la función: $f(x)=\begin{cases} x^2+nx & \text{si } x<-2 \\ x^3+mx^2 & \text{si } x\geq -2 \end{cases}$

a) Determina m y n para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-4, 2]$.

b) Halla los puntos del intervalo cuya existencia garantiza dicho teorema.

a) En primer lugar, la función debe ser continua en $x=-2$:

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(x^2+nx\right)=4-2n$ $\quad\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\left(x^3+mx^2\right)=-8+4m$ $\quad f(-2)=-8+4m$

Por tanto, $4-2n=-8+4m \Rightarrow n+2m=6$.

En segundo lugar, la función también debe ser derivable en $x=-2$:

La derivada, si x es distinto de 2, es $f'(x)=\begin{cases} 2x+n & \text{si } x<-2 \\ 3x^2+2mx & \text{si } x>-2 \end{cases}$.

Para que f sea derivable en $x=-2$ debe cumplirse: $\lim\limits_{x\to -2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f'(x) \Rightarrow -4+n=12-4m \Rightarrow n+4m=16$.

Así pues, debe cumplirse a la vez que $n+2m=6$ y que $n+4m=16$, es decir $n=-4$ y $m=5$.

b) La función es $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & \text{si } x<-2 \\ x^3+5x^2 & \text{si } x\geq -2 \end{cases}$ y su derivada $f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & \text{si } x<-2 \\ 3x^2+10x & \text{si } x\geq -2 \end{cases}$.

$\dfrac{f(2)-f(-4)}{2-(-4)}=\dfrac{28-32}{6}=-\dfrac{2}{3}=f'(c)$ con $c\in(-4,2)$. Hay que distinguir según sea $c<-2$ o $c\geq -2$:

Si $c<-2$ entonces $2x-4=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow x=\dfrac{5}{3}>-2$, no vale.

Si $c\geq -2$ entonces $3x^2+10x=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow x=-3{,}27<-2$, no vale y $x=-0{,}07>-2$, sí vale.

Así pues, solo hay un valor del que habla el teorema: $c=-0{,}07$.

55. Dada la función $f(x)=x^3$**:**

a) ¿Hay algún punto de su gráfica en el que la tangente sea paralela a la recta que une los puntos $A(-1,-1)$ y $B(2,8)$? Hállalo.

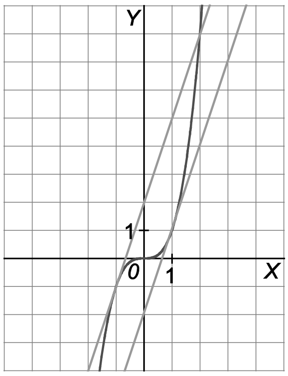
b) Calcula la ecuación de la tangente mencionada.

a) La función $f(x)=x^3$ es continua en el intervalo cerrado $[-1,2]$ y derivable en el abierto $(-1,2)$ por ser una función polinómica. Así que el teorema del valor medio indica que existe un número c del intervalo abierto $(-1,2)$ que cumple que $f'(c)=\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\dfrac{9}{3}=3$. Se halla ahora ese número c: $f'(x)=3x^2$, entonces: $3=3x^2\Rightarrow x=1$ [observa que $x=-1\notin(-1,2)$]. Se obtiene, pues, el punto $P(1,1)$, cuya tangente es paralela al segmento AB.

¿Y qué pasa con la solución $x=-1$ que hemos descartado? Observa que, aunque el teorema del valor medio no lo asegure, el punto $Q(-1,-1)$ también cumple que la tangente que pasa por él es paralela a la recta que une los puntos A y B.

En este caso el segmento AB pertenece a la recta tangente.

b) La tangente en $P(1,1)$ es $y=3x-2$ y la tangente en $Q(-1,-1)$ es $y=3x+2$.



Regla de L'Hôpital y aplicaciones

56. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\operatorname{sen}x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\dfrac{x}{\operatorname{sen}x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+2x}}\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^3-2x+3\right)^{\frac{1}{x}}$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x\left(x^2-x-2\right)}{2x^2-8x+8}$

h) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\left(x^2-1\right)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right)$

i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(e^{x+h}-e^{-(x+h)}\right)-\left(e^x-e^{-x}\right)}{2h}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(a^x-ax\right)^{\frac{a}{x}}$, $a>0$

k) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2}$

l) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\operatorname{sen}x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}x+(1-\cos x)\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2x+\cos x-\cos^2 x}{2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{sen}x\cos x-\operatorname{sen}x-2\cos x(-\operatorname{sen}x)}{2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\operatorname{sen}x\cos x-\operatorname{sen}x}{2}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\dfrac{x}{\operatorname{sen}x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\operatorname{sen}x+x^2\cos x}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{sen}x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\operatorname{sen}x}{-\operatorname{sen}x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2-x^2)\operatorname{sen}x+4x\cos x}{-\operatorname{sen}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x\operatorname{sen}x+(2-x^2)\cos x+4\cos x-4x\operatorname{sen}x}{-\cos x}=\dfrac{6}{-1}=-6$

c) Se puede escribir $(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}x}$ como $(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}x}=e^{\ln(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}x}}=e^{\operatorname{tg}x\ln(\operatorname{tg}x)}$, entonces:

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{tg}x\ln(\operatorname{tg}x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\operatorname{tg}x)}{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-1}{\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}(-\operatorname{tg}x)=0$$

Así pues: $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{tg}x\ln(\operatorname{tg}x)}=e^0=1$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+2x}}\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2\cos x-2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{-3x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2\cos x-2}}=$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1+2x}{-3x}}\right)^{\frac{1+2x}{-3x}\cdot\frac{1}{2\cos x-2}\cdot\frac{-3x}{1+2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x-2}\cdot\frac{-3x}{1+2x}}=\begin{cases}e^{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{2\cos x-2}\cdot\frac{-3x}{1+2x}}=e^{-\infty}=0\\ e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2\cos x-2}\cdot\frac{-3x}{1+2x}}=e^{+\infty}=+\infty\end{cases}$$

. Luego el límite no existe.

e) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \ln\left(x^{\frac{1}{\ln x}}\right)}$; $\lim_{x\to 0^+} \ln\left(x^{\frac{1}{\ln x}}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x}\ln x = 1$, por tanto: $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \ln\left(x^{\frac{1}{\ln x}}\right)} = e$

f) $\lim_{x\to +\infty} \left(x^3 - 2x + 3\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \ln\left(x^3-2x+3\right)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^3-2x+3\right)}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2-2}{x^3-2x+3}}{1}} = e^0 = 1$

g) $\lim_{x\to 2} \frac{e^x\left(x^2-x-2\right))}{2x^2-8x+8} = \lim_{x\to 2} \frac{e^x(x^2-x-2)+e^x(2x-1)}{4x-8} = \lim_{x\to 2} \frac{e^x(x^2+x-3)}{4x-8} = \infty$

Al estudiar los límites laterales, por la izquierda vale $-\infty$ y por la derecha $+\infty$. Así pues, el límite no existe.

h) $\lim_{x\to 1^+} \left(x^2-1\right)\text{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(x^2-1\right)\text{sen}\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x\text{sen}\frac{\pi x}{2} + \left(x^2-1\right)\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{-\frac{\pi}{2}\text{sen}\frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi}$

i) La expresión de este límite nos recuerda mucho a la definición de derivada. En efecto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(e^{x+h} - e^{-(x+h)}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right)}{2h} = \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

j) $\lim_{x\to 0} \left(a^x - ax\right)^{\frac{a}{x}} = e^{\lim_{x\to 0} \ln\left(a^x-ax\right)^{\frac{a}{x}}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{a\ln\left(a^x-ax\right)}{x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{a\frac{a^x\ln a - a}{a^x-ax}}{1}} = e^{a(\ln a - a)} = e^{a\ln a - a^2} = \frac{e^{a\ln a}}{e^{a^2}} = \frac{e^{\ln a^a}}{e^{a^2}} = \frac{a^a}{e^{a^2}}$

k) $\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(x-1)}{\left(\ln(x)\right)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}(x-1)}{\frac{2\ln(x)}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x\,\text{sen}(x-1)}{2\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}(x-1) + x\cos(x-1)}{\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$

l) $\lim_{x\to\pi/2} (1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln(1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x}}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{-2\text{sen}\,x}{1+2\cos x}}{-\text{sen}\,x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1+2\cos x} = 2$$

Así pues: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x}} = e^2$

57. En cada uno de los casos, calcula *a* para que se cumpla la igualdad.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{\operatorname{sen}2x}=3$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos 2x)}=4$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{\ln(e^{ax}-1)}=4$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{ax+5}=e^2$

a) $3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{\operatorname{sen}2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{a}{1+ax}}{2\cos 2x}=\dfrac{a}{2}\Rightarrow a=6$

b) $4=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(2x))}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{-a\operatorname{sen}(ax)}{\cos(ax)}}{\frac{-2\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a\operatorname{sen}(ax)\cos(2x)}{2\operatorname{sen}(2x)\cos(ax)}=\dfrac{a}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos(2x)}{\cos(ax)}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(2x)}=$

$=\dfrac{a}{2}\cdot 1\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(2x)}=\dfrac{a}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a\cos(ax)}{2\cos(2x)}=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^2}{4}$. Así pues, $4=\dfrac{a^2}{4}\Rightarrow$ $a = 4$ o $a = -4$.

c) $4=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{\ln(e^{ax}-1)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{\frac{ae^{ax}}{e^{ax}-1}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2e^{ax}-2}{ae^{ax}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{2e^{ax}}{e^{ax}}-\frac{2}{e^{ax}}}{\frac{ae^{ax}}{e^{ax}}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2-\frac{2}{e^{ax}}}{a}=\dfrac{2}{a}\Rightarrow\dfrac{2}{a}=4\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$

d) $e^2=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{ax+5}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{ax+5}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3(ax+5)}{x}}=e^{3a}$, por tanto, $a=\dfrac{2}{3}$.

58. Sea $f(x)$ una función con derivada continua tal que $f(0)=1$ y $f'(0)=2$. Se considera la función $g(x)=2(f(x))^2$ y se pide:

a) Hallar la recta tangente a la curva $y=g(x)$ en $x=0$.

b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{e^{-x}-1}$.

a) La recta tangente tiene una expresión del tipo $y=mx+n$, donde $m=g'(0)$.

Calculemos primero *m*: $g'(x)=4f(x)f'(x)$, por tanto, $m=g'(0)=4f(0)f'(0)=4\cdot 1\cdot 2=8$.

La recta tangente, $y=8x+n$, pasa por el punto de tangencia $A(0,g(0))=A(0,2)$, por tanto, $2 = 8\cdot 0 + n$, es decir, $n = 2$. La recta tangente es $y=8x+2$.

b) Hay que aplicar L'Hôpital: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{e^{-x}-1}=\left[\dfrac{f(0)-1}{e^{-0}-1}=\dfrac{0}{0}\right]=[\text{L'Hôpital}]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{-e^{-x}}=\dfrac{f'(0)}{-e^{-0}}=\dfrac{2}{-1}=-2$

59. Sabiendo que: $\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos x}{\operatorname{sen} x^2}$ es igual a 1, calcula los valores de *a* y *b*.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos x}{\operatorname{sen} x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=[\text{L'Hôpital}]=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b+\operatorname{sen} x}{2x\cos x^2}=\frac{b}{0}$$

Como el límite $\left(\frac{b}{0}\right)$ debe ser finito, la expresión obtenida ha de ser del tipo $\frac{0}{0}$ para poder seguir aplicando L'Hôpital y llegar a obtener un número. Así pues, $b=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+1-\cos x}{\operatorname{sen} x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=[\text{L'Hôpital}]=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+\operatorname{sen} x}{2x\cos x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=[\text{L'Hôpital}]=\lim_{x\to 0}\frac{2a+\cos x}{2\cos x^2-2x2x\operatorname{sen} x^2}=\frac{2a+1}{2}$$

Como el límite $\left(\frac{2a+1}{2}\right)$ debe valer 1, concluimos que $\frac{2a+1}{2}=1$, es decir $a=\frac{1}{2}$. Por tanto, $a=\frac{1}{2}$ y $b=0$.

60. Determina, en cada caso, el valor de *a* que hace que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1-e^{3x}}{x} & \text{si } x\neq 0\\ a & \text{si } x=0\end{cases}$

b) $g(t)=\begin{cases}at^2 & \text{si } t\leq 1\\ (t^2-1)\ln(t-1) & \text{si } t>1\end{cases}$

a) Debe cumplirse $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=a$: $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{3x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-3e^{3x}}{1}=-3$, si $a=-3$, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) Debe cumplirse $\lim_{t\to 1} g(t)=g(1)=a$.

$$\lim_{t\to 1^-} g(t)=\lim_{t\to 1^-}\left(at^2\right)=a \text{ y } \lim_{t\to 1^+} g(t)=\lim_{t\to 1^+}\left(t^2-1\right)\ln(t-1)=\lim_{t\to 1^+}\frac{\ln(t-1)}{\frac{1}{t^2-1}}=\lim_{t\to 1^+}\frac{\frac{1}{t-1}}{\frac{-2t}{\left(t^2-1\right)^2}}=\lim_{t\to 1^+}\frac{(t+1)^2(t-1)^2}{-2t(t-1)}=0$$

Si $a=0$, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

61. Sea $f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ la función derivable que para $x\neq 0$ verifica que $f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{\operatorname{sen} x}$:

a) ¿Cuánto vale $f(0)$?

b) ¿Cuánto vale $f'(0)$?

a) Al ser continua, $f(0)$ debe ser igual al límite de *f* en dicho punto. Aplicando L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(1+x^2)\cos x}=0$$. Así pues, $f(0)=0$.

b) Se calcula $f'(0)$ aplicando la definición de derivada, y la regla de L´Hôpital dos veces:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\ln(1+h^2)}{\operatorname{sen} h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h^2)}{h\operatorname{sen} h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h}{1+h^2}}{\operatorname{sen} h+h\cos h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(1+h^2)-2h2h}{(1+h^2)^2}}{\cos h+\cos h+h(-\operatorname{sen} h)}=\frac{2}{2}=1.$$ Así pues, $f'(0)=1$.

Extremos relativos. Crecimiento y decrecimiento

62. Localiza los extremos absolutos, si existen, de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

a) En $[-3, 0)$, $(-3, 0]$, $[0, 3]$, $(0, 3)$ y $(-1, 3]$, de la función: $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

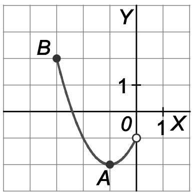
b) En $[-3, -1)$, $[-3, 1]$, $[-3, 3]$, $[-3, 1)$, $[-4, 1]$ y $[-1, 2)$ de la función $g(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 5 & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$.

a) La derivada es $f'(x) = 2x + 2$ y se anula si $x = -1$.

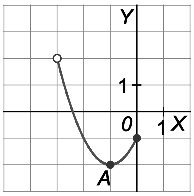
Para hallar los extremos absolutos en los intervalos indicados se debe evaluar la función en $x = -1$ (valor que anula derivada) y en los extremos de los intervalos, si son cerrados:

$f(-1) = -2$ $\quad$ $f(-3) = 2$ $\quad$ $f(0) = -1$ $\quad$ $f(3) = 14$

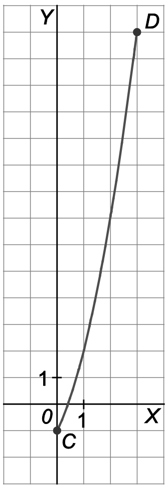
En el intervalo $[-3, 0)$, el mínimo absoluto se alcanza en $x = -1$ y es $f(-1) = -2$ y el máximo absoluto se alcanza en $x = -3$ y es $f(-3) = 2$.



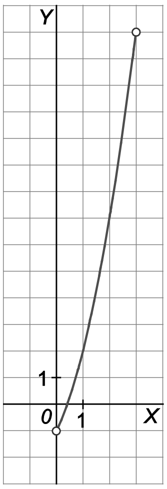
En el intervalo $(-3, 0]$ el mínimo absoluto es $f(-1) = -2$ y no tiene máximo absoluto.



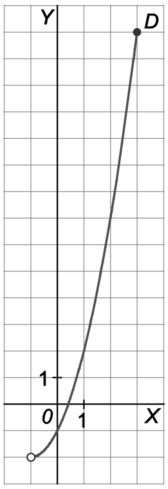
En el intervalo $[0, 3]$ el mínimo absoluto es $f(0) = -1$ y el máximo absoluto es $f(3) = 14$.



En el intervalo $(0, 3)$ no hay mínimo absoluto ni máximo absoluto.



En el intervalo $(-1, 3]$, no tiene mínimo absoluto y el máximo absoluto es $f(3) = 14$.



b) La función es continua en $x = -2$ ya que sus límites laterales coinciden. La derivada de $p(x) = -x^2 - 2x + 5$ es $p'(x) = -2x - 2$ y se anula si $x = -1$, que no pertenece a su dominio de definición. Así pues, el valor $x = -1$ no aporta nada a la hora de calcular los extremos absolutos. La derivada de $q(x) = x^2 + 1$ es $q'(x) = 2x$ y se anula si $x = 0$. Este valor sí hay que tenerlo en cuenta. Para hallar los extremos absolutos en los intervalos indicados se debe evaluar la función en $x = 0$ (valor que anula derivada), en los extremos de los intervalos y en $x = -2$ (en este punto, la función no es derivable y por eso se le debe incluir en el estudio).

$g(0) = 1$ $\quad$ $g(-3) = 2$ $\quad$ $g(3) = 10$ $\quad$ $g(-4) = -3$ $\quad$ $g(1) = 2$ $\quad$ $g(2) = 5$ $\quad$ $g(-2) = 5$

En el intervalo $[-3, -1)$, el mínimo absoluto es $g(-3) = 2$ y el máximo absoluto es $g(-2) = 5$.

En el intervalo $[-3, 1]$, el mínimo absoluto es $g(0) = 1$ y el máximo absoluto es $g(-2) = 5$.

En el intervalo $[-3, 3]$, el mínimo absoluto es $g(0) = 1$ y el máximo absoluto es $g(3) = 10$.

En el intervalo $[-3, 1)$, el mínimo absoluto es $g(0) = 1$ y el máximo absoluto es $g(-2) = 5$.

En el intervalo $[-4, 1]$, el mínimo absoluto es $g(-4) = -3$ y el máximo absoluto es $g(-2) = 5$.

En $[-1, 2)$, el mínimo absoluto es $g(0) = 1$ y no hay máximo absoluto.

63. Halla los máximos y mínimos de la función: $f(x)=(2x^3-4x^2)e^{-x}$.

La derivada es $f'(x)=(-2x^3+10x^2-8x)e^{-x}=-2x(x-1)(x-4)e^{-x}$, y se anula si $x=0$, $x=1$, $x=4$. Se estudia el signo de la derivada:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,4)$	4	$(4,+\infty)$
Signo de f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

La función tiene máximos relativos en los puntos $O(0,0)$ y $A(4;1,17)$. Este último es absoluto.

La función tiene un mínimo relativo en el punto $B(1;-0,74)$.

64. Dada la función $f(x)=ax+b\sqrt{x}$, determina los valores de los parámetros a y b sabiendo que $f(x)$ cumple las siguientes propiedades:

a) $f(x)$ alcanza su máximo en el punto de abscisa $x=100$.

b) La gráfica de $f(x)$ pasa por el punto $A(49,91)$.

La derivada de la función es $f'(x)=a+\dfrac{b}{2\sqrt{x}}$.

La propiedad a) nos asegura que $f'(100)=0$, es decir, $a+\dfrac{b}{2\sqrt{100}}=0 \Rightarrow a+\dfrac{b}{20}=0 \Rightarrow 20a+b=0$.

La propiedad b) nos asegura que $f(49)=91$, es decir, $49a+b\sqrt{49}=91 \Rightarrow 49a+7b=91$.

Y con el sistema obtenido, $\left.\begin{array}{l}20a+b=0\\49a+7b=91\end{array}\right\}$, ya podemos calcular a y b: $a=-1$ y $b=20$.

65. Determina un punto de la curva de ecuación $f(x) = xe^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.

La pendiente de las rectas tangentes nos la da el valor de la derivada: $f'(x) = e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$

La pendiente máxima será el máximo de esta derivada, por tanto hay que estudiar la derivada de la derivada:

$f''(x) = -4xe^{-x^2} + (1-2x^2)e^{-x^2}(-2x) = (4x^3 - 6x)e^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow (4x^3 - 6x)e^{-x^2} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 6x = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\sqrt{\frac{3}{2}}, x = +\sqrt{\frac{3}{2}}$

Por consiguiente, las pendientes de las rectas tangentes tienen un máximo relativo en el punto $O(0,0)$. Falta, pues, asegurarnos de que ese máximo es absoluto. Para ello se estudian los límites en el infinito de dichas pendientes:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (1-2x^2)e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-2x^2}{e^{x^2}} = 0$. Análogamente, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Por tanto, el punto $O(0,0)$ es el punto en el que la pendiente de la recta tangente es máxima y dicha pendiente vale $f'(0) = (1 - 2\cdot 0^2)e^{-0^2} = 1$.

66. Considera la función $f(x) = xg(x)$. Sabiendo que:

- **La función $g(x)$ es continua, derivable y tiene un máximo en $x = 1$.**
- **$f(1)g(1) = 4$**

a) ¿Tiene la función f un máximo en $x = 1$? Justifica tu respuesta.

b) Si, además sabemos que:

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

calcula los valores de a, b y c para que f tenga un mínimo en $x = 0$.

a) La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = g(x) + xg'(x)$. Se sabe que $g'(1) = 0$, ya que g tiene un máximo en $x = 1$. Así pues $f'(1) = g(1) + 1\cdot g'(1) = g(1) + 0$. Para que f tenga un máximo en $x = 1$, su derivada en dicho punto debe valer cero, pero $f'(1)$ no puede valer cero, ya que entonces $g(1)$ también valdría cero y esto no puede ser porque nos dicen que $f(1)g(1) = 4$. Por tanto, f no puede tener un máximo en $x = 1$ porque $f'(1) \neq 0$.

b) La derivada de $g(x) = ax^2 + bx + c$ es $g'(x) = 2ax + b$.

Como g tiene un máximo en $x = 1$, $g'(1) = 0$, es decir, $2a + b = 0$ y $b = -2a$.

Como f ha de tener un mínimo en $x = 0$, $f'(0) = 0$. La expresión de la derivada de f era $f'(x) = g(x) + xg'(x)$, entonces $f'(0) = g(0) + 0\cdot g'(0) = g(0) = c \Rightarrow c = 0$. Así pues, g es de la forma $g(x) = ax^2 - 2ax$.

Por otra parte, se sabe que $f(1) = g(1) = 4$, es decir, $1\cdot g(1)g(1) = 4 \Rightarrow [g(1)]^2 = 4$ 1, por tanto, $g(1) = 2$ o $g(1) = -2$.

Si $g(1) = -2$, se tendría que $g(1) = a\cdot 1^2 - 2a\cdot 1 = -2 \Rightarrow a = 2$, y la función sería $g(x) = 2x^2 - 4x$, que se debe descartar porque esta función es una parábola cóncava hacia arriba y no presenta ningún máximo.

Si $g(1) = 2$, se tiene que $g(1) = a\cdot 1^2 - 2a\cdot 1 = 2 \Rightarrow a = -2$, y la función sería $g(x) = -2x^2 + 4x$, que sí tiene un máximo en su vértice (de abscisa $x = 1$ como asegura la primera condición del enunciado).

Así pues, $a = -2$, $b = 4$ y $c = 0$.

Las funciones en cuestión son $g(x) = -2x^2 + 4x$ y $f(x) = -2x^3 + 4x^2$.

67. Para cada *h* se considera la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + h$

a) Halla los puntos en los que *f* alcanza sus valores máximos y mínimos relativos.

b) Encuentra *h* para que el valor de *f* en el máximo o mínimo hallado antes sea 0.

a) La derivada es $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$, que se anula si $x = 0$ o si $x = 1$. Se estudia si son máximos o mínimos con el criterio de la derivada segunda, $f''(x) = 12x - 6$:

$f''(0) = -6 < 0$, por tanto, $f(0) = h$ es un máximo.

$f''(1) = 6 > 0$, por tanto, $f(1) = -1 + h$ es un mínimo.

b) Para que el máximo sea cero debe cumplirse que $h = 0$.

Para que el mínimo sea cero debe cumplirse que $-1 + h = 0$, es decir, $h = 1$.

68. Demuestra que para todo número real positivo, *P*, se cumple que $\ln(1+P) > \dfrac{P}{1+P}$. Para ello sigue estos pasos:

I. Demuestra que la función $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$, es continua y derivable en el intervalo $(0,+\infty)$.

II. Demuestra que $f(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo $(0,+\infty)$.

III. Calcula $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

IV. Concluye la demostración.

I. La función es continua y derivable para valores positivos de *x,* ya que es suma de funciones derivables.

II. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2}$, que es siempre positiva si $x > 0$.

Por tanto, la función $f(x)$ es estrictamente creciente en $(0,+\infty)$.

III. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}\right] = 0 - 0 = 0$

IV. Como se ha visto que si *x* es positivo, entonces, $f(x) > 0 \Rightarrow \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x} > 0 \Rightarrow \ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$.

Luego, para todo número real positivo, *P*, se cumple que $\ln(1+P) > \dfrac{P}{1+P}$.

69. Halla los valores de *a*, *b* y *c* sabiendo que la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x+c}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$, una asíntota oblicua de pendiente 2, y un extremo de abscisa $x = 3$.

Se buscan las asíntotas verticales de $f(x)$ en los valores de x que anulan el denominador:

$$x+c=0 \Rightarrow x=-c$$

Sabemos que la función tiene una asíntota vertical en $x = 1$, entonces $c = -1$:

La asíntota oblicua es de la forma $y = mx+n$, siendo $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ y $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{ax^2+b}{x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+b}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{x^2}=a.$$

Como la pendiente de la asíntota oblicua es 2 entonces $a = 2$. Luego $f(x)=\dfrac{2x^2+b}{x-1}$.

Además, $f(x)$ tiene un extremo de abscisa $x = 3$, luego $f'(3)=0$. Por tanto:

$$f'(x)=\frac{4x(x-1)-\left(2x^2+b\right)}{(x-1)^2}=\frac{4x^2-4x-2x^2-b}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x-b}{(x-1)^2}$$

$$f'(3)=0\Rightarrow 2\cdot 3^2-4\cdot 3-b=0\Rightarrow b=6$$

Luego, $f(x)=\dfrac{2x^2+6}{x-1}$.

70. Demuestra analítica y gráficamente que la ecuación $e^x=x$ no tiene solución.

Vamos a seguir estos pasos:

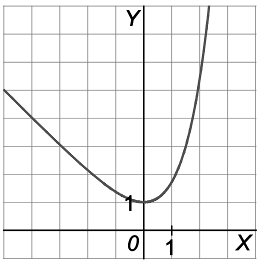
I. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=e^x-x$.

II. Hallar el mínimo absoluto de la función *f*.

III. Demostrar que $e^x-x>0$ para todo x y concluimos la demostración.

La derivada de la función continua $f(x)=e^x-x$ es $f'(x)=e^x-1$, que se anula si $x = 0$. Se estudia su monotonía:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
Signo de f'	–	0	+
f	Decreciente	Mínimo absoluto	Creciente



La función decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0,+\infty)$.

El mínimo que hay en el punto $(0,1)$ es un mínimo absoluto ya que la función es continua y es siempre decreciente a la izquierda de cero y siempre creciente a la derecha de cero. Así pues, el valor mínimo que toma la función es $f(0)=1$. Por tanto, $f(x)\geq 1$ para todo x.

Como $f(x)\geq 1$, entonces $e^x-x\geq 1\Rightarrow e^x-x>0\Rightarrow e^x>x$ para todo x y, por tanto, nunca puede ser que $e^x=x$.

Problemas de optimización

71. Se quiere construir una piscina en forma de paralelepípedo recto de base cuadrada. Disponemos de 192 m^2 de baldosas para recubrir las paredes y el fondo de la piscina. Halla las dimensiones de la piscina de manera que su capacidad sea máxima.

Se trata de un problema de optimización.

Se nombran las variables: longitud (x) en metros de los lados de la base cuadrada y profundidad (y) en metros.

Se relacionan las variables: el área total debe ser 192 m^2, por tanto: $x^2 + 4xy = 192$, $y = \dfrac{192 - x^2}{4x}$

La función que se quiere maximizar es el volumen $V = xxy$, es decir: $V(x) = x^2 \dfrac{192 - x^2}{4x} = -\dfrac{1}{4}x^3 + 48x$

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x: como los números buscados son positivos, x debe estar en el intervalo abierto $\left(0, \sqrt{192}\right)$.

Se busca el máximo de $V(x) = -\dfrac{1}{4}x^3 + 48x$ en $\left(0, \sqrt{192}\right)$.

$$V'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 48 = 0 \Rightarrow x = 8 \in \left(0, \sqrt{192}\right).$$

La solución negativa no es realista.

Como los límites de la función en los extremos del intervalo son cero, el máximo absoluto de la función se alcanza para $x = 8$, por tanto, $y = \dfrac{192 - 8^2}{4 \cdot 8} = 4$.

Las dimensiones de la piscina que maximizan el volumen son 8 metros de lado para la base cuadrada y 4 metros de profundidad. El volumen máximo es $V(8)$, esto es, 256 m^3.

72. Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de tal manera que uno de ellos tenga doble longitud que otro y que al construir con cada uno de ellos un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encuentra la longitud de cada trozo.

Se trata de un problema de optimización.

Se nombran las variables: cada uno de los trozos (x, $2x$ e y), medidos en decámetros.

Se relacionan las variables:

La suma de los trozos es 14 dam: $x + 2x + y = 14 \Rightarrow y = 14 - 3x$

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x.

Como las longitudes han de ser positivas: $x > 0$ y también $14 - 3x > 0$, por tanto, $x \in \left(0, \dfrac{14}{3}\right)$.

La función que se quiere maximizar es la suma de las áreas: $A = \left(\dfrac{x}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{2x}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{4}\right)^2$.

Sustituyendo y operando: $A(x) = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{4x^2}{16} + \dfrac{(14 - 3x)^2}{16} = \dfrac{5x^2}{16} + \dfrac{196 + 9x^2 - 84x}{16} = \dfrac{14x^2 - 84x + 196}{16}$

Se busca el mínimo: $A'(x) = \dfrac{28x - 84}{16} = 0 \Rightarrow 28x - 84 = 0 \Rightarrow x = 3 \in \left(0, \dfrac{14}{3}\right)$

Como la función $A(x)$ es una parábola cóncava hacia arriba, ya podemos asegurar que su vértice ($x = 3$) es el mínimo absoluto, sin necesidad de más cálculos.

El mínimo se alcanza si $x = 3$, y , por tanto, $2x = 6$, $y = 14 - 3x = 5$.

Los trozos miden 3 dam, 6 dam y 5 dam.

73. Partimos un hilo metálico de longitud 1 m en dos trozos, haciendo con o un cuadrado y con el otro un círculo. Calcula las dimensiones de cada trozo para que la suma de las áreas sea:

a) Máxima **b)** Mínima

Se trata de un problema de optimización.

Se nombran las variables, que son las longitudes de los dos trozos: x (para hacer el círculo), e y (para hacer el cuadrado), ambas medidas en metros.

Se relacionan las variables: $x+y=1$, es decir, $y=1-x$.

La función que se quiere maximizar y minimizar es la suma de las áreas.

El lado del cuadrado es $\frac{1-x}{4}$ y su área: $\left(\frac{1-x}{4}\right)^2$. La longitud del círculo es $x=2\pi r \Rightarrow r=\frac{x}{2\pi}$, así pues, su área es $\pi r^2=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}$.

La función suma de áreas es $A(x)=\left(\frac{1-x}{4}\right)^2+\frac{x^2}{4\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-2\pi x+\pi}{16\pi}$.

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x: $(0,1)$.

Se busca el máximo y el mínimo de $A(x)=\frac{(\pi+4)x^2-2\pi x+\pi}{16\pi}$ en $(0,1)$.

$A'(x)=\frac{2(\pi+4)x-2\pi}{16\pi}=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{\pi+4}\in(0,1)$. Como la función $A(x)$ es una parábola cóncava hacia arriba, este valor corresponde a su vértice y, por tanto, es el mínimo absoluto.

Así pues, el mínimo se alcanza si el trozo destinado a formar el círculo mide $x=\frac{\pi}{\pi+4}$ m.

No se puede calcular el valor de la función en los extremos, por tanto, se calculan sus límites: $\lim_{x\to 0} A(x)=\frac{1}{16}$ y $\lim_{x\to 1} A(x)=\frac{1}{4\pi}$. Si solo se formara un círculo con todo el hilo, se obtendría el área máxima. Pero esta posibilidad no la contempla el problema. Para responder se podría decir que cuanto más largo sea el trozo para formar el círculo, mayor será la suma de las áreas.

74. De entre todos los números reales positivos x, y, tales que $x+y=10$, encuentra aquellos para los que el producto $p=x^2y$ es máximo.

Se nombran las variables, que son los números: x e y.

Se relacionan las variables: $x+y=10$, es decir, $y=10-x$.

La función que se quiere maximizar y minimizar es el producto $p=x^2y=x^2(10-x)=10x^2-x^3=x^2(10-x)$.

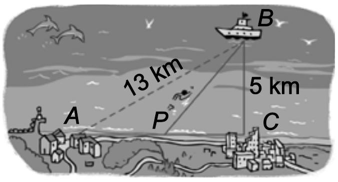
Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x. Debe estar en el intervalo abierto $(0,10)$.

Se busca el máximo y el mínimo de $p(x)=x^2(10-x)$ en el intervalo abierto $(0,10)$.

$p'(x)=20x-3x^2=x(20-3x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{20}{3}$, $p\left(\frac{20}{3}\right)=\frac{4000}{27}$

No se puede calcular el valor de la función en los extremos, por tanto, se calculan sus límites: $\lim_{x\to 0} p(x)=\lim_{x\to 10} p(x)=0$ .Como los límites de la función en los extremos del intervalo son cero, el valor $x=\frac{20}{3}$ corresponde al máximo absoluto. Así pues, el máximo se alcanza si $x=\frac{20}{3}$ e $y=10-x=\frac{10}{3}$.

75. Un barco *B* y dos ciudades *A* y *C* de la costa forman un triángulo rectángulo en *C*, de acuerdo a lo reflejado en la figura.



Un hombre situado en *A* desea llegar hasta el barco *B*. Sabiendo que puede nadar a 3 km/h y caminar a 5 km/h, ¿a qué distancia de *A* debe abandonar la costa para nadar hasta *B* si quiere llegar lo antes posible?

Primero, con ayuda del teorema de Pitágoras, se observa que la distancia entre las dos ciudades es de 12 km.

Se nombra la variable: x es la distancia, en metros, PC.

La función que se quiere minimizar es el tiempo empleado por el hombre para recorrer AP (a 5 km/h) y PB (a 3 km/h). Se estudia cuánto miden estos segmentos: $AP = 12 - x$; para calcular PB se trabaja en el triángulo PBC y se obtiene que $PB = \sqrt{5^2 + x^2}$.

El tiempo (espacio/velocidad) empleado es la función $t(x) = \dfrac{12 - x}{5} + \dfrac{\sqrt{25 + x^2}}{3} = \dfrac{36 - 3x + 5\sqrt{25 + x^2}}{15}$

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x: $[0,12]$

Se busca el mínimo de $t(x) = \dfrac{36 - 3x + 5\sqrt{25 + x^2}}{15}$ en $[0,12]$.

$$t'(x) = \frac{1}{15}\left(-3 + \frac{5x}{\sqrt{25 + x^2}}\right) = \frac{-3\sqrt{25 + x^2} + 5x}{15\sqrt{25 + x^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

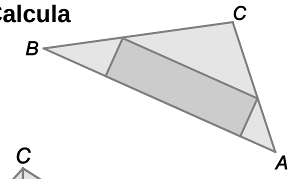
$$\Leftrightarrow -3\sqrt{25 + x^2} + 5x = 0 \Rightarrow 5x = 3\sqrt{25 + x^2} \Rightarrow 25x^2 = 225 + 9x^2 \Rightarrow 16x^2 = 225 \Rightarrow x = 3{,}75 .$$

Se comparan:

$t(0) = \dfrac{12}{5} + \dfrac{5}{3} \simeq 4{,}07$ $\quad$ $t(12) = \dfrac{13}{3} = 4{,}\widehat{3}$ $\quad$ $t(3{,}75) = 3{,}7\widehat{3}$

Así pues, el mínimo se alcanza si camina durante $12 - 3{,}75 = 8{,}25$ km y luego se pone a nadar.

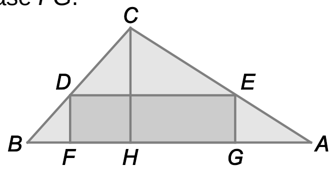
76. En el triángulo *ABC*, el lado *AB* mide 10 cm y la altura sobre *AB* mide 4 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo de máxima área inscrito en dicho triángulo con un lado descansando sobre el lado *AB*.



Llamamos x a la altura DF del rectángulo que andamos buscando, y a su base FG.

En la figura se observa que los triángulos ABC y DEC son semejantes,

por tanto, los cocientes entre sus alturas y bases son iguales:



$\frac{4}{10}=\frac{4-x}{y}\Rightarrow y=\frac{5(4-x)}{2}=\frac{20-5x}{2}$.

La función que queremos maximizar es el área del rectángulo $A(x)=\frac{20-5x}{2}x=\frac{20x-5x^2}{2}$ donde $x\in[0,4]$.

Dicha función es una parábola cóncava hacia abajo que tiene su máximo absoluto en su vértice. Su derivada, $A'(x)=\frac{20-10x}{2}=10-5x$, se anula si x = 2, por lo que el máximo se alcanza si x = 2 y la base es $y=\frac{20-5\cdot 2}{2}=5$.

Así pues, el rectángulo de área máxima tiene 5 cm de base y 2 cm de altura y el área máxima son 10 cm^2.

77. Una tienda vende aceite a 2 € el litro. Al vender x litros los costes de todo tipo (expresados en euros) son $0{,}5x+Cx^2$. Se sabe que el beneficio máximo se obtiene vendiendo 750 L. Encuentra el valor de *C* y el beneficio máximo obtenido.

La función beneficio (ingresos − costes) es $B(x)=2x-(0{,}5x+Cx^2)=1{,}5x-Cx^2$. Sabemos además que su máximo absoluto (es una parábola cóncava hacia abajo) se halla en $x=750$ por lo que $B'(750)=0$.

La derivada es $B'(x)=1{,}5-2Cx$, $B'(750)=1{,}5-2C\cdot 750=0$, de donde concluimos que $C=0{,}001$.

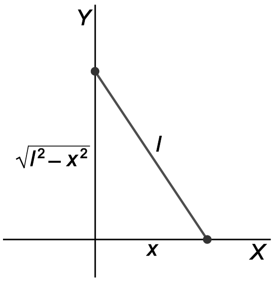
78. Un segmento de longitud *l* se apoya en los ejes coordenados del primer cuadrante determinando con ellos un triángulo rectángulo. Hallar el valor mínimo de la abscisa en que se apoya para que el área del triángulo mencionado, de hipotenusa l, sea máximo.

Se nombran las variables: la abscisa de la base es x y la ordenada de la altura es y.

Se relacionan las variables: $x^2+y^2=l^2$, es decir, $y=\sqrt{l^2-x^2}$.

La función que se quiere maximizar es el área del triángulo:

$A(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{l^2-x^2}$



Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x.

Debe estar en el intervalo cerrado $[0,l]$. Se busca el máximo de $A(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{l^2-x^2}$ en el intervalo cerrado $[0,l]$.

$A'(x)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{l^2-x^2}-\frac{x2x}{2\sqrt{l^2-x^2}}\right]=\frac{1}{2}\left[\sqrt{l^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{l^2-x^2}}\right]=\frac{1}{2}\frac{l^2-2x^2}{\sqrt{l^2-x^2}}$, que se anula si $l^2-2x^2=0$, es decir, si $x=\frac{l}{\sqrt{2}}$ (la solución negativa se descarta). Comparamos: $A\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{l^2-\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{l^2}{4}$, $A(0)=0$, $A(l)=0$

Así pues, el área máxima $\left(\frac{l^2}{4}\right)$ se obtiene si $x=\frac{l}{\sqrt{2}}$. La altura también sería $y=\frac{l}{\sqrt{2}}$.

79. Sea un rectángulo de 4 m de perímetro.

a) Si se sustituyen los lados por semicircunferencias exteriores, ¿entre qué valores está comprendida el área de la figura resultante? Calcúlala.

b) Si se sustituyen dos lados opuestos por semicircunferencias exteriores, calcula las dimensiones del rectángulo original para que la figura formada tenga máxima área.

a) Se nombran las variables: x es la longitud de la altura e y la longitud de la base. Ambas medidas en metros.

Se relacionan las variables: $2x + 2y = 4$, es decir, $y = 2 - x$.

La función que se quiere maximizar y minimizar es el área de la figura (un rectángulo más dos círculos).

$$A(x) = x(2-x) + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{2-x}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(2x^2 - 4x + 4) + 2x - x^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)x^2 + (2-\pi)x + \pi$$

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x. En este caso, $0 < x < 2$.

El mínimo absoluto de la parábola (cóncava hacia arriba) $A(x) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)x^2 + (2-\pi)x + \pi$ se encuentra en su vértice, es decir, si $x = \frac{\pi - 2}{\pi - 2} = 1$.

Se compara: $A(1) = 1 + \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0} A(x) = \pi$, $\lim\limits_{x\to 2} A(x) = \pi$

Así pues, el área $A(x)$ de la figura cumple $1 + \frac{\pi}{2} \le A(x) < \pi$.

b) Se nombran las variables: x es la longitud del lado sustituido por semicircunferencias, e y la longitud de los otros dos lados.

Se relacionan las variables: $2x + 2y = 4$, es decir, $y = 2 - x$.

La función que se quiere maximizar y minimizar es el área de la figura (un rectángulo más un círculo).

La función área es $A(x) = x(2-x) + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi - 4}{4}\right)x^2 + 2x$.

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x. En este caso, $0 < x < 2$.

El máximo de la parábola (cóncava hacia abajo) se encuentra en su vértice, es decir, si $x = \frac{4}{4-\pi} \simeq 4{,}66$.

Pero este valor no pertenece al intervalo de definición de x: $0 < x < 2$.

Por otra parte, $A(0) = 0$ y $A(2) = \pi$.

Así que se podría decir que el área máxima se conseguiría si el rectángulo inicial fuese un segmento y la figura resultante degenerara en un solo círculo de 2 m de diámetro.

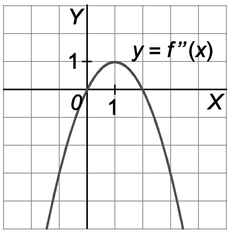
Curvatura y puntos de inflexión

80. Halla los valores de m para los que la función $f(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2 + 3x - 2$ es siempre cóncava hacia arriba.

Para que la función sea siempre cóncava hacia arriba su derivada segunda debe ser siempre positiva. Se impone esta condición: $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 2mx + 3$ y $f''(x) = 12x^2 + 24x + 2m$

Para que $f''(x) = 2(6x^2 + 12x + m)$ sea siempre positiva, el discriminante $12^2 - 4 \cdot 6 \cdot m < 0 \Rightarrow m > 6$.

81. La gráfica que se muestra es la de la derivada segunda de cierta función *f*. A partir de ella, deduce la curvatura de *f* y sus puntos de inflexión. ¿Qué se puede afirmar con seguridad de la gráfica de *f*?

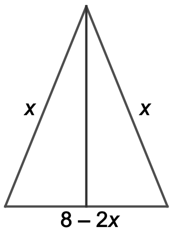


La función es cóncava hacia abajo en: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

La función es cóncava hacia arriba en: $(0, 2)$

Los puntos $A(0, f(0))$ y $B(2, f(2))$ son puntos de inflexión.

82. Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.



Se nombra la variable: *x* es la longitud de los lados iguales.

La función que se quiere maximizar es el área del triángulo.

La base mide $b = 8 - 2x$ y la altura se puede hallar con Pitágoras y se obtiene $a = \sqrt{8x - 16}$.

El área es $A(x) = \dfrac{ba}{2} = (4 - x)\sqrt{8x - 16} = 2(4 - x)\sqrt{2x - 4}$.

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable *x*. La suma de dos lados debe ser siempre mayor que el tercero, así pues: $x + x > 8 - 2x \Rightarrow x > 2$ y $x + 8 - 2x > x \Rightarrow x < 4$.

Por tanto, $2 < x < 4$. Para continuar con el problema vamos a incluir los valores extremos ($x = 2$ y $x = 4$) en el estudio y así nos resultará más cómodo. Esto no supone ningún obstáculo porque estamos calculando un máximo y sabemos que en esos valores los triángulos son degenerados (son segmentos) y podemos asignarles área cero. Es decir, hemos añadido dos valores, $x = 2$ y $x = 4$, que no van a influir en la respuesta final. (Este mismo procedimiento puede utilizarse en problemas similares)

Así pues, suponemos que *x* se mueve en el intervalo cerrado $[2, 4]$.

$$A'(x) = 2\left[-\sqrt{2x - 4} + (4 - x)\frac{2}{2\sqrt{2x - 4}}\right] = 2\left[\frac{8 - 3x}{\sqrt{2x - 4}}\right] = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

Comparamos: $A(2) = 0$, $A(4) = 0$, $A\left(\dfrac{8}{3}\right) = 3{,}08$.

Así pues, el triángulo de área máxima es el triángulo equilátero de lado $\dfrac{8}{3}$.

(Observa que si $x = \dfrac{8}{3}$, entonces la base mide $b = 8 - 2x = 8 - 2 \cdot \dfrac{8}{3} = \dfrac{8}{3}$).

83. Sea la función $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$.

a) Esboza su gráfica.

b) ¿Qué nombre recibe esta función?, ¿y su gráfica?

a) $D(f)=\mathbb{R}$

La función es siempre positiva porque se trata de una exponencial.

La función es par porque $f(-x)=f(x)$, por tanto, es simétrica respecto al eje *Y*.

No tiene asíntotas verticales ni oblicuas pero sí horizontales, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, es decir, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal tanto en más infinito como en menos infinito, ya que es simétrica respecto al eje *Y*.

Su derivada es $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}(-x)=-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$, que se anula para $x=0$.

Para valores negativos de *x* es positiva y para valores positivos es negativa. Así pues, *f* es creciente en $(-\infty,0)$ y decreciente en $(0,+\infty)$.

Tiene un máximo relativo (que es también absoluto) en el punto $A(0,f(0))=A\left(0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$.

Su derivada segunda es $f''(x)=\frac{(x^2-1)}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$, que se anula para $x=-1$ y $x=1$.

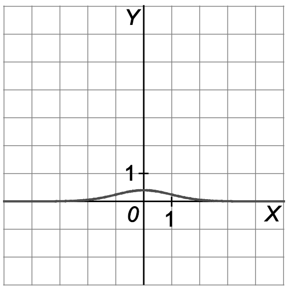
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
Signo de f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	Cóncava hacia arriba	Punto de inflexión	Cóncava hacia abajo	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba

La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1,1)$.

Tiene dos puntos de inflexión:

En $B\left(-1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)=B(-1;0,24)$ y en $C\left(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right)=C(1;0,24)$.

La gráfica de la función es la que se muestra.



b) Esta función es la distribución normal de media 0 y desviación típica 1, $N(0,1)$, también llamada normal estándar. Su gráfica se conoce con el nombre de campana de Gauss.

(En general, se suele representar esta gráfica con distintas escalas en los ejes, pero aquí se muestra usando la misma escala en los ejes *X* e *Y*).

84. De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Se sabe que

- **Tiene un máximo en $x=-1$.**
- **Su gráfica corta al eje *X* en el punto de abscisa $x=-2$.**
- **Tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=0$.**

Calcula *a*, *b*, c y *d* sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$ tiene pendiente 9.

Las dos primeras derivadas de *f* son: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ y $f''(x)=6ax+2b$

Hay un máximo en $x=-1$ implica que $f'(-1)=0$, es decir: $f'(-1)=3a(-1)^2+2b(-1)+c=0\Rightarrow 3a-2b+c=0$

Corta al eje *X* en $x=-2$ implica que $f(-2)=0$, es decir:

$f(-2)=a(-2)^3+b(-2)^2+c(-2)+d=0\Rightarrow -8a+4b-2c+d=0$

Hay un punto de inflexión en $x=0$ implica que $f''(0)=0$, es decir: $f''(0)=6a\cdot 0+2b=0\Rightarrow b=0$

La tangente a *f* en $x=2$ tiene pendiente 9, por lo que $f'(2)=9$: $f'(2)=3a\cdot 2^2+2b\cdot 2+c=9\Rightarrow 12a+4b+c=9$

Resolviendo el sistema formado por esas cuatro ecuaciones, se obtiene la solución:

$$\left.\begin{array}{l}3a-2b+c=0\\ -8a+4b-2c+d=0\\ b=0\\ 12a+4b+c=9\end{array}\right\}\Rightarrow a=1, b=0, c=-3, d=2$$

85. Demuestra que la curva de la ecuación:

$$y=x^4-x^3+x^2-x+1$$

no tiene ningún punto de inflexión. Halla la ecuación de la recta tangente a esa curva en el punto (x_0,y_0), siendo x_0 el valor de *x* hace mínima y''.

Se calcula la segunda derivada: $y'=4x^3-3x^2+2x-1$, $y''=12x^2-6x+2$, que es una parábola cóncava hacia arriba que no corta al eje *X* (la ecuación $12x^2-6x+2=0$ no tiene soluciones reales). La derivada segunda es siempre positiva y la curva es siempre cóncava hacia arriba, por tanto, no tiene puntos de inflexión.

El mínimo de $y''=12x^2-6x+2$ se encuentra en su vértice $x_0=-\dfrac{(-6)}{2\cdot 12}=\dfrac{1}{4}$.

Punto de tangencia $(x_0,y_0)=\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{205}{256}\right)$. Pendiente $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{5}{8}$. La ecuación es $y-\dfrac{205}{256}=-\dfrac{5}{8}(x-4)$

86. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=2x^3+12x^2+ax+b$

Determina *a* y *b* sabiendo que la recta tangente a la gráfica de *f* en su punto de inflexión es la recta $y=2x-3$.

Hallamos primero el punto de inflexión y para eso necesitamos calcular la derivada segunda: $f'(x)=6x^2+24x+a$ y $f''(x)=12x+24$. La derivada segunda se anula si $x=-2$, y como a su izquierda es negativa y a su derecha positiva, entonces, el punto $A(-2,f(-2))$ es el punto de inflexión.

La pendiente de la recta tangente $y=2x+3$ es 2 y coincide con el valor de $f'(-2)$. Así pues:

$f'(-2)=2\Rightarrow 6(-2)^2+24(-2)+a=2\Rightarrow a=26$

El punto de tangencia $A(-2,f(-2))$ pertenece también a la recta tangente. Por tanto:

$f(-2)=2\cdot(-2)+3=-1\Rightarrow 2\cdot(-2)^3+12\cdot(-2)^2+26\cdot(-2)+b=-1\Rightarrow b=19$. La respuesta es $a=26$ y $b=19$.

87. Calcula los valores del parámetro *a*, con $a \neq 0$, que hacen que las tangentes a la curva de ecuación:

$$y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 15^{12}$$

en los puntos de inflexión sean perpendiculares.

Primero se calculan sus puntos de inflexión: $y' = 4ax^3 + 6ax^2 - a$, $y'' = 12ax^2 + 12ax = 12ax(x+1)$.

La derivada segunda se anula si $x = 0$ ó si $x = -1$, que son las abscisas de sus puntos de inflexión.

La pendiente de la tangente en $x = 0$ es $y'(0) = -a$.

La pendiente de la tangente en $x = -1$ es $y'(-1) = -4a + 6a - a = a$.

Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1.

Imponiendo esta condición: $-aa = -1 \Rightarrow a = 1$ o $a = -1$.

Aplicaciones de la derivada en el campo de las ciencias

88. La segunda ley de Newton afirma que la fuerza total a la que se ve sometido un cuerpo es igual a la masa de este multiplicada por la aceleración que experimenta.

Por otro lado, la aceleración de un móvil es la derivada segunda de la posición que tiene ese móvil en función del tiempo.

Sabiendo que la posición de cierto móvil viene dada por:

$$x(t) = t^3 - 2t^2 - 5t + 6$$

Calcula la fuerza total a la que se encuentra sometido el móvil si su masa son 5 kg.

La velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo: $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 4t - 5$.

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo: $a(t) = v'(t) = 6t - 4$.

La fuerza total, respecto al tiempo, si la masa del móvil son 5 kg es $F(t) = 5a(t) = 5(6t - 4)$ N.

89. Un muelle tiene una oscilación definida por:

$$x(t) = 10\cos(3t + \pi)$$

en metros. Determina qué velocidad de oscilación y aceleración tendrá al cago de $\frac{\pi}{3}$ s.

La velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo: $v(t) = x'(t) = -30\text{sen}(3t + \pi)$.

Por tanto, $v\left(\frac{\pi}{3}\right) = -30\text{sen}\left(3 \cdot \frac{\pi}{3} + \pi\right) = -30\text{sen}(2\pi) = 0$ ms^{-1}.

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo: $a(t) = v'(t) = -90\cos(3t + \pi)$.

Por tanto, $a\left(\frac{\pi}{3}\right) = -90\cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3} + \pi\right) = -90\cos(2\pi) = -90$ ms^{-2}.

90. La ecuación de descarga de un condensador en un determinado circuito eléctrico es $Q = 100 \cdot 10^{-6} e^{-\frac{t}{1,5}}$.
Calcula la intensidad que recorrerá el circuito pasado 5 s tras cerrar el interruptor si se sabe que $I = \frac{dQ}{dt}$.

La intensidad es la derivada de la descarga respecto al tiempo: $I(t) = Q'(t) = -\frac{1}{1,5} \cdot 100 \cdot 10^{-6} e^{-\frac{t}{1,5}}$

Por tanto, $I(t) = -\frac{1}{1,5} \cdot 100 \cdot 10^{-6} e^{-\frac{5}{1,5}} \simeq -2,38 \cdot 10^{-6}$.

Síntesis

91. Sea la función:

$$f(x) = (x+1)e^{-x}$$

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Calcula, si existen, los extremos relativos.

Halla, si existen, los puntos de inflexión e intervalos de curvatura.

a) La función es continua y derivable porque es producto de funciones continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$: $D(f) = \mathbb{R}$.

Su derivada es $f'(x) = -xe^{-x}$, que se anula si $x = 0$. Así pues, la función crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$.

b) Tiene un máximo absoluto en el punto $O(0, 1)$.

c) La derivada segunda es $f''(x) = (x-1)e^{-x}$, que se anula si $x = 1$. Así pues, la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia arriba en $(1, +\infty)$. El punto $A(1, 2e^{-2})$ es un punto de inflexión porque la gráfica cambia de curvatura.

92. Para la función:

$$f(x)=\frac{x^4+3}{x}$$

a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de *f*.

c) Estudia su curvatura y sus posibles puntos de inflexión.

a) $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$, ya que $x=0$ anula el denominador. Así pues, no corta al eje *Y*. Tampoco corta al eje *X* ya que la función no se anula nunca porque el numerador es siempre positivo.

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^4+3}{x}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^4+3}{x}=+\infty$, así pues, la recta $x=0$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^4+3}{x}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^4+3}{x}=-\infty$. No tiene asíntotas horizontales.

Tampoco tiene asíntotas oblicuas ya que $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^4+3}{x^2}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x^4+3}{x^2}=+\infty$.

b) La derivada de la función es $f'(x)=\frac{3(x^4-1)}{x^2}$ y se anula para $x=-1$ y $x=1$.

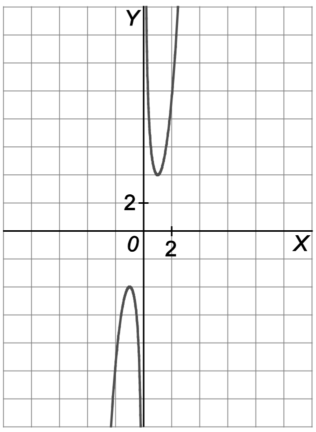
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
Signo de f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	No existe $f(0)$	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

La función crece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(-1,0)\cup(0,1)$.

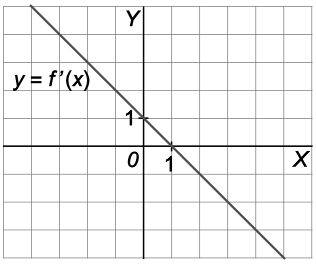
Tiene un máximo relativo en el punto $A(-1,f(-1))=A(-1,-4)$ y un mínimo relativo en el punto $B(1,f(1))=B(1,4)$.

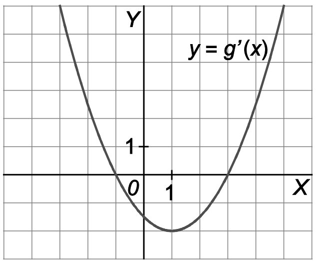
c) La derivada segunda es $f''(x)=\frac{6(x^4+1)}{x^3}$. Es negativa para valores negativos de x y positiva para valores positivos. Así pues, la función es cóncava hacia abajo en $(-\infty,0)$ y cóncava hacia arriba en $(0,+\infty)$.

La función es impar porque $f(-x)=-f(x)$. Su gráfica es la que se muestra.



93. Las gráficas que se muestran en las figuras representan la derivada de ciertas funciones $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente. A partir de ellas, deduce los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y $g(x)$, así como sus extremos relativos, su curvatura y sus puntos de inflexión.





a) La función crece si la derivada es positiva: $(-\infty,1)$. Decrece si la derivada es negativa: $(1,+\infty)$.

Tiene un máximo relativo en el punto $A(1,f(1))$ porque la derivada vale cero y f pasa de creciente a decreciente.

Las pendientes de las tangentes a f' son siempre negativas, así que la función es siempre cóncava hacia abajo.

Como la función no cambia de curvatura, no tiene puntos de inflexión.

b) La función crece si la derivada es positiva: $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$. Decrece si la derivada es negativa: $(-1,3)$.

Tiene un máximo relativo en el punto $A(-1,g(-1))$ porque la derivada vale cero y g pasa de creciente a decreciente.

Tiene un mínimo relativo en el punto $B(3,g(3))$ porque la derivada vale cero y g pasa de decreciente a creciente.

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty,1)$, ya que las pendientes de las tangentes a g' (es decir, la derivada segunda) son negativas y es cóncava hacia arriba en $(1,+\infty)$ puesto que las pendientes de las tangentes a g' (es decir, la derivada segunda) son positivas. El punto $C(1,g(1))$ es un punto de inflexión porque es un punto de cambio de curvatura.

94. Considera la función definida en $(0,+\infty)$ por:

$$f(x)=2x^3+x^2+\ln x$$

a) Encuentra un intervalo donde puedas asegurar que existe una solución de la ecuación $f(x)=0$.

Demuestra que la ecuación $f(x)=0$ tiene un única solución, *c*, en $(0,+\infty)$.

a) Como la función es continua en su dominio ($x>0$), bastará encontrar un intervalo en el que la función cambie de signo en sus extremos. El extremo inferior debe ser un número cercano a cero para estar seguros de que la función será negativa. Se prueba con 0,5: $f(0{,}5)\simeq -0{,}193$.

El extremo superior puede ser 1: $f(1)=3$. Así pues, aplicando el teorema de Bolzano a la función f en el intervalo cerrado $[0{,}5;1]$, se sabe que $f(c)=0$ para algún c del intervalo $(0{,}5;1)$.

b) La función es siempre creciente ya que su derivada $f'(x)=6x^2+2x+\dfrac{1}{x}$ es siempre positiva en para $x>0$. Por tanto, ya no puede existir otro c (distinto del anterior) con $f(c)=0$.

95. Sea $f(x)$ una función continua en $[0,3]$ y derivable en $(0,3)$. Si $f'(x) \le 2$ para todos los números del intervalo $[0,3]$ y $f(0) = -1$, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar $f(3)$? En general, si $f'(x) \le a$ en todo $\mathbb{R}$ y $f(0) = b$, dado un número positivo *c*, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar $f(c)$?

a) La función *f* es continua en el intervalo cerrado $[0,3]$ y derivable en el abierto $(0,3)$, por tanto, el teorema del valor medio nos asegura que existe un *c* de $(0,3)$ que cumple: $f'(c) = \dfrac{f(3) - f(0)}{3-0} = \dfrac{f(3)+1}{3}$

Como la derivada es $f'(x) \le 2$, entonces $f'(c) \le 2$: $f'(c) = \dfrac{f(3)+1}{3} \le 2 \Rightarrow f(3) \le 5$

b) En el caso general se tiene que $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(0)}{c-0} = \dfrac{f(c)-b}{c} \le a \Rightarrow f(c) \le ac + b$.

96. Dada la función

$$f(x) = (1000 - x)^2 + x^2$$

se pide:

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*.

b) Utiliza el apartado a) para decidir si 1000^2 es mayor o menor que $998^2 + 2^2$.

c) Generaliza lo que hayas descubierto en el apartado a) para la función $f(x) = (c-x)^n + x^n$ siendo *c* un número positivo y *n* un número entero positivo par.

a) La derivada de la función es $f'(x) = 4x - 2000$, que se anula para $x = 500$. La función es decreciente en $(-\infty, 500)$; es creciente en $(500, +\infty)$; y tiene un mínimo en el punto de abscisa $x = 500$.

b) Como la función es decreciente en $(-\infty, 500)$, entonces, $f(0) > f(2)$, y como $f(0) = 1000^2$ y $f(2) = 998^2 + 2^2$, se concluye que $1000^2 > 998^2 + 2^2$.

c) La derivada de la función $f(x) = (c-x)^n + x^n$ es $f'(x) = -n(c-x)^{n-1} + nx^{n-1}$.

Una solución de la ecuación $f'(x) = 0$ es $x = \dfrac{c}{2}$, que, corresponde a un mínimo absoluto pues

$f''(x) = n(n-1)(c-x)^{n-2} + n(n-1)x^{n-2} > 0$. Por otra parte, la gráfica de *f* es simétrica respecto de la recta $x = \dfrac{c}{2}$. Así pues, dados dos números *p* y *q* que sumen *c*, $p^n + q^n$ es mayor cuanto más disten *p* y *q*.

Por ejemplo $20^6 + 30^6 > 28^6 + 22^6$ pues la función $f(x) = (50-x)^6 + x^6$ alcanza un mínimo en $x = 25$ y es simétrica respecto de la recta $x = 25$, por lo que $f(30) > f(22)$.

97. Supón que *f* es una función para la que $f'(x) > 0$ para todo *x* y sea $g(x) = f(f(x))$. ¿Qué puedes decir acerca del crecimiento o decrecimiento de la función *g*?

La derivada de $g(x)$ se calcula con la regla de la cadena: $g'(x) = f'(f(x))f'(x)$ que será siempre positiva por ser producto de dos números positivos. Así pues, $g'(x) > 0$ para todo *x*, lo que nos asegura que *g* es siempre creciente.

98. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x) & \text{si } x<0 \\ x^2e^{-x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

se pide:

a) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Calcular el valor de a para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

c) Estudiar la derivabilidad de *f* y calcular f' donde sea posible.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right]=[\text{L'Hôpital}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right]=[\text{L'Hôpital}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a+\ln(1-x)\right)=a+\ln(+\infty)=+\infty$

b) Las funciones que intervienen en f son continuas en sus tramos. Falta obligarla a que sea continua en el punto de cambio, $x=0$. Estos tres valores han de ser iguales:

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(a+\ln(1-x)\right)=a$ $\qquad\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} x^2e^{-x}=0$ $\qquad f(0)=0^2\cdot e^{-0}=0$

Por tanto, $a=0$.

c) La derivada, salvo para $x = 0$, es: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{1-x} & \text{si } x<0\\ x(2-x)e^{-x} & \text{si } x>0\end{cases}$

Para que exista $f'(0)$, estos dos límites han de coincidir:

$$\lim_{x\to0^-} f'(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{1-x}=-1 \qquad \lim_{x\to0^+} f'(x)=\lim_{x\to0+} x(2-x)e^{-x}=0$$

Por tanto, la función no es derivable en $x=0$.

99. Demuestra que la ecuación:

$$x^{2009}+x^{1005}+x-1=0$$

tiene exactamente una solución real.

La función $f(x)=x^{2009}+x^{1005}+x-1$ es continua y creciente en todo $\mathbb{R}$ ya que su derivada es:

$f'(x)=2009x^{2008}+1005x^{1004}+1$ es siempre positiva.

Además $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, es decir, pasa de negativa a positiva y, por tanto, debe cortar al eje *X* alguna vez.

Como *f* es siempre creciente, solo podrá cortar una sola vez al eje *X*.

Es decir, existe un único *c* real con $f(c)=0\Rightarrow c^{2009}+c^{1005}+c-1=0$.

100. Sea f una función real de variable real, derivable, con derivada continua en todos los puntos y tal que $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f'(0)=3$, $f'(1)=4$.

a) Calcula $g'(0)$ sabiendo que $g(x)=f(x+f(x))$.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}$.

a) Se calcula primero la derivada de $g(x)$ aplicando la regla de la cadena:

$g'(x)=f'(x+f(x))\cdot(1+f'(x))$

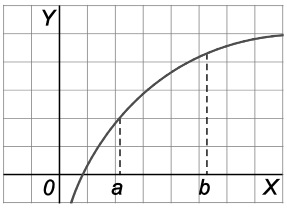
Por tanto, $g'(0)=f'(0+f(0))\cdot(1+f'(0))=f'(1)\cdot(1+3)=4\cdot 4=16$.

b) Como $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}$ da lugar a una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, podemos usar la regla de L´Hôpital para calcularlo: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4f(x)f'(x)-f'(x+1)}{e^x}=\dfrac{4f(0)f'(0)-f'(0+1)}{e^0}=\dfrac{4\cdot 1\cdot 3-4}{1}=8$

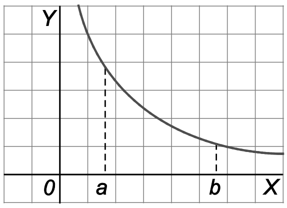
Cuestiones

101. Las cuatro gráficas que se muestran son las de las derivadas de otras tantas funciones. En cada caso razona si la función correspondiente alcanza un valor mayor para $x=a$ o par $x=b$.

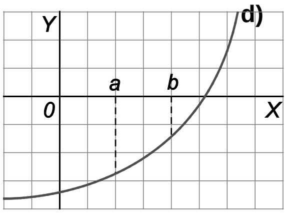
a)



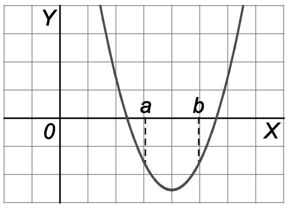
c)



b)



d)



a) La derivada es positiva en el intervalo $[a,b]$, por tanto, la función es creciente en este intervalo: $f(a)<f(b)$

b) La derivada es negativa en $[a,b]$, por tanto, la función es decreciente en este intervalo: $f(a)>f(b)$

c) La derivada es positiva en el intervalo $[a,b]$, por tanto, la función es creciente en este intervalo: $f(a)<f(b)$

d) La derivada es negativa en $[a,b]$, por tanto, la función es decreciente en este intervalo. Luego $f(a)>f(b)$

102. Comprueba que la función $f(x)=\begin{cases} x^2\text{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ es derivable en $x=0$. ¿Existe $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$?

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2\text{sen}\frac{1}{h}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h\,\text{sen}\dfrac{1}{h}=0$ pues $-1\le\left|\text{sen}\dfrac{1}{h}\right|\le 1$ y $\lim\limits_{h\to 0}h=0$. Así pues f es derivable en 0 y $f'(0)=0$.

$f'(x)=2x\text{sen}\dfrac{1}{x}+x^2\cos\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ si $x\neq 0$, es decir, $f'(x)=2x\text{sen}\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ y como $\lim\limits_{x\to 0}2x\text{sen}\dfrac{1}{x}=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ no existe, no existirá $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$.

103. ¿Bajo qué condiciones sobre *a*, *b*, *c* y *d* podemos asegurar $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ con $a\neq 0$ es estrictamente creciente o decreciente en $\mathbb{R}$?

En primer lugar, se observa que los límites en más infinito y en menos infinito no pueden coincidir nunca porque el grado del polinomio es 3. Como la derivada es un polinomio de segundo grado, la ecuación $f'(x)=0$ tendrá una, dos o ninguna solución (que nos darían los posibles extremos relativos).

Para que sea estrictamente creciente o decreciente no debe tener ni máximos ni mínimos relativos, es decir, la ecuación $f'(x)=0$ no puede tener dos soluciones. Si tuviera una única solución sería porque ahí tendría un punto de tangente horizontal que no es extremo relativo, es decir, sería un punto de inflexión.

La derivada es $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, que tendrá una única solución si su discriminante es cero: $(2b)^2-4\cdot 3ac=0 \Rightarrow 4b^2-12ac=0$. Y no tendrá solución si $4b^2-12ac<0$.

Así pues, resumiendo:

La función será creciente en todo $\mathbb{R}$ si $a>0$ y $4b^2-12ac\leq 0$

La función será decreciente en todo $\mathbb{R}$ si $a<0$ y $4b^2-12ac\leq 0$.

En el caso que falta, $4b^2-12ac>0$, la función tendría un máximo y un mínimo relativo y, por tanto, sería creciente en algunos tramos y decreciente en otros.

104. Aplicando el teorema del valor medio demuestra que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=0$$

Si $f(x)=\sqrt[3]{x}$, f es derivable en $(0,+\infty)$. Tomando x y $x+1$ en dicho intervalo y aplicando el teorema del valor medio se tiene $f(x+1)-f(x)=f'(c)\cdot 1$ con c en $(x,x+1)$.

Como $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, tenemos que $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}=\frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}$.

Por último, si $c>x$ y si $x\to+\infty$, c también lo hace y $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=\lim_{c\to+\infty}\frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}=0$.

105. Dada la función $f(x)=\frac{1}{x-2}$, prueba que en el intervalo $[1,4]$ no existe ningún número *c* tal que:

$$f'(c)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}$$

¿Contradice esto el teorema del valor medio? ¿Por qué?

La derivada de la función es $f'(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}$. Por otra parte $\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}$. Ahora hay que investigar si existe un $c\in(1,4)$ con $f'(c)=\frac{1}{2}$ para ello resolvamos la ecuación $\frac{-1}{(c-2)^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow -2=(c-2)^2$, que claramente no tiene solución. La conclusión es que no existe ningún número c con $f'(c)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}$.

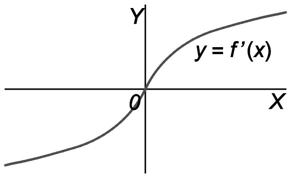
¿Qué ha ocurrido? La función $f(x)=\frac{1}{x-2}$ no es continua en el intervalo $[1,4]$, ya que en $x=2$ no está definida. Así pues, no se contradice el teorema del valor medio ya que este exige que la función sea continua en el intervalo en cuestión.

En cualquier otro intervalo que no contuviera a $x=2$ sí se cumpliría el teorema.

106. Si *f* es una función infinitamente derivable y para algún número *c* es $f'(c) = f''(c) = 0$ pero $f'''(c) > 0$, en el punto $(c, f(c))$, ¿es un máximo relativo, un mínimo relativo o punto de inflexión para *f*?

Si $f'''(c) > 0$, la función $y = f''(x)$ es estrictamente creciente en *c* por lo que en un cierto intervalo $(c - r, c + r)$, con $r > 0$, $f''(x) > f''(c)$ si $x > c$ y $f''(x) < f''(c)$ si $x < c$, es decir, en ese intervalo, $f''(x) > 0$ a la derecha de *c* y $f''(x) < 0$ a la izquierda de *c* con lo que *f* cambia de posición respecto de la tangente en *c*, es decir $(c, f(c))$ es un punto de inflexión para *f*.

107. La gráfica de la derivada de *f* es la de la figura.



Si la ecuación $f(x) = 0$ tiene dos soluciones, ¿qué puedes decir sobre el signo de ellas?

Si ambas soluciones tuvieran igual signo, aplicando el teorema de Rolle, habría un número entre ellas donde se anularía la derivada. Pero como $f'(x)$ no se anula para ningún valor positivo ni negativo de *x*, sigue que ambas soluciones no pueden tener igual signo.

108. ¿Es derivable en *x* = 0 la siguiente función?

$$f(x) = \begin{cases} x^2(1 - \ln x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Como la función sólo está definida en $[0, +\infty)$, estudiemos $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, es decir:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2(1 - \ln x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \ln x}{\frac{1}{x}}$$

Este límite que presenta una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ está en las hipótesis del teorema de L´Hôpital. Por tanto:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Así que *f* es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$.

109. Justifica que ni la primera ni la segunda derivada de $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } 0<x\le 1\\ -2x^2+3x & \text{si } x>1\end{cases}$ se anulan nunca.

Primero debemos asegurarnos que la función es continua, estudiando con detalle qué ocurre en $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(-2x^2+3x\right)=1 \qquad f(1)=1$$

Por tanto, f es continua en $x = 1$ y en todo su dominio. (Observa que $\frac{1}{x}$ no da problemas porque $x = 0$ no pertenece a su dominio de definición).

La función derivada, salvo en $x = 1$, es $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{x^2} & \text{si } 0<x<1\\ -4x+3 & \text{si } x>1\end{cases}$

¿Qué ocurre con la derivada en $x = 1$? $\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{x^2}=-1$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}(-4x+3)=-1$

Así pues, $f'(1)=-1$, y la derivada de f es $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{x^2} & \text{si } 0<x\le 1\\ -4x+3 & \text{si } x>1\end{cases}$

Dicha derivada no se anula en el primer tramo y en el segundo se anularía en $x=\frac{3}{4}$ que no pertenece a su dominio de definición. Es decir: la derivada de *f* no se anula nunca.

La segunda derivada de *f*, salvo en $x = 1$, es $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3} & \text{si } 0<x<1\\ -4 & \text{si } x>1\end{cases}$

¿Qué ocurre con la segunda derivada en $x = 1$? $\lim_{x\to 1^-} f''(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{x^3}=2$, $\lim_{x\to 1^+} f''(x)=\lim_{x\to 1^+}(-4)=-4$

Así pues, $f''(1)$ no existe.

Dicha derivada no se anula en el primer tramo ni tampoco en el segundo. Es decir: la segunda derivada de *f* no se anula nunca.

110. ¿Presenta algún punto de inflexión la gráfica de la función de la cuestión anterior?

Precipitadamente podríamos responder que no hay puntos de inflexión porque la derivada segunda no se anula nunca, como acabamos de estudiar en la actividad precedente. Pero nos estamos olvidando del punto de abscisa $x=1$.

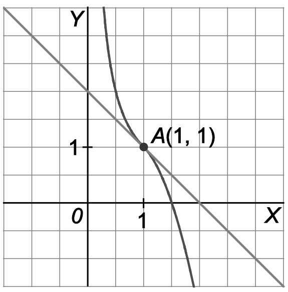
En el punto $x = 1$, no podemos usar la segunda derivada ya que, sencillamente, $f''(1)$ no existe. Tenemos que recurrir a la definición de punto de inflexión: punto cuya tangente a la gráfica cruza a dicha gráfica, dejándola por encima y por debajo (o por debajo y por encima) según nos situemos a izquierda o derecha de dicho punto.

La tangente a $A(1,1)$ es la recta $y-1=-1(x-1)$, es decir, $y=-x+2$:

Si $0<x<1$, $f(x)-(-x+2)=\frac{1}{x}+x-2=\frac{1+x^2-2x}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}>0$: la curva está por encima de la tangente.

Si $x > 1$, $f(x)-(-x+2)=-2x^2+3x+x-2=-2x^2+4x-2=-2\left(x^2-2x+1\right)=-2(x-1)^2<0$: la curva está por debajo de la tangente.

La gráfica lo aclara todo.



111. Si $h > 0$, ¿qué es mayor: $\sqrt{1+h}$ o $1+\frac{1}{2}h$?

La función $f(x)=\sqrt{1+x}$ es derivable en $(-1,+\infty)$, así pues verifica las hipótesis del teorema del valor medio en $[0,h]$ si $h > 0$. Entonces $f(h)-f(0)=h\cdot f'(c)$ donde $c\in(0,h)$.

$f(h)-f(0)=\sqrt{1+h}-1$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$, por lo que $f'(c)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+c}}<\dfrac{1}{2}$

Entonces $f(h)-f(0)<h\frac{1}{2}$, es decir, $\sqrt{1+h}-1<\frac{1}{2}h$, o, lo que lo mismo $\sqrt{1+h}<\frac{1}{2}h+1$ si $h > 0$.

112. Si $x\ge 0$, razona, usando la derivada, qué es mayor: e^x o x^2.

Veamos que $f(x)=e^x-x^2$ es creciente en $[0,+\infty)$ y como $f(0)=1$, resultará que si $x\ge 0$, $f(x)\ge f(0)$, es decir, $e^x-x^2\ge 1$ por lo que $e^x>x^2$. Para ver que f es creciente en $[0,+\infty)$, estudiemos su derivada $f'(x)=e^x-2x$.

$f'(0)>0$ y si $x > 0$, $e^x>ex$ (Basta observar que la recta $y=ex$ es tangente en $P(1,e)$ a la curva $y=e^x$). Así pues $e^x\ge ex>2x$, con lo que $f'(x)=e^x-2x>0$ en $[0,+\infty)$ por lo que $f(x)=e^x-x^2$ es creciente en dicho intervalo.

Problemas

113. El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Demuestra que si partimos un diamante en dos trozos, la depreciación es máxima si lo partimos por la mitad.

Se supone que el peso es 1 y p la constante de proporcionalidad del precio – cuadrado del peso.

Se nombran las variables: x es el peso de uno de los trozos e y el del otro.

Se relacionan las variables: $x+y=1$, por tanto $y=1-x$.

La función que se quiere maximizar es la depreciación del diamante al cortarlo:

$$D(x)=p1^2-\left(px^2+p(1-x)^2\right)=p-2px^2+2px-p=-2px^2+2px$$

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x. Evidentemente, $0\le x\le 1$, es decir, x se mueve en el intervalo cerrado $[0,1]$.

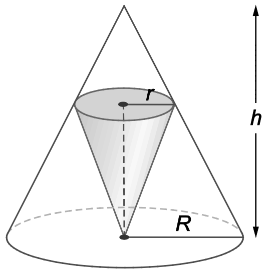
Se busca el máximo de $D(x)=-2px^2+2px$ en $[0,1]$. Su derivada, $D'(x)=-4px+2p$, se anula si $x=\frac{1}{2}$.

Se compara:

$D(0)=0$ $\qquad$ $D(1)=0$ $\qquad$ $D\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{p}{2}$

La depreciación es máxima si el diamante se parte en dos trozos de igual peso.

114. En un cono de radio *R* y altura *h* inscribimos un cono invertido con el vértice en el centro de la base. Calcula las dimensiones del cono pequeño para que su volumen sea máximo



Se relacionan las variables: por semejanza de triángulos del cono y del cono invertido se observa que:

$$\frac{R}{h}=\frac{r}{h-h'}\Rightarrow rh=Rh-Rh'\Rightarrow h'=\frac{h(R-r)}{R}$$

La función que se quiere minimizar es el volumen del cono pequeño:

$V=\dfrac{\pi r^2h'}{3}$, es decir, $V(r)=\dfrac{\pi}{3}r^2\dfrac{h(R-r)}{R}=\dfrac{\pi h}{3R}(Rr^2-r^3)$

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable *r*. Evidentemente $0<r<R$, es decir, *r* se mueve en el intervalo abierto $(0,R)$.

Se busca el mínimo de $V(r)=\dfrac{\pi h}{3R}(Rr^2-r^3)$ en $(0,R)$.

$V'(r)=\dfrac{\pi h}{3R}(2Rr-3r^2)=0\Leftrightarrow 2Rr-3r^2=0\Rightarrow r(2R-3r)=0$, es decir, si $r=\dfrac{2}{3}R$ o si $r=0$ (no pertenece al dominio).

Comparamos (habrá que calcular límites ya que el intervalo es abierto):

$V\left(\dfrac{2}{3}R\right)=\dfrac{4}{81}\pi R^2h$ $\qquad \lim\limits_{r\to 0}V(r)=0$ $\qquad \lim\limits_{r\to R}V(r)=0$

Las dimensiones del cono inscrito de volumen máximo son $r=\dfrac{2}{3}R$ y $h'=\dfrac{h(R-r)}{R}=\dfrac{h\left(R-\dfrac{2}{3}R\right)}{R}=\dfrac{1}{3}h$

Y dicho volumen máximo son $\dfrac{4}{27}$ del volumen del cono grande.

115. Dados los puntos $A(0,3)$ y $B(4,5)$, señalamos un punto *M* en el eje *X* tal que sea mínima la distancia $S=AM+MB$. Obtén el punto *M*.

El punto buscado es $M(x,0)$.

$$S=AM+MB=\sqrt{x^2+3^2}+\sqrt{(4-x)^2+5^2}=\sqrt{x^2+3^2}+\sqrt{x^2-8x+41}.$$

$$S'=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+\frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+41}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-\frac{4-x}{\sqrt{x^2-8x+41}}$$

$$S'=0\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{4-x}{\sqrt{x^2-8x+41}}\Rightarrow x\sqrt{x^2-8x+41}=(4-x)\sqrt{x^2+9}\Rightarrow x^2(x^2-8x+41)=(4-x)^2(x^2+9)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2+9x+18=0\Rightarrow x=\frac{-9\pm 15}{4}=\begin{cases}-6\\ \dfrac{3}{2}\end{cases}$$

Solo verifica la ecuación la solución $x=\dfrac{3}{2}$. Como $0\le x\le 4$, y $f(0)=3+\sqrt{41}\simeq 9{,}4$;

$f(4)=5+\sqrt{18}\simeq 9{,}2$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{45}{4}}+\sqrt{\dfrac{125}{4}}\simeq 8{,}9$; el mínimo se alcanza para $M\left(\dfrac{3}{2},0\right)$.

116. En un depósito que contenía 5 000 000 L de agua se ha vertido accidentalmente una sustancia tóxica contaminando el agua. Si el agua se va renovando por agua limpia a razón de 2500 L/h, ¿cuánto tiempo tardará en reducirse el nivel de contaminación un 50 %?

Sea $S(t)$ la función que da los litros de sustancia tóxica que hay en el agua al cabo de *t* horas desde que se realizó el vertido.

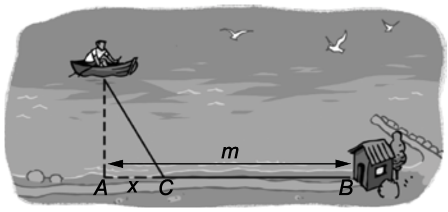
$S'(t) =$ razón de entrada de sustancia tóxica − razón de salida de sustancia tóxica. Como el vertido fue puntual, todo lo que entra es agua limpia y la razón de entrada es 0.

La razón de salida es $\frac{S(t)}{5\,000\,000}2500$ L/h, pues salen los mismos litros que entran y $\frac{S(t)}{5\,000\,000}$ es la cantidad de sustancia tóxica por litro.

Así pues, $S'(t) = \frac{-S(t)}{2000}$, por tanto, $\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{1}{2000}$, luego, $\ln S(t) = -\frac{1}{2000}t + C$, por lo que $S(t) = ke^{-\frac{t}{2000}}$.

Si $t = 0$, $S(t) = k$ y se pregunta cuándo $S(t)$ es $\frac{k}{2}$, se tiene que $\frac{k}{2} = ke^{-\frac{t}{2000}}$, luego $t = 2000 \cdot \ln 2$ horas, aproximadamente 1400 horas, es decir, 58 días.

117. Un hombre está en un bote en un gran lago con forma rectangular a 1 km del punto *A* de la orilla más próxima. Quiere llegar al punto *B* de la orilla situado a m km. Si en su bote va a *r* km/h y a pie a *v* km/h, ¿en qué punto *C* de la orilla debe dejar el bote para llegar a *B* lo más rápido posible en cada uno de los siguientes casos?



a) Si $m = 5$ km, $r = 15$ km/h y $v = 13$ km/h.

b) Si $m = 2$ km, $r = 12$ km/h y $v = 13$ km/h.

c) Si $m = 5$ km, $r = 12$ km/h y $v = 13$ km/h.

Primero se resuelve el caso general. Se nombra la variable: x es la distancia AC.

Hay que considerar que la distancia PC que cubre a remo es igual a $PC = \sqrt{1+x^2}$.

La función que se quiere minimizar es el tiempo empleado por el hombre para recorrer PC km remando a una velocidad de r km/h y CB km a pie a una velocidad de v km/h.

El tiempo empleado en realizar su trayecto es la función $t(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{r} + \dfrac{m-x}{v} = \dfrac{v\sqrt{1+x^2} + r(m-x)}{rv}$.

Se busca el intervalo en el que se mueve la variable x: $[0,m]$.

Se busca el mínimo de $t(x) = \dfrac{v\sqrt{1+x^2} + r(m-x)}{rv}$ en $[0,m]$.

$$t'(x) = \frac{v\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - r}{rv} = \frac{vx - r\sqrt{1+x^2}}{rv\sqrt{1+x^2}} = 0 \Leftrightarrow vx - r\sqrt{1+x^2} = 0 \Rightarrow v^2x^2 = r^2 + r^2x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{r^2}{v^2 - r^2}}$$

Ahora se estudia cada caso:

a) Si $m = 5$, $r = 15$ y $v = 13$ $\Rightarrow x = \dfrac{r}{\sqrt{v^2 - r^2}} = \dfrac{15}{\sqrt{13^2 - 15^2}}$, por tanto, $t'(x)$ nunca se anula y $t(x)$ alcanzará el mínimo en un extremo del intervalo $[0,5]$: como $t(5) < t(0)$, el mínimo se alcanza en $x = 5$, debe remar todo el tiempo.

b) Si $m = 2$, $r = 12$ y $v = 13$ $\Rightarrow x = \dfrac{r}{\sqrt{v^2 - r^2}} = \dfrac{12}{\sqrt{13^2 - 12^2}} = 2{,}4$. Como 2,4 no pertenece al intervalo $[0,2]$ habrá que mirar en los extremos: $t(2) < t(0)$, el mínimo se alcanza en $x = 2$, debe remar todo el rato.

c) Si $m = 5$, $r = 12$ y $v = 13$ $\Rightarrow x = \dfrac{r}{\sqrt{v^2 - r^2}} = \dfrac{12}{\sqrt{13^2 - 12^2}} = 2{,}4$. Como $t(2{,}4) < t(5) < t(0)$, debe dejar el bote a 2,4 km de *A*.

Para profundizar

118. Si a es un número positivo, calcula el mínimo de $\dfrac{a+x}{\sqrt{ax}}$ con $x > 0$. A partir del resultado obtenido, demuestra que la media aritmética de dos números positivos es siempre mayor o igual que la media geométrica.

Primero recuerda que la media geométrica de dos números es la raíz cuadrada de su producto.

Se considera la función $f(x)=\dfrac{a+x}{\sqrt{ax}}$ con $x > 0$.

Su derivada, después de simplificarla, es $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\dfrac{x-a}{x\sqrt{x}}$, que se anula si $x = a$.

Como para valores x menores que a, la función decrece (la derivada es negativa) y para valores x mayores que a, la función crece (la derivada es positiva), entonces, en $x = a$ está su mínimo absoluto.

Así pues: $f(a)\le f(x)\Rightarrow \dfrac{a+a}{\sqrt{aa}}\le\dfrac{a+x}{\sqrt{ax}}\Rightarrow\dfrac{2a}{a}\le\dfrac{a+x}{\sqrt{ax}}\Rightarrow 2\le\dfrac{a+x}{\sqrt{ax}}\Rightarrow\sqrt{ax}\le\dfrac{a+x}{2}$ para todo $x > 0$.

119. Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases} x^2-x+k & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{sen(x-1)}{x-1} & \text{si } x>1\end{cases}$

a) Halla el valor de k para que f sea continua en $\mathbb{R}$.

b) ¿Verifica f las hipótesis del teorema del valor medio en $[0, \pi+1]$.

c) ¿Existe algún número c para el que $f'(c)$ coincida con la pendiente de la recta que une los puntos de la curva de abscisas 0 y $\pi+1$?

a) Se impone la continuidad en $x = 1$, que es el único valor en el que puede haber conflictos:

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(x^2-x+k\right)=k,\ \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\text{sen}(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\cos(x-1)}{1}=1,\ f(1)=k.$$

Para que f sea continua en $x = 1$ debe ser $k = 1$. Por tanto, si $k = 1$ la función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Ya se ha visto que $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1 & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{\text{sen}(x-1)}{x-1} & \text{si } x>1\end{cases}$ es continua en $[0, \pi+1]$.

Se ve ahora si es derivable en el abierto $(0, \pi+1)$.

La derivada, salvo para $x = 1$, es: $f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si } x<1\\ \dfrac{(x-1)\cos(x-1)-sen\,(x-1)}{(x-1)^2} & \text{si } x>1\end{cases}$'

$$\lim_{x\to1^-} f'(x)=\lim_{x\to1^-}(2x-1)=1$$

$$\lim_{x\to1^+} f'(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)\cos(x-1)-\text{sen}(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1^+}\frac{\cos(x-1)+(x-1)(-\text{sen}(x-1))-\cos(x-1)}{2(x-1)}=$$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-\text{sen}(x-1)}{2}=0$. Así pues, $\lim\limits_{x\to1^-} f'(x)\ne\lim\limits_{x\to1^+} f'(x)$ y, por tanto, f no es derivable en $x = 1$ y no se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio.

c) La recta que pasa por los puntos $A(0,1)$ y $B(\pi+1,0)$ tiene pendiente $m=-\dfrac{1}{\pi+1}$.

Si $x < 1$, $f'(x)=2x-1=-\dfrac{1}{\pi+1}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2(\pi+1)}$, que es menor que 1. Por tanto, $c=\dfrac{\pi}{2(\pi+1)}$.

120. Sea *f* una función que admite derivada segunda en todo $\mathbb{R}$ y tal que las rectas $y = ax + b$ e $y = cx + d$ con a, b c y d no nulos, son tangentes a la gráfica en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = -1$ respectivamente.

Justifica si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si *f* es par, entonces $a = -c$.

b) Si $a = c$, entonces *f* es impar.

c) Si *f* es par, entonces $b = d$.

d) Si $b = d$, entonces $f(1) = f(-1)$.

e) Si $ac < 0$, entonces existe x_0 en $[-1,1]$ con $f'(x_0) = 0$.

Como la recta $y = ax + b$ es la tangente en $x = 1$, se tiene que $f(1) = a + b$.

Como la recta $y = cx + d$ es la tangente en $x = -1$, se tiene que $f(-1) = -c + d$.

a) Si *f* es par, se cumple que $f(1) = f(-1)$, es decir $a + b = -c + d$.

No necesariamente se cumple la igualdad $a = -c$.

b) Si $a = c$, entonces $f(-1) = -c + d = -a + d$, y para que fuese impar, este valor debería coincidir con $-f(1) = -a - b$.

c) Si *f* es par, ya se ha visto que $a + b = -c + d$. De aquí no puede deducirse que *b* y *d* sean iguales.

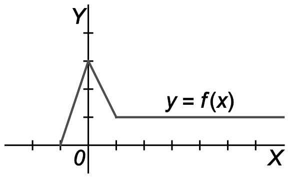
d) Si $b = d$, entonces $f(-1) = -c + d = -c + b$, que no coincide necesariamente con $f(1) = a + b$.

e) Si $ac < 0$, significa que las pendientes de las tangentes son de distinto signo en $x = -1$ y en $x = 1$. Como la función es derivable dos veces, se sabe por el teorema de Bolzano, que existe x_0 en $[-1,1]$ con $f'(x_0) = 0$.

Autoevaluación

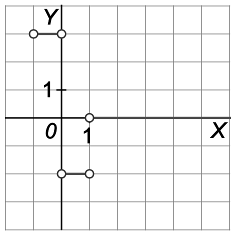
Comprueba qué has aprendido

1. Dibuja la gráfica de $y = f'(x)$ sabiendo que la gráfica de $y = f(x)$ es la de la figura.



La función que nos muestran, $f(x)$: $f:[-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 3x+3 & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ -2x+3 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Así que $f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -1 < x < 0 \\ -2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, cuya gráfica es:



2. ¿Hay alguna función *f*, derivable en $[0,2]$ tal que $0 < f'(x) < 2$ y $f(0) = 0$ y $f(2) = 5$?

Toda función derivable en $[0,2]$ verifica, aplicando el teorema del valor medio que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$ siendo *c* número de $(0,2)$. En el caso nuestro $f(2) - f(0) = 5$ y como $f'(x) < 2$ en $(0,2)$, no es posible que $5 = 2f'(c)$. Así pues no hay ninguna función con las condiciones pedidas.

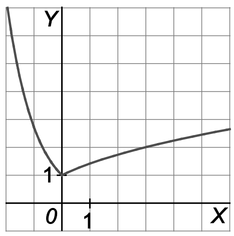
3. Encuentra todos los máximos y mínimos de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

f es continua en $\mathbb{R}$ pues $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1 = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ y en los demás puntos es obviamente continua.

$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ con lo que *f* no es derivable en $x = 0$ pues es continua y $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = -1$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \dfrac{1}{2}$.

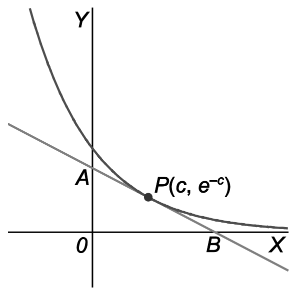
Pero la función no tiene máximos pero si presenta un mínimo en $x = 0$.



4. Calcula el perímetro del triángulo de mayor área que puede formarse en el primer cuadrante, con el eje *X*, el eje *Y* y una tangente a la gráfica de $y = e^{-x}$.

La tangente en $P\left(c, e^{-c}\right)$ es la recta $y - e^{-c} = -e^{-c}(x - c)$ que corta a los ejes en los puntos $A\left(0, e^{-c}(c+1)\right)$ y $B(c+1, 0)$. Así que el área del triángulo *OAB* es $f(c) = \frac{1}{2}(c+1)^2 e^{-c}$.

Obsérvese que si $c = -1$, la tangente sería la recta $y - e = -e(x+1)$, es decir, $y = -ex$ por lo que si $c < -1$, la tangente en $P\left(c, e^{-c}\right)$ cortaría al eje de abscisas en un punto de abscisa negativa.



Así pues para que el triángulo en cuestión esté en el primer cuadrante, c debe verificar $-1 < c < \infty$.

Encontremos, pues, el máximo de $f(c) = \frac{1}{2}(c+1)^2 e^{-c}$ en $(-1, +\infty)$.

$$f'(c) = \frac{1}{2}\left[2(c+1)e^{-c} - (c+1)^2 e^{-c}\right] = \frac{1}{2}(c+1)e^{-c}[2 - c - 1] = 0$$

Si $c = -1$, $c = 1$, $\lim_{c \to -1} f(c) = 0$, así que el máximo del área es $f(1)$ y el perímetro de $OA + OB + AB$ es $2e^{-1} + 2 + \sqrt{4e^{-2} + 4} = 2 \cdot \left(e^{-1} + 1 + \sqrt{e^{-2} + 1}\right)$.

5. Determina si tiene algún punto de inflexión la gráfica de:

$$f(x) = 3e^x\left(x^2 - 4x + 5\right)$$

Veamos si $f''(x)$ se anula alguna vez.

$$f'(x) = 3e^x\left(x^2 - 4x + 5\right) + 3e^x(2x - 4) = 3e^x\left(x^2 - 2x + 1\right) = 3e^x(x-1)^2$$

$$f''(x) = 3e^x(x-1)^2 + 3e^x 2(x-1) = 3e^x(x-1)(x+1)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 3e^x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = -1$$

Si $x < -1$, $f''(x) > 0$. Si $-1 < x < 1$, $f''(x) < 0$. Si $x > 1$, $f''(x) > 0$.

Por tanto, en $A(-1, f(-1))$ hay punto de inflexión y en $B(1, f(1))$ también.

6. Estudia la concavidad de la función:

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 2x + 3$$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$ porque es polinómica. Su primera derivada es $f'(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 2$.

Su segunda derivada es $f''(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ y se anula si $x = -2$ y si $x = 3$.

Estudiando el signo de esta segunda derivada en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ y $(3, +\infty)$, concluimos:

La función es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$. La función es cóncava hacia abajo en $(-2, 3)$.

Tiene dos puntos de inflexión: $A(-2, f(-2))$ y $B(3, f(3))$.

7. Justifica que, si *a* y *b* son números positivos, la ecuación $x^3 + ax^2 = b$ sólo tiene una solución positiva.

Consideremos el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 - b$. Nos piden justificar que $P(x)$ sólo tiene una raíz positiva.

$P(0) = -b < 0$ y $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, así que $P(x)$ tiene al menos una raíz positiva, por el teorema de Bolzano.

Por otra parte, $P'(x) = 3x^2 + 2ax > 0$ si $x > 0$. Así pues $P(x)$ es creciente si $x > 0$ y, por tanto, $P(x)$ solo tiene una raíz positiva.

8. Dada la función $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 2}$ comprueba si se puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[-2,0]$ y en caso afirmativo, halla el valor de $c \in [-2,0]$ al que se refiere el teorema.

La función es continua en $[-2,0]$ y derivable en $(-2,0)$. Nótese que $-x^2 - x + 2 = -(x+2)(x-1)$ no es negativo en $(-2,1)$.

El teorema del valor medio nos asegura que existe un número c tal que $f'(c) = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \dfrac{\sqrt{2} - 0}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Por otra parte, $f'(x) = \dfrac{-2x - 1}{2\sqrt{-x^2 - x + 2}}$ y $f'(c) = \dfrac{-2c - 1}{2\sqrt{-c^2 - c + 2}}$.

Ya se puede calcular c:

$$\frac{-2c - 1}{2\sqrt{-c^2 - c + 2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (-2c - 1)^2 = \left(\sqrt{2}\sqrt{-c^2 - c + 2}\right)^2 \Rightarrow 4c^2 + 1 + 4c = -2c^2 - 2c + 4 \Rightarrow 6c^2 + 6c - 3 = 0$$

Cuya solución válida es $c = \dfrac{-1 - \sqrt{3}}{2} \simeq -1{,}37 \in (-2,0)$.

9. Como sabes, $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$ y $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$. Pero, ¿puedes aplicar la regla de L'Hôpital al cálculo de $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$? Calcula dicho límite.

Obviamente $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$ presenta una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ pero si estudiamos el límite del cociente de las derivadas tendríamos $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ que no existe pues existe el límite del denominador (y no es cero) pero no existe el límite del numerador pues $\lim_{x\to 0} 2x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$ pero $\lim_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$ no existe.

Así pues no se puede aplicar el teorema de L'Hôpital al cálculo de dicho límite pero poniendo $\dfrac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{x \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$ y observando que $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$ y $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, el límite pedido es $\dfrac{0}{1} = 0$.

10. Razona si se puede aplicar el teorema del valor medio a la función:

$$f(x)=|\cos x| \text{ en } [-\pi,\pi]$$

$f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ con $f(x)=|\cos x|$ la podemos escribir como:

$$f(x)=\begin{cases}-\cos x & \text{si } -\pi\le x<-\frac{\pi}{2}\\ \cos x & \text{si } -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ -\cos x & \text{si } \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}.$$

f es obviamente continua en $[-\pi, \pi]$, por serlo $y = \cos x$ e $y = |x|$ pero no es derivable ni en $-\frac{\pi}{2}$ ni en $\frac{\pi}{2}$ pues

$$f'(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x & \text{si } -\pi\le x<-\frac{\pi}{2}\\ -\operatorname{sen} x & \text{si } -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ \operatorname{sen} x & \text{si } \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases} \text{ por lo que } \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} f'(x)=-1 \text{ y } \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f'(x)=1.$$

Análogamente, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f'(x)=-1$ y $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f'(x)=1$. Luego, no se puede aplicar.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Sean *f* y *g* funciones derivables tales que $f'(x)=g'(x)$ para todo *x* real. Indica qué condición de las siguientes debemos añadir para concluir que $f(x)=g(x)$ para todo *x* real.

A. $f''(x)=g''(x)$ para todo *x* real.

B. $f(0)=g(0)$.

C. *f* y *g* son funciones continuas.

D. No hace falta ninguna condición adicional.

La opción correcta es B. Al ser $f'(x)=g'(x)$, $f(x)=g(x)+c$, por lo que si $f(0)=g(0)$,entonces $c=0$ y $f(x)=g(x)$.

2. Una recta que pasa por el punto $P(-1,0)$ es tangente a la curva $y = x - x^3$ en otro punto *Q* distinto de *P*. La suma de las coordenadas de *Q* es:

A. 1 **B.** $\frac{7}{8}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{9}{8}$

El punto *Q* tendrá de coordenadas $(a, a-a^3)$ con $a\ne-1$. Como la recta en cuestión pasa por *P* y *Q*, su pendiente es $\frac{a-a^3}{a+1}$ y, al ser tangente en *Q*, dicha pendiente es el valor de la derivada en *a*, es decir, $1 - 3a^2$.

Así pues, $\frac{a-a^3}{a+1}=1-3a^2$, de donde $\frac{a(1-a^2)}{a+1}=1-3a^2$, $2a^2+a-1=0$ y $a=\frac{1}{2}$, $a = -1$, de donde *Q* es el punto de abscisa $\frac{1}{2}$ y ordenada $\frac{3}{8}$, por lo que la suma de sus coordenadas es $\frac{7}{8}$ y la respuesta es B.

3. **Sea la función definida en $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{e^x}$**

A. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

B. f no es derivable en $x = 0$.

C. f tiene un máximo absoluto en $\mathbb{R}$.

D. f tiene un punto de inflexión para $x < 0$.

$f(x)$ es una función continua, con asíntota horizontal $y = 0$ pues $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, que pasa por el origen y su derivada $f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1 - x}{e^x}$ se anula sólo en $x = 1$, lo que nos lleva a afirmar que la única respuesta correcta es C.

Además $f''(x) = \frac{x - 2}{e^x} < 0 \ \forall\ x < 0$, luego D es falsa.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Se tiene la función $f(x) = x - \frac{1}{2}\text{sen}\, x$.**

A. f está acotada inferiormente en $\mathbb{R}$.

B. f está acotada superiormente en $\mathbb{R}$.

C. f tiene al menos un cero en $\mathbb{R}$.

D. f tiene un único cero en $\mathbb{R}$.

Las afirmaciones A y B son falsas pues $\lim_{x \to +\infty}\left(x - \frac{1}{2}\text{sen}\, x\right) = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty}\left(x - \frac{1}{2}\text{sen}\, x\right) = -\infty$

Al tratarse de una función continua, las observaciones anteriores sobre los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ nos llevan a afirmar que C es verdadera y como la derivada no se anula nunca, sigue que D es también verdadera.

5. **La función definida sobre $\mathbb{R}$, $f(x) = xe^{2x} - 1$ satisface:**

A. Para todo x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)e^{2x}$

B. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

C. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

D. f es creciente en $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = (1 + 2x)e^{2x}$, por lo que A es falsa.

Como $f(x) = xe^{2x} - 1$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y, por tanto, B es verdadera.

Por otra parte, $\lim_{x \to -\infty}\left(xe^{2x} - 1\right) = \lim_{x \to -\infty} xe^{2x} - 1 = -1$ y C es falsa.

Si $x > -\frac{1}{2}$, $f'(x) > 0$, por lo que D es verdadera.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde *a*, *b* y *c* son números reales.

1. La gráfica de *f* corta 3 veces al eje horizontal.

2. $a^2 > 3b$.

A. 1 $\Leftrightarrow$ 2

B. 1 $\Rightarrow$ 2 pero 2 $\not\Rightarrow$ 1

C. 2 $\Rightarrow$ 1 pero 1 $\not\Rightarrow$ 2.

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

La derivada de *f* es $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Si se verifica 1 su derivada se anula dos veces, por lo que el discriminante de la ecuación de 2.º grado $f'(x) = 0$, es decir $4a^2 - 12b$ deberá ser positivo, así que $a^2 > 3b$ y se verifica 2, por lo que 1 $\Rightarrow$ 2.

Pero 2 $\not\Rightarrow$ 1, pues 2 quiere decir que la derivada se anula 2 veces, pero eso no implica que la cúbica corte 3 veces al eje *X*, como indica, por ejemplo la función $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1000$. Así que la respuesta es B.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Para calcular la diferencia entre el máximo y el mínimo de $f(x) = ax^2 + bx + c$ en el intervalo $[0,k]$ se tienen los siguientes datos:

1. El valor de *a*

2. El valor de *b*

3. El valor de *c*

4. El valor de *k*

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse el dato 4.

Para hallar la diferencia entre el máximo y el mínimo de $f(x)$ $[0,k]$ es necesario encontrar $f(x_0) - f(x_1)$ siendo x_0 la abscisa del máximo y x_1 la abscisa del mínimo. Así pues, habrá que hallar $ax_0^2 + bx_0 + c - ax_1^2 - bx_1 - c$, es decir, $a\left(x_0^2 - x_1^2\right) + b(x_0 - x_1)$. Para hacer ese cálculo no tenemos que conocer el valor de *c* y como para hallar x_0 y x_1 que son, o valores que anulan la derivada, es decir, $\frac{-b}{2a}$ ó los extremos, 0 y *k*, del intervalo, tampoco influye el valor de *c*, tenemos que puede eliminarse el dato 3 y la respuesta es C.

4 Representación de funciones

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Indica los puntos de discontinuidad, singulares y críticos para las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+5}{2}$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{x^3+x^2+4}$ **c)** $f(x)=x+\sqrt{x+\dfrac{1}{2}}$ **d)** $f(x)=|x+1|+|x-3|$

a) $D(f)=\mathbb{R}$. No hay puntos de discontinuidad.

$f'(x)=\dfrac{3x^2-6x}{2}=0 \Rightarrow x=0,\ x=2$ son los puntos singulares y críticos.

b) $x^3+x^2+4=(x+2)(x^2-x+2)=0 \Rightarrow x=-2$ es un punto de discontinuidad.

$f'(x)=\dfrac{-x(3x+2)}{(x^3+x^2+4)^2}=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=-\dfrac{2}{3}$ son los puntos singulares y críticos.

c) $D(f)=\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$. En $x=-\dfrac{1}{2}$ la función es continua solo por la derecha : $f'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\dfrac{1}{2}}}\neq 0$.

No hay puntos singulares y no hay puntos críticos, ya que en $x=-\dfrac{1}{2}$ la función no es continua.

d) $D(f)=\mathbb{R}$. No hay puntos de discontinuidad.

Los puntos $x=-1$ y $x=3$ son críticos pero no singulares (en ellos no existe la primera derivada).

3. Determina los puntos de discontinuidad, singulares y críticos de las siguientes funciones.

a) $f(x)=x+\operatorname{sen} x$ **b)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$ **c)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x^2-4}$ **d)** $f(x)=e^{|x|}$

a) $D(f)=\mathbb{R}$. No hay puntos de discontinuidad.

$f'(x)=1+\cos x=0 \Rightarrow x=(2k+1)\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$ son puntos singulares y críticos.

b) $D(f)=(-2,0]\cup(2,+\infty)$. Es continua en todo su dominio.

$f'(x)=\dfrac{-x^2-4}{2\sqrt{x}(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$, $x=0$ es punto crítico, pues aunque existe la función no es derivable en ese punto.

c) $D(f)=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$. Es discontinua para $x=2$ y $x=-2$.

$f'(x)=\dfrac{-x(x^2+12)}{(x^2-4)^2\sqrt{x^2+4}}=0 \Rightarrow x=0.$ Es un punto singular y crítico.

d) $f'(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x>0 \\ -e^{-x} & \text{si } x<0 \end{cases} \Rightarrow$ No hay puntos de discontinuidad ni singulares. El punto $x=0$ es un punto crítico.

4 y 5. Ejercicios resueltos.

6. Estudia las simetrías de las funciones:

a) $f(x)=1+\frac{1+x^2}{x^4}$ **b)** $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ **c)** $f(x)=x+\frac{1}{x}$ **d)** $f(x)=\frac{x}{1-|x|}$

a) $f(-x)=1+\frac{1+(-x)^2}{(-x)^4}=1+\frac{1+x^2}{x^4}=f(x)\Rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y. Función par.

b) $f(-x)=\frac{2(-x)}{(-x)+1}=\frac{-2x}{-x+1}=\frac{2x}{x-1}\Rightarrow$ No es par ni impar.

c) $f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x)\Rightarrow$ Simétrica respecto del origen de coordenadas. Función impar.

d) $f(-x)=\frac{-x}{1-|-x|}=-\frac{x}{1-|x|}=-f(x)\Rightarrow$ Simétrica respecto del origen de coordenadas. Función impar.

7. Indica si las siguientes funciones son periódicas y, en caso afirmativo, indica el período.

a) $f(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$ **b)** $f(x)=\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(4x)$ **c)** $f(x)=1+\frac{1}{\cos^2 x}$ **d)** $f(x)=x+\operatorname{sen}x$

a) $f(x+2\pi)=\frac{\operatorname{sen}(x+2\pi)}{1+\cos(x+2\pi)}=\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\Rightarrow$ Función periódica con período 2π.

b) $f(x+2\pi)=\operatorname{sen}(3x+2\pi)+\operatorname{sen}(4x+2\pi)=\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(4x)=f(x)\Rightarrow$ Función periódica con período 2π.

c) $f(x+\pi)=1+\frac{1}{\cos^2(x+\pi)}=1+\frac{1}{(-\cos x)^2}=1+\frac{1}{\cos^2 x}=f(x)\Rightarrow$ Función periódica con período π.

d) No es periódica.

8 y 9. Ejercicios resueltos.

10. Halla las asíntotas de las siguientes funciones y úsalas para trazar aproximadamente sus ramas infinitas.

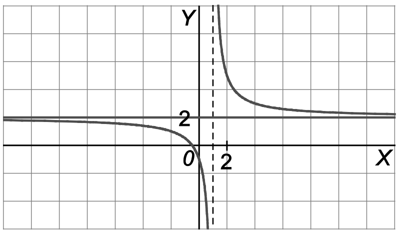
a) $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ **b)** $f(x)=\frac{2x^2+1}{x-1}$ **c)** $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$

a) $x=1$ es una asíntota vertical porque:

$\lim_{x\to1^+}\frac{2x+1}{x-1}=+\infty$, $\lim_{x\to1^-}\frac{2x+1}{x-1}=-\infty$

$y=2$ es asíntota horizontal porque $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2\Rightarrow y=2$.

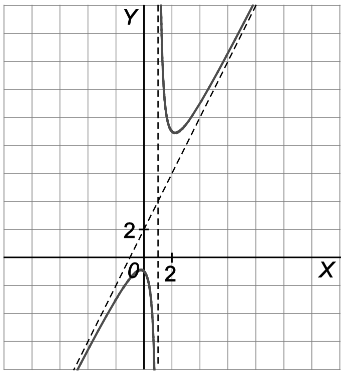
Al haber asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$, no hay oblicuas.



b) $x=1$ es asíntota vertical pues $\lim_{x\to1^+}\frac{2x^2+1}{x-1}=+\infty$ y $\lim_{x\to1^-}\frac{2x^2+1}{x-1}=-\infty$.

No hay asíntota horizontal porque $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+1}{x-1}=\pm\infty\Rightarrow y=2x+2$ es asíntota oblicua porque:

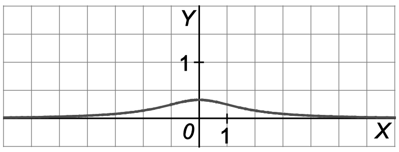
$$\begin{cases}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-x}=2\\ \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+2x}{x-1}=2\end{cases}.$$



c) $D=\mathbb{R}$, por tanto, no existen asíntotas verticales.

$y=0$ es asíntota horizontal porque $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2+3}=0$.

No hay asíntotas oblicuas.



11. Dada la función $f(x) = xe^{-2x+1}$, estudia si tiene asíntotas y determina la posición de la curva respecto a ellas.

Como $D(f) = \mathbb{R}$, solo tiene sentido estudiar su posible existencia en $+\infty$ o $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Luego $y = 0$ es una asíntota horizontal en $+\infty$.

Además $f(x) > 0$ si x se acerca a $+\infty$, por tanto, f se acerca a la asíntota por encima.

12. Ejercicio interactivo.

13. Ejercicio resuelto.

14. Estudia los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de las funciones siguientes y esboza su gráfica.

a) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

b) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 13$

c) $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{3}{2}x^4 + 3x^3 + 1$

d) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

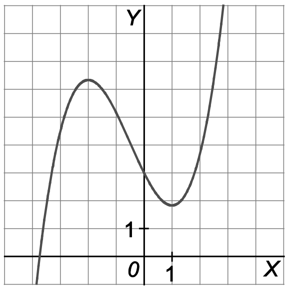
a) $f'(x) = x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2,\ x = 1$

$-\infty \qquad -2 \qquad 1 \qquad +\infty$

$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

Creciente: $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$. Decreciente: $(-2,1)$

Máximo relativo en $x = -2$. Mínimo relativo en $x = 1$.



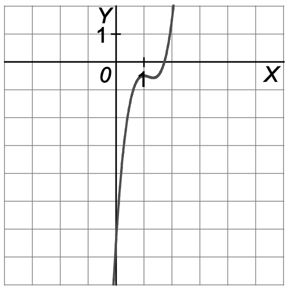
b) $f'(x) = 3x^2 - 14x + 16 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = \dfrac{8}{3}$

$-\infty \qquad 2 \qquad \frac{8}{3} \qquad +\infty$

$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

Creciente: $(-\infty,2)\cup\left(\dfrac{8}{3},+\infty\right)$. Decreciente: $\left(2,\dfrac{8}{3}\right)$

Máximo relativo en $x = 2$. Mínimo relativo en $x = \dfrac{8}{3}$.



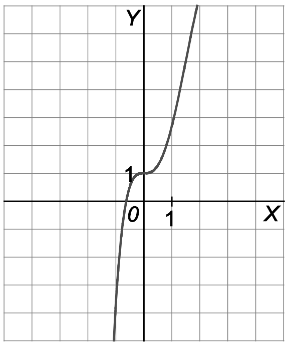
c) $f'(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 3$

$-\infty \qquad 0 \qquad 3 \qquad +\infty$

$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↗	↗

Creciente en todo $\mathbb{R}$.

No tiene extremos relativos.



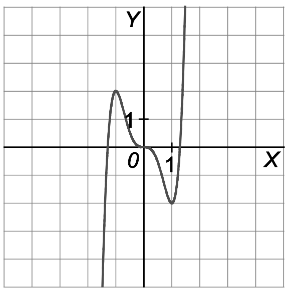
d) $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 0,\ x = 1$

$-\infty \qquad -1 \qquad 0 \qquad 1 \qquad +\infty$

$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

Creciente: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Decreciente: $(-1,1)$

Máximo relativo en $x = -1$. Mínimo relativo en $x = 1$.



15. Indica la concavidad y los puntos de inflexión de $f(x) = x^3 - 12x$.

$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(x) < 0$ en $(-\infty, 0)$. Cóncava hacia abajo: $(-\infty, 0)$

$f''(x) > 0$ en $(0, +\infty)$. Cóncava hacia arriba: $(0, +\infty)$

Punto de inflexión en $(0, 0)$.

16. En cada caso, calcula los valores de *a* y *b* para que:

a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 113$ tenga un máximo en $(5, 162)$.

b) $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 12x - 28$ tenga un punto de inflexión en el punto $(2, 0)$.

a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 113$, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f(5) = 162 \Rightarrow 125 + 25a + 5b - 113 = 162 \Rightarrow 25a + 5b = 150 \Rightarrow 5a + b = 30$

$f'(5) = 0 \Rightarrow 75 + 10a + b = 0 \Rightarrow 10a + b = -75$

$\begin{cases} 5a + b = 30 \\ 10a + b = -75 \end{cases} \Rightarrow 5a = -105 \Rightarrow a = -21,\ b = 135.$

Por tanto, la función buscada es $f(x) = x^3 - 21x^2 + 135x - 113$.

b) $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 12x - 28$, $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + 12$, $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$

$f(2) = 0 \Rightarrow 16 + 8a + 4b + 24 - 28 = 0 \Rightarrow 8a + 4b = -12 \Rightarrow 2a + b = -3$

$f''(2) = 0 \Rightarrow 48 + 12a + 2b = 0 \Rightarrow 6a + b = -24$

$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ 6a + b = -24 \end{cases} \Rightarrow a = -\dfrac{21}{4};\ b = \dfrac{15}{2}$

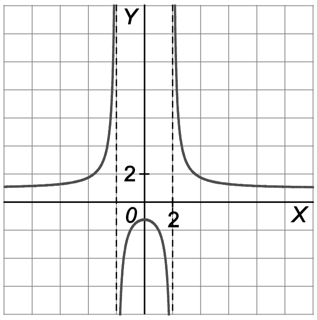
Por tanto, la función buscada es $f(x) = x^4 - \dfrac{21}{4}x^3 + \dfrac{15}{2}x^2 + 12x - 28$.

17. Ejercicio resuelto.

18. Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2-4}$ **b)** $f(x)=\dfrac{3}{x^2+3}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$

a) Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$.



Simetría: Presenta simetría respecto al eje Y.

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje Y: $\left(0,-\dfrac{5}{4}\right)$; Eje X: No tiene.

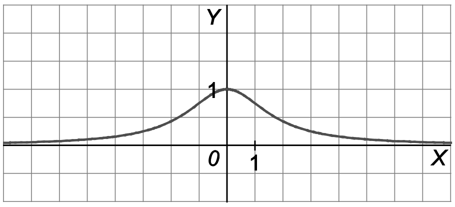
$f(x)>0$ en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y $f(x)<0$ en $(-2,2)$

Asíntotas: Verticales: $x=2$, $x=-2$.Horizontales: $y=1$

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{-18x}{(x^2-4)^2}$, $f'(x)=0\Rightarrow x=0$. Crece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y decrece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$. Máximo: $\left(0,-\dfrac{5}{4}\right)$.

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{54x^2+72}{(x^2-4)^3}\neq 0\Rightarrow$ No hay puntos de inflexión. Cóncava hacia arriba en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-2,2)$.

b) Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}$.



Simetría: Presenta simetría respecto al eje Y.

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje Y: $(0,1)$; Eje X: No tiene. $f(x)>0$ en $\mathbb{R}$.

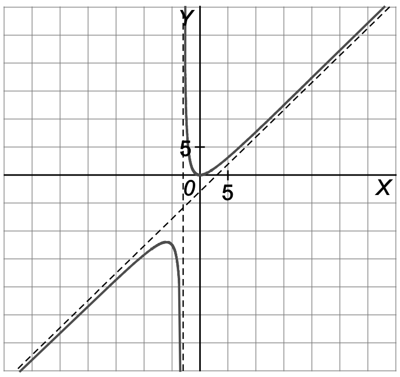
Asíntotas: Horizontales: $y=0$, ya que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{-6x}{(x^2+3)^2}$, $f'(x)=0\Rightarrow x=0$. Crece en $(-\infty,0)$ y decrece en $(0,+\infty)$.

Máximo: $(0,1)$.

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{18(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$, $f''(x)=0\Rightarrow x=1, x=-1$. Puntos de inflexión $\left(1,\dfrac{3}{4}\right)$ y $\left(-1,\dfrac{3}{4}\right)$ y es cóncava hacia arriba en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1,1)$.

c) Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}-\{-3\}$.



Simetría: No es par ni impar.

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje X: $(0,0)$, Eje Y: $(0,0)$

$f(x)<0$ en $(-\infty,-3)$ y $f(x)>0$ en $(-3,0)\cup(0,+\infty)$

Asíntotas: Verticales: $x=-3$; Oblícuas: $y=x-3$

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{x(x+6)}{(x+3)^2}$

$f'(x)=0\Rightarrow x=0, x=-6$. Crece en $(-\infty,-6)\cup(0,+\infty)$ y decrece en $(-6,-3)\cup(-3,0)$. Máximo: $(-6,-12)$ y mínimo $(0,0)$.

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{18}{(x+3)^3}\neq 0\Rightarrow$ No hay puntos de inflexión. Cóncava hacia arriba en $(-3,+\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty,-3)$.

19. Halla el valor de *a* para que la función $f(x)=-\dfrac{1}{x^2+a}$ tenga un punto de inflexión en $x = 1$ y calcula el valor de su ordenada.

Se calcula la segunda derivada de *f*: $f'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+a\right)^2}$, $f''(x)=\dfrac{2a-6x^2}{\left(x^2+a\right)^3}$. Como $x=1$ es un punto de inflexión, entonces $f''(1)=0\Rightarrow\dfrac{2a-6}{(1+a)^3}=0\Rightarrow a=3$.

$f(1)=-\dfrac{1}{1+3}=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow I\left(3,-\dfrac{1}{4}\right)$

20. Dada la función $f(x)=\dfrac{2x+m}{x^2-4}$:

Calcula el valor de *m* para que *f* tenga un extremo relativo en $x = 1$.

b) Para el valor hallado, comprueba que dicho extremo es un mínimo relativo y calcula su correspondiente ordenada.

a) $f'(x)=\dfrac{-2x^2-2mx-8}{\left(x^2-4\right)^2}$. Entonces, $f'(1)=0\Rightarrow\dfrac{-2-2m-8}{9}=0\Rightarrow m=-5$

b) $f''(x)=\dfrac{4x^3-30x^2+48x-40}{\left(x^2-4\right)^3}$.Como $f''(1)>0$, entonces es un mínimo relativo y la ordenada es $f(1)=\dfrac{2\cdot1-5}{1^2-4}=\dfrac{-3}{-3}=1$.

21 y 22. Ejercicios resueltos.

23. Estudia los intervalos de crecimiento y los puntos singulares de la función $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$.

El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$. La función es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$.

$f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Por tanto, la función no es derivable en $x = 0$. En este punto presenta un punto crítico.

Como $f'(x)>0$ para todos los valores $x > 0$ y $f'(x)<0$ para todos los valores $x < 0$, la función es decreciente en $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,+\infty)$. El $(0,0)$ es un mínimo relativo.

24. Halla el valor de *a* para que $f(x)=\dfrac{ax}{\sqrt{x^2+1}}$ tenga por asíntota horizontal la recta $y = -3$.

Si la asíntota es por la derecha $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax}{\sqrt{x^2+1}}=-3\Rightarrow a=-3$.

Si la asíntota es por la izquierda $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{ax}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-ax}{\sqrt{x^2+1}}=-a=-3\Rightarrow a=3$.

25. Halla las asíntotas oblicuas de $f(x)=\sqrt{2x^2-8}$.

$y=\sqrt{2}x$ es asíntota oblicua en $+\infty$ porque:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2-8}}{x}=\sqrt{2}\ \text{ y }\ n=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-8}-\sqrt{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8}{\sqrt{2x^2-8}+\sqrt{2}x}=0$$

$y=-\sqrt{2}x$ es asíntota oblicua en $-\infty$ porque:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-8}}{x}=-\sqrt{2}\ \text{ y }\ n=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-8}+\sqrt{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8}{\sqrt{2x^2-8}-\sqrt{2}x}=0$$

26. Traza la gráfica de las siguientes funciones, estudiando su dominio, cortes con los ejes, asíntotas y extremos relativos.

a) $f(x)=x+\sqrt{x}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

a) Dominio: $D(f)=[0,+\infty)$

Puntos de corte con los ejes:

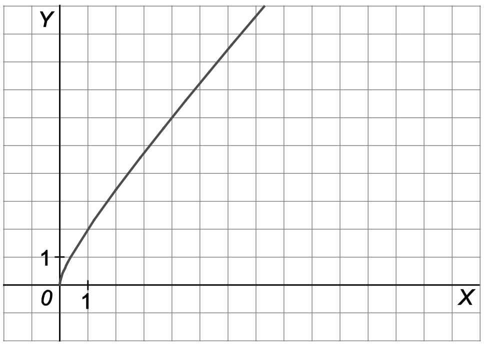
Eje X: $(0,0)$ Eje Y: $(0,0)$

Asíntotas:

Verticales: No tiene.

Horizontales: No tiene.

Oblicuas: No tiene porque $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.



Máximos y mínimos: No tiene, crece en todo su dominio.

b) Dominio: $D(f)=(-1,+\infty)$

Puntos de corte con los ejes:

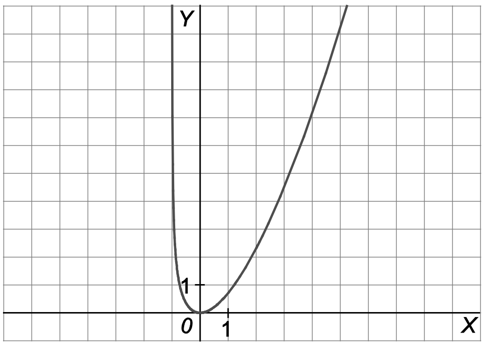
Eje X: $(0,0)$ Eje Y: $(0,0)$

Asíntotas:

Verticales: $x=-1$ porque $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}=+\infty$.

Horizontales: No tiene.

Oblicuas: No tiene.



Máximos y mínimos: Mínimo relativo en $(0,0)$. Crece en $(0,+\infty)$ y decrece en $(-1,0)$.

27. Ejercicio resuelto.

28. Estudia y traza la gráfica de las siguientes funciones.

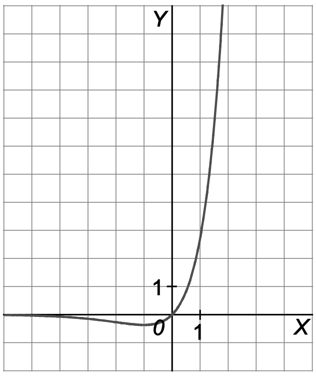
a) $f(x) = xe^x$

b) $f(x) = e^{x+1}$

a) Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje *X*: $(0,0)$ Eje *Y*: $(0,0)$



f es positiva si $x > 0$ y negativa si $x < 0$

Simetrías: La función no es par ni impar.

Asíntotas:

Verticales: No tiene porque $D(f) = \mathbb{R}$

Horizontales: $y = 0$ en $-\infty$

porque $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = \dfrac{-\infty}{+\infty}$ (indet.) $= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-e^{-x}} = 0$

Oblicuas: No tiene porque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x) = (x+1)e^x = 0 \Rightarrow x = -1$

Decrece en $(-\infty, -1)$ y crece en $(-1, +\infty)$. Mínimo en $\left(-1, -\dfrac{1}{e}\right)$.

Puntos de inflexión y concavidad:

$f''(x) = e^x(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$

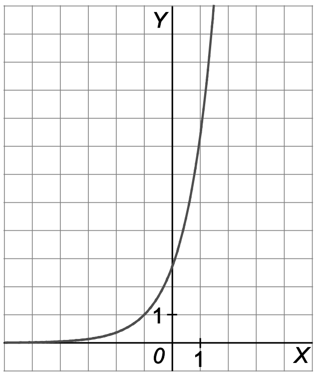
Cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$ y cóncava hacia arriba en $(-2, +\infty)$. Punto de inflexión $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$

b) Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje *Y*: $(0, e)$

f es positiva en todo $\mathbb{R}$.



Simetrías: La función no es par ni impar.

Asíntotas:

Verticales: No tiene porque $D(f) = \mathbb{R}$

Horizontales: $y = 0$ en $-\infty$ porque $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x+1} = 0$

Oblicuas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x) = e^{x+1} \neq 0$.

No tiene máximos y mínimos la función es siempre creciente.

Puntos de inflexión y concavidad:

$f''(x) = e^{x+1} \neq 0$. No tiene puntos de inflexión.

Cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$.

29. Representa la gráfica de las siguientes funciones.

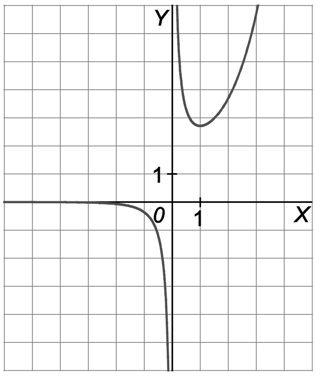
a) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ **b)** $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-4}$

a) Dominio: $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Puntos de corte con los ejes y signo: No corta a ninguno de los ejes.

f es positiva si $x>0$ y negativa si $x<0$.

Simetrías: La función no es par ni impar.



Asíntotas:

Verticales: $x=0$ porque $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

Horizontales: $y=0$ en $-\infty$

porque $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$

Oblicuas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}=0\Rightarrow x=1$$

Decrece en $(-\infty,0)\cup(0,1)$ y crece en $(1,+\infty)$. Mínimo en $(1,e)$.

Puntos de inflexión y concavidad:

$$f''(x)=\frac{e^x\left(x^2-2x+2\right)}{x^3}\neq 0$$. No tiene puntos de inflexión.

Cóncava hacia abajo en $(-\infty,0)$ y cóncava hacia arriba en $(0,+\infty)$.

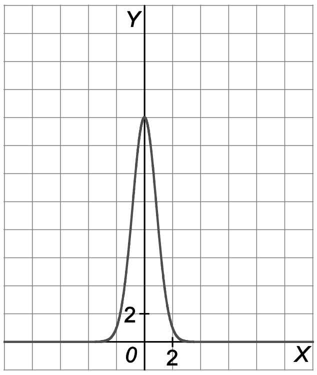
b) Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje *X*: No tiene Eje *Y*: $(0,16)$

f es positiva en todo $\mathbb{R}$

Simetrías: La función es par.



Asíntotas:

Verticales: No tiene porque $D(f)=\mathbb{R}$

Horizontales: $y=0$ en $\pm\infty$ porque $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-4}=0$

Oblicuas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4}\ln\frac{1}{2}\cdot 2x=0\Rightarrow x=0.$$

Decrece en $(0,+\infty)$ y crece en $(-\infty,0)$. Máximo en $(0,16)$.

30. Ejercicio resuelto.

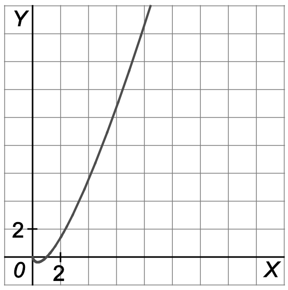
31. Estudia y traza la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x\ln x$ **b)** $f(x) = \log\left(x^2 - 1\right)$

a) Dominio: $D(f) = (0, +\infty)$.

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje Y: No tiene Eje X: $(1, 0)$



f es positiva si $x > 1$ y negativa si $x < 1$.

Simetrías: La función no es par ni impar.

Asíntotas:

Verticales: No tiene.

Horizontales: No tiene.

Oblicuas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x) = 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{e}$

Decrece en $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$ y crece en $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$. Mínimo relativo en $\left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e}\right)$.

Puntos de inflexión y concavidad:

$f''(x) = \dfrac{1}{x} \neq 0 \Rightarrow$ Cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$.

b) Dominio: $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje X: $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$, $\left(\sqrt{2}, 0\right)$ Eje Y: No tiene

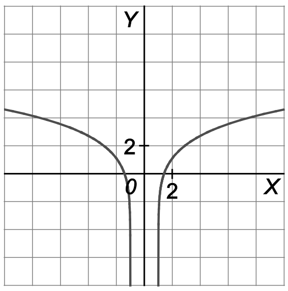
f es positiva en $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$ y negativa en $\left(-\sqrt{2}, -1\right) \cup \left(1, \sqrt{2}\right)$.

Simetrías: La función es par.

Asíntotas:

Verticales: $x = -1$ es asíntota vertical por la izquierda porque $\lim\limits_{x \to -1^-} \log\left(x^2 - 1\right) = -\infty$

$x = 1$ es asíntota vertical por la derecha porque $\lim\limits_{x \to 1^+} \log\left(x^2 - 1\right) = -\infty$.



Horizontales: No tiene.

Oblicuas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x) = \dfrac{2x}{\left(x^2 - 1\right)\ln 10} \Rightarrow x = 0$ no pertenece al dominio.

Decrece en $(-\infty, -1)$ y crece en $(1, +\infty)$. No presenta extremos relativos.

Puntos de inflexión y concavidad:

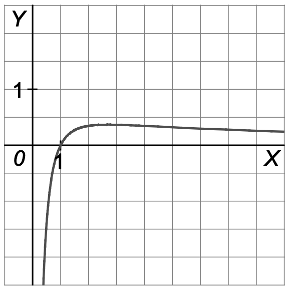
$f''(x) \neq 0$. No tiene puntos de inflexión. Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$.

32. Representa las siguientes funciones logarítmicas.

a) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ **b)** $f(x)=\ln(2x+3)$

a) Dominio: $D(f)=(0,+\infty)$.

Puntos de corte con los ejes y signo:



Eje Y: No tiene Eje X: $(1,0)$

f es positiva si $x>1$ y negativa si $x<1$.

Simetrías: La función no es par ni impar.

Asíntotas:

Verticales: $x=0$ porque $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$

Horizontales: $y=0$ porque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ (indet.) $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Oblicuas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e$

Decrece en $(e,+\infty)$ y crece en $(0,e)$. Máximo relativo en $\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$.

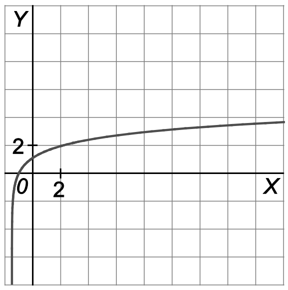
Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}=0\Rightarrow x=e\sqrt{e}$.

Cóncava hacia abajo en $\left(0,e\sqrt{e}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(e\sqrt{e},+\infty\right)$

b) Dominio: $D(f)=\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

Puntos de corte con los ejes y signo:

Eje X: $(-1,0)$ Eje Y: $(0,\ln 3)$



f es negativa si $x<-1$ y positiva si $x>-1$

Simetrías: La función no es par ni impar.

Asíntotas:

Verticales: $x=-\dfrac{3}{2}$ porque $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+}\ln(2x+3)=-\infty$

Horizontales: No tiene.

Oblicuas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x)=\dfrac{2}{2x+3}\neq 0$ no tiene extremos relativos y la función es creciente en todo su dominio.

Puntos de inflexión y concavidad:

$f''(x)\neq 0$. No tiene puntos de inflexión. Cóncava hacia abajo en $\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

33 y 34. Ejercicios resueltos.

35. Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = \text{sen}(2x)$

b) $f(x) = \text{sen}(2\pi x)$

c) $f(x) = \text{tg}(2x)$

d) $f(x) = -2 + \cos(2x)$

a) Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$.

Simetrías: $f(-x) = \text{sen}(-2x) = -\text{sen}(2x) = -f(x) \Rightarrow$ f es impar.

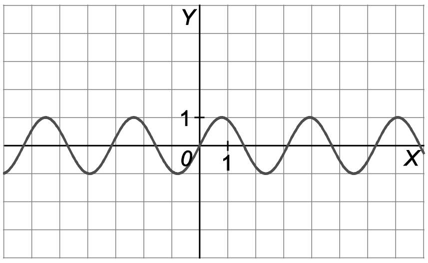
Periodicidad: $f(x+\pi) = \text{sen}(2(x+\pi)) = \text{sen}(2x+2\pi) = \text{sen}(2x) = f(x)$

La función es periódica con período π. Por tanto, solo es necesario realizar su estudio en el intervalo $[0,\pi]$ y su comportamiento se generaliza en todo $\mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes:

Eje X:

$\text{sen}(2x) = 0 \Rightarrow 2x = 0, 2x = \pi \Rightarrow x = 0, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (0,0), \left(\frac{\pi}{2},0\right), (\pi,0)$



Eje Y: $(0,0)$

Asíntotas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x) = 2\cos(2x) = 0 \Rightarrow \cos(2x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$

Crece en $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$; decrece en $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$; y crece en $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$. Máximo $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$. Mínimo $\left(\frac{3\pi}{4},-1\right)$

b) Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$.

Simetrías: $f(-x) = \text{sen}(-2\pi x) = -\text{sen}(2\pi x) = -f(x) \Rightarrow$ f es impar.

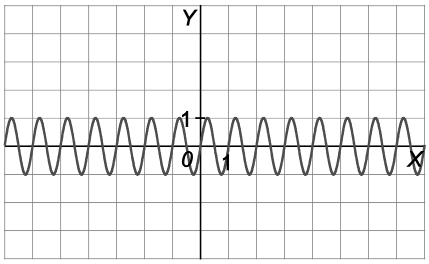
Periodicidad: $f(x+1) = \text{sen}(2\pi(x+1)) = \text{sen}(2\pi x + 2\pi) = \text{sen}(2\pi x) = f(x)$

La función es periódica con período 1. Por tanto, solo es necesario realizar su estudio en el intervalo $[0,1]$ y su comportamiento se generaliza en todo $\mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes:

Eje X:

$\text{sen}(2\pi x) = 0 \Rightarrow 2\pi x = 0,\ 2\pi x = \pi \Rightarrow x = 0, x = \frac{1}{2} \Rightarrow (0,0), \left(\frac{1}{2},0\right), (1,0)$



Eje Y: $(0,0)$

Asíntotas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x) = 2\pi\cos(2\pi x) = 0 \Rightarrow \cos(2\pi x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}, x = \frac{3}{4}$

Crece en $\left(0,\frac{1}{4}\right)$; decrece en $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$; y crece en $\left(\frac{3}{4},1\right)$. Máximo $\left(\frac{1}{4},1\right)$. Mínimo $\left(\frac{3}{4},-1\right)$

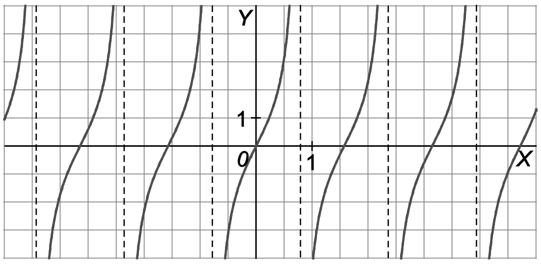
c) Dominio: $D(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{4}k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Simetrías: $f(-x) = \text{tg}(-2x) = -\text{tg}(2x) = -f(x) \Rightarrow$ f es impar.

Periodicidad: $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{tg}\left(-2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \text{tg}(-2x - \pi) = \text{tg}(2x) = f(x)$

La función es periódica con período $\frac{\pi}{2}$. Por tanto, solo es necesario realizar su estudio en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y su comportamiento se generaliza en todo $\mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes:



Eje X:

$$\text{tg}(-2x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (0,0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

Eje Y: $(0,0)$

Asíntotas: Verticales $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x) = 2\left(1 + tg^2 2x\right) \neq 0 \Rightarrow$ No presenta extremos relativos.

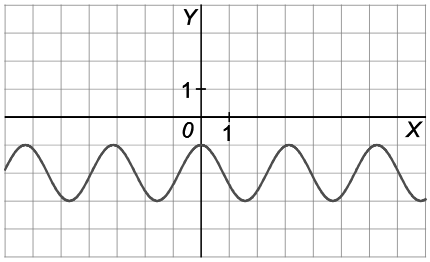
Es creciente en todo su dominio.

d) Dominio: $D(f) = \mathbb{R}$.

Simetrías: $f(-x) = -2 + \cos(-2x) = -2 + \cos(2x) \Rightarrow$ f es par.

Periodicidad: $f(x + \pi) = -2 + \cos(2(x + \pi)) = -2 + \cos(2x + 2\pi) = -2 + \cos(2x) = f(x)$

La función es periódica con período π. Por tanto, solo es necesario realizar su estudio en el intervalo $[0, \pi]$ y su comportamiento se generaliza en todo $\mathbb{R}$.



Puntos de corte con los ejes:

Eje X: No tiene.

Eje Y: $(0, -1)$

Asíntotas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x) = -2\text{sen}2x = 0 \Rightarrow \text{sen}2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. Máximo $(0, -1)$, mínimo $\left(\frac{\pi}{2}, -3\right)$.

Decrece en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y crece en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

36. Haz un estudio y luego representa las siguientes funciones.

a) $f(x)=\text{sen}^2(\pi x)$

b) $f(x)=\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $f(x)=\text{arccos}\left(x^2\right)$

d) $f(x)=\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$

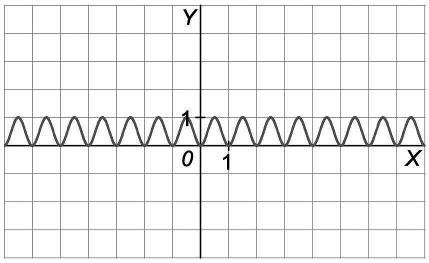
a) Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$.

Simetrías: $f(-x)=\text{sen}^2(-\pi x)=(-\text{sen}(\pi x))^2=f(x)\Rightarrow$ f es par.

Periodicidad: $f(x+1)=\text{sen}^2(\pi(x+1))=\text{sen}^2(\pi x+\pi)=(\text{sen}(\pi x))^2=f(x)$

La función es periódica con período 1. Por tanto, solo es necesario realizar su estudio en el intervalo $[0,1]$ y su comportamiento se generaliza en todo $\mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes:



Eje X:

$\text{sen}^2(\pi x)=0\Rightarrow \pi x=0, \pi x=\pi\Rightarrow x=0, x=1\Rightarrow(0,0),(1,0)$

Eje Y: $(0,0)$

Asíntotas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

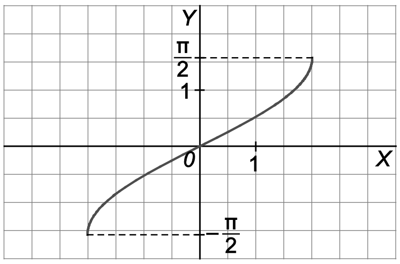
$f'(x)=2\pi\text{sen}(\pi x)\cos(\pi x)=0\Rightarrow \pi\text{sen}(2\pi x)=0\Rightarrow x=0,\ x=\frac{1}{2},\ x=1$

Crece en $\left(0,\frac{1}{2}\right)$; decrece en $\left(\frac{1}{2},1\right)$. Mínimo $(0,0)$. Máximo $\left(\frac{1}{2},1\right)$. Mínimo $(1,0)$

b) Dominio: $D(f)=[-2,2]$.

Simetrías: $f(-x)=\text{arcsen}\left(-\frac{x}{2}\right)=-\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)=-f(x)\Rightarrow$ f es impar.

Puntos de corte con los ejes:



Eje X:

$\text{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)=0\Rightarrow\frac{x}{2}=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,0)$

Eje Y: $(0,0)$

Asíntotas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\Rightarrow$ f es siempre creciente.

Puntos de inflexión:

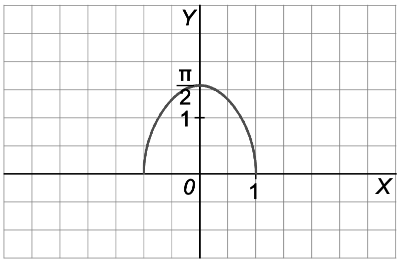
$f''(x)=\frac{-x}{\left(x^2-4\right)\sqrt{4-x^2}}=0\Rightarrow x=0\Rightarrow$ Punto de inflexión $(0,0)$.

En $(-2,0)$ cóncava hacia abajo y en $(0,2)$ cóncava hacia arriba.

c) Dominio: $D(f)=[-1,1]$.

Simetrías: $f(-x)=\text{arccos}\left((-x)^2\right)=\text{arccos}\left(x^2\right)=f(x)\Rightarrow$ f es par.

Puntos de corte con los ejes:



Eje X:

$$\text{arccos}\left(x^2\right)=0\Rightarrow x^2=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Rightarrow\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}},0\right),\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}},0\right)$$

Eje Y: $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

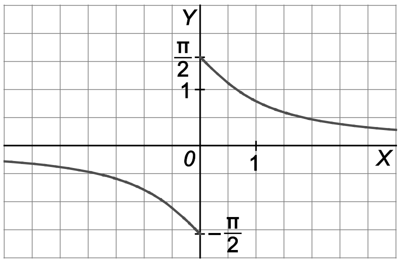
Asíntotas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$$f'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}=0\Rightarrow x=0$$

Crece en $(-1,0)$; decrece en $(0,1)$. Máximo $(0,1)$.

d) Dominio: $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.



Simetrías: $f(-x)=\text{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)\Rightarrow$ f es impar.

Puntos de corte con los ejes:

Eje X:

$$\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow\frac{1}{x}=0\Rightarrow$$ No hay punto de corte con el eje X.

Eje Y: No hay punto de corte con el eje Y porque f no está definida en $x=0$.

Asíntotas:

Verticales: No tiene porque $\lim_{x\to0^+}\left[\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]=1$ $\quad\lim_{x\to0^-}\left[\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]=-1$

Horizontales: $y=0$ en $+\infty$ porque $\lim_{x\to+\infty}\left[\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]=0$; $y=0$ en $-\infty$ porque $\lim_{x\to-\infty}\left[\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]=0$

Oblicuas: No tiene.

Puntos singulares y crecimiento:

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}<0\Rightarrow$$ f es siempre decreciente.

Puntos de inflexión:

$$f''(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Rightarrow x=0\Rightarrow$$ No pertenece al dominio.

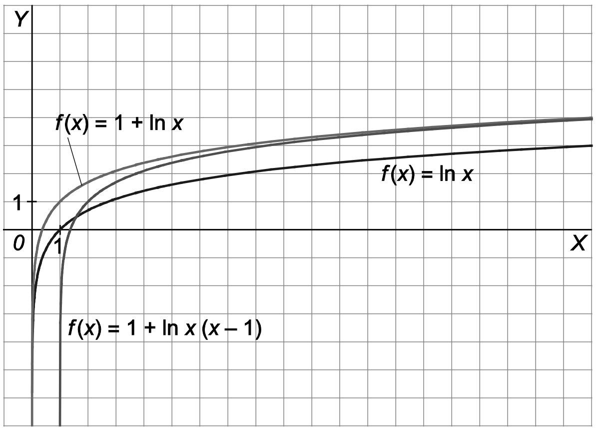
En $(-\infty,0)$ cóncava hacia abajo y en $(0,+\infty)$ cóncava hacia arriba.

37 y 38. Ejercicios resueltos.

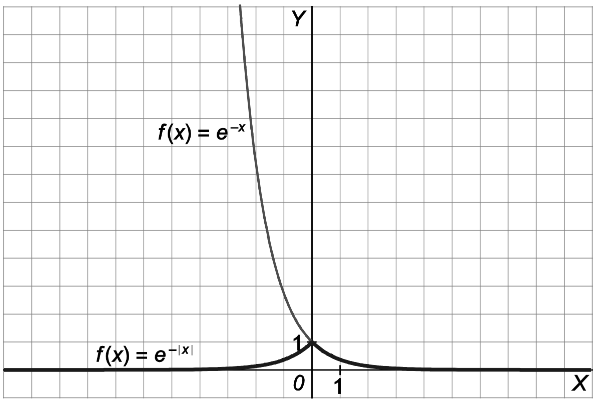
39. Partiendo de la gráfica de $f(x) = \ln x$, traza las gráficas de:

a) $f(x) = 1 + \ln x$

b) $f(x) = 1 + \ln(x - 1)$



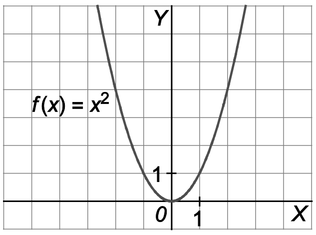
40. A partir de la gráfica de la función $f(x) = e^{-x}$, traza la gráfica de $g(x) = e^{-|x|}$.



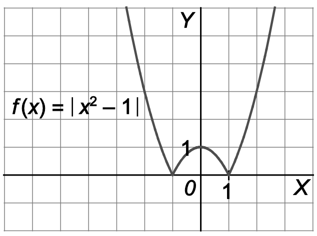
41. A partir de la gráfica de la función $f(x) = x^2$, traza las de:

a) $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$

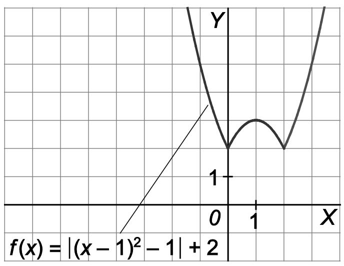
b) $g(x) = \left|(x-1)^2 - 1\right| + 2$



a)



b)



42. Ejercicio interactivo.

43 a 51. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Dominios y puntos de discontinuidad

52. Para las funciones dadas:

a) Estudia su dominio.

b) Indica los puntos de discontinuidad de especial interés (puntos de discontinuidad en los que al menos existe uno de los límites laterales).

Indica también si en alguno de estos puntos la función es continua a la izquierda o a la derecha.

1. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{x}$

2. $f(x)=\sqrt{2x}+\sqrt{2x-3}$

3. $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{4-x^2}}$

4. $f(x)=\ln(sen(x))$

5. $f(x)=\sqrt{e^{2x^2-5x+2}}$

1. $D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

Los puntos de discontinuidad de especial interés son $x=-1$, $x=0$, $x=1$.

2. $\begin{cases}2x\geq 0\\ 2x-3\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x\geq\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow D(f)=\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

En $x=\dfrac{3}{2}$ la función es continua por la derecha.

3. $\begin{cases}4-x^2\geq 0\\ 1-\sqrt{4-x^2}\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2\leq 4\\ \sqrt{4-x^2}\leq 1\end{cases}\Rightarrow 0\leq 4-x^2\leq 1\Rightarrow -1\leq x^2-4\leq 0\Rightarrow 3\leq x^2\leq 4\Rightarrow D(f)=\left[-2,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},2\right]$

En $x=-2$ y $x=\sqrt{3}$ la función es continua por la derecha, y en $x=2$ y $x=-\sqrt{3}$ la función es continua por la izquierda.

4. $\operatorname{sen}x>0\Rightarrow x\in(2k\pi,(2k+1)\pi)$, con $k\in\mathbb{Z}$

Los puntos de discontinuidad de especial interés son $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

5. Las potencias de base positivas son positivas.

Por tanto, la raíz cuadrada siempre existe y el dominio es todo $\mathbb{R}$. No hay puntos de discontinuidad.

Puntos de corte con los ejes y signo

53. Para las siguientes funciones, calcula sus puntos de corte con los ejes y estudia las zonas donde su imagen es positiva y donde su imagen es negativa.

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

b) $f(x) = x^3 + x^2 - 16x + 20$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^x}$

f) $f(x) = \ln\left(x^2 - 8\right)$

g) $f(x) = \text{sen}^2 x + \cos 2x$

a) Los puntos de corte con el eje X son: $x = -2$, $x = 1$, $x = 2$. Con el eje Y es $(0, 4)$. La función es continua en todo $\mathbb{R}$. En $(-\infty, -2)$ la función es negativa; en $(-2, 1)$, positiva; en $(1, 2)$, negativa; y en $(2, +\infty)$, positiva.

b) Los puntos de corte con los ejes son:

Eje X: $(-5, 0)$, $(2, 0)$

Eje Y: $(0, 20)$

En $(-\infty, -5)$ la función es negativa, y en $(-5, 2) \cup (2, +\infty)$ positiva.

c) El signo de $f(x)$ será el mismo que el de $y = x^2 - 4$ excepto en $x = -2$ y $x = 2$, en los cuales la función no existe.

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$

Por tanto, es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, y negativa, en $(-2, 2)$.

d) La función es positiva en todo su dominio que es $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$ excepto en $x = 1$, que vale 0.

e) El dominio de la función es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. La función no corta a los ejes.

En $(-\infty, 0)$ la función es positiva, y en $(0, +\infty)$ es negativa.

f) El dominio de la función es $\left(-\infty, -\sqrt{8}\right) \cup \left(\sqrt{8}, +\infty\right)$. La función corta al eje X en $x = -3$, $x = 3$.

Por tanto, se consideran los intervalos $(-\infty, -3)$, $\left(-3, -\sqrt{8}\right)$, $\left(\sqrt{8}, 3\right)$ y $(3, +\infty)$. En dichos intervalos el signo de la función es, respectivamente, positivo, negativo, negativo y positivo.

g) $f(x) = \text{sen}^2 x + \cos 2x = \text{sen}^2 x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos^2 x$. La función es positiva en todos los números reales excepto en los que $\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \pm k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Simetría y periodicidad

54. Estudia las simetrías de estas funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x^6}{x^4-1}$

b) $f(x)=\dfrac{x^6+1}{x^3-x}$

c) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+4}$

d) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

e) $f(x)=\text{sen}(3x)+\cos(5x)$

f) $f(x)=\dfrac{\text{sen}\,x+\text{tg}\,x}{\cos x}$

g) $f(x)=\dfrac{x\text{sen}\,x+\cos x}{\text{tg}\,x}$

a) $f(-x)=f(x)\Rightarrow$ f par (simétrica respecto a Y).

b) $f(-x)=-f(x)\Rightarrow$ f impar (simétrica respecto a O).

c) No es par ni impar.

d) $f(-x)=-f(x)\Rightarrow$ f impar (simétrica respecto a O).

e) $f(-x)=\text{sen}(-3x)+\cos(-5x)=-\text{sen}(3x)+\cos(5x)\Rightarrow$ f no es par ni impar.

f) $f(-x)=\dfrac{\text{sen}(-x)+\text{tg}(-x)}{\cos(-x)}=\dfrac{-\text{sen}\,x-\text{tg}\,x}{\cos x}=-f(x)\Rightarrow$ f impar (simétrica respecto a O).

g) $f(-x)=\dfrac{-x\text{sen}(-x)+\cos(-x)}{\text{tg}(-x)}=\dfrac{x\text{sen}\,x-\cos x}{-\text{tg}\,x}=-f(x)\Rightarrow$ f es impar.

55. Estudia si son periódicas las siguientes funciones.

a) $f(x)=\text{sen}\,x+\text{tg}\,x$ **b)** $f(x)=\text{sen}(2x)+\text{tg}(2x)$ **c)** $f(x)=\text{sen}(3x)+\text{tg}(3x)$

a) $f(x+2\pi)=\text{sen}(x+2\pi)+\text{tg}(x+2\pi)=\text{sen}\,x+\text{tg}\,x=f(x)\Rightarrow$ periódica con período $T=2\pi$.

b) $f(x+\pi)=\text{sen}(2(x+\pi))+\text{tg}(2(x+\pi))=\text{sen}(2x+2\pi)+\text{tg}(2x+2\pi)=\text{sen}(2x)+tg(2x)=f(x)\Rightarrow$ periódica con período $T=\pi$.

c) $f\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\text{sen}\left(3\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)+\text{tg}\left(3\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)=\text{sen}(3x+2\pi)+\text{tg}(3x+2\pi)=\text{sen}(3x)+tg(3x)=f(x)\Rightarrow$ periódica con período $T=\dfrac{2\pi}{3}$.

56. Señala el período de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sec x$

b) $f(x)=\text{tg}(\pi x)$

c) $f(x)=\text{sen}(4x)$

d) $f(x)=\text{sen}^4 x$

e) $f(x)=\text{sen}\,x+\cos(3x)$

f) $f(x)=\text{sen}^2 x+\cos^2 x$

a) $T=2\pi$

b) $T=1$

c) $T=\dfrac{\pi}{2}$

d) $T=\pi$

e) $T=2\pi$

f) La función es constante.

57. Comprueba que si una función $f(x)$ tiene período *T*, entonces la función $f(ax)$ tiene período $\frac{T}{a}$.

Aplicando esta propiedad, halla el período de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \text{sen}\frac{\pi x}{3}$

b) $f(x) = \cos^2\frac{\pi x}{3}$

c) $f(x) = \text{tg}(3\pi x)$

d) $f(x) = \text{cotg}^2\frac{\pi x}{3}$

e) $f(x) = \sec(3\pi x)$

$f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right) = f(ax+T) = f(ax) \Rightarrow f(ax)$ es periódica de con período $\frac{T}{a}$.

a) $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ **b)** $T = \frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = 3$ **c)** $T = \frac{\pi}{3\pi} = \frac{1}{3}$ **d)** $T = \frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = 3$ **e)** $T = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$

Asíntotas

58. Estudia las asíntotas de la función polinómica: $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 2$.

Por ser una función polinómica, no hay asíntotas.

59. Estudia las asíntotas de las siguientes funciones racionales.

a) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x^3 + 1}$

b) $f(x) = \frac{4x^2 - 3x}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{2x^2 - 3}$

d) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 + 4}$

e) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

f) $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4}$

g) $f(x) = \frac{x^3}{x - 1}$

h) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$

a) Asíntota vertical: $x = -1$ a la izquierda y a la derecha. Asíntota horizontal: $y = 0$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

b) No hay asíntotas verticales. Asíntota horizontal: $y = 4$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

c) Asíntotas verticales: $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ a la derecha y a la izquierda. No hay asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua: $y = x - \frac{3}{2}$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

d) No hay asíntotas verticales. Asíntota horizontal: $y = 1$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

e) No hay ningún tipo de asíntotas. La función es la recta $y = x + 1$ con un agujero en $(-1, 0)$.

f) Asíntota vertical: $x = -2$ a la derecha y a la izquierda. No hay asíntotas horizontales. Asíntota oblicua: $y = x$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

g) Asíntota vertical: $x = 1$ a la derecha y a la izquierda. No hay asíntotas horizontales ni oblicuas.

h) Asíntota vertical: $x = 1$ a la izquierda y a la derecha. Asíntota horizontal: $y = 0$ en $+\infty$ y en $-\infty$. No hay asíntotas oblicuas.

60. Estudia las asíntotas horizontales y oblicuas, y su posición respecto de la curva, para las siguientes funciones racionales.

a) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2+4}$

b) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2-4}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2+x+2}{2x^2-x+2}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^3}{2x^2+1}$

a) Asíntota horizontal: $y = 0$ en $+\infty$ y en $-\infty$. En $+\infty$ y en $-\infty$ la curva queda por debajo de la asíntota.

b) Asíntota horizontal: $y = 0$ en $+\infty$ y en $-\infty$. En $(-\infty,-2)$ la curva queda por debajo de la asíntota, en $(-2,2)$ la curva queda por encima de la asíntota y en $(0,+\infty)$ la curva queda por debajo de la asíntota.

c) Asíntota horizontal: $y = 1$ en $+\infty$ y en $-\infty$. $\dfrac{2x^2+x+2}{2x^2-x+2} - 1 = \dfrac{2x}{2x^2-x+2}$

En $+\infty$ la curva queda por encima de la asíntota. En $-\infty$ la curva queda por debajo de la asíntota.

d) $f(x) = \dfrac{2x^3}{2x^2+1} = x - \dfrac{x}{2x^2+1}$. Asíntota oblicua: $y = x$ en $+\infty$ y en $-\infty$. La curva queda por encima en $-\infty$ y por debajo en $+\infty$.

61. Halla las asíntotas de las siguientes funciones irracionales.

a) $f(x) = \sqrt{x+\dfrac{3}{4}}$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4-16}}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

d) $f(x) = \sqrt[4]{x^4+\dfrac{1}{4}}$

a) El dominio de la función es $\left[-\dfrac{3}{4},+\infty\right)$. No tiene asíntotas verticales. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\dfrac{3}{4}} = +\infty \Rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales. No tiene asíntotas oblicuas porque $m = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\frac{3}{4}}}{x} = 0$.

b) El dominio de la función es $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$. No tiene asíntotas verticales. No tiene asíntotas horizontales porque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-16}}{x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-16}}{x} = -\infty$. $y = x$ es asíntota en $+\infty$ y en $-\infty$ porque:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^4-16}}{x^2} = 1 \qquad n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4-16}}{x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-16}{x\left(\sqrt{x^4-16}+x^2\right)} = 0.$$

c) El dominio de la función es $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. No tiene asíntotas verticales ni horizontales. $y = x$ e $y = -x$ son asíntotas oblicuas porque:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1,\ n = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) = 0 \qquad m = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -1,\ n = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) = 0$$

d) El dominio es todo $\mathbb{R}$. No hay asíntotas verticales ni horizontales.

$y = x$ es asíntota oblicua en $+\infty$ y por ser una función par, $y = -x$ es asíntota oblicua en $-\infty$ ya que:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+\frac{1}{4}}}{x} = 1 \qquad n = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+\frac{1}{4}} - x\right) = 0.$$

62. Determina las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\left(2+x^2\right)e^{\frac{x}{2}}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$

c) $f(x)=\ln(2x-3)$

d) $f(x)=\ln\sqrt{x+1}$

a) El dominio es todo $\mathbb{R}$. No hay asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+x^2\right)e^{\frac{x}{2}}=+\infty\Rightarrow$ No hay asíntota horizontal en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+x^2\right)e^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+x^2\right)e^{-\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+x^2}{e^{\frac{x}{2}}}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right](\text{indet.})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}=0\Rightarrow$ La recta $y=0$ es asíntota horizontal en $-\infty$.

$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2+x^2\right)e^{\frac{x}{2}}}{x}=+\infty\Rightarrow$ No hay asíntota oblicua en $+\infty$.

b) El dominio es todo $\mathbb{R}$. No hay asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{e^x}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right](\text{indet.})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right]\xrightarrow{L'H}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0\Rightarrow$ La recta $y=0$ es asíntota horizontal en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{e^x}=+\infty$, $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(x^2+1\right)}{xe^x}=+\infty\Rightarrow$ No hay asíntota horizontal ni oblicua en $-\infty$.

c) El dominio es $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$. $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}\ln(2x-3)=-\infty\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$ es asíntota vertical por la derecha.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2x-3)=+\infty\Rightarrow$ No hay asíntota horizontal ni oblicua en $+\infty$.

d) El dominio es $(-1,+\infty)$ $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln\sqrt{x+1}=-\infty\Rightarrow x=-1$ es asíntota vertical por la derecha.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\sqrt{x+1}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\sqrt{x+1}}{x}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right](\text{indet.})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2(x+1)}=0\Rightarrow$ No hay asíntota horizontal ni oblicua.

63. Calcula las asíntotas de la función $f(x)=x^x$.

El dominio es $(0,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$. No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^x=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^x}{x}=+\infty\Rightarrow$ No hay asíntota horizontal ni oblicua en $+\infty$.

64. Estudia las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\operatorname{sen}x$

b) $f(x)=\operatorname{sen}x+3\cos x$

a) No tiene asíntotas verticales ya que el dominio es todo $\mathbb{R}$.

No tiene asíntotas horizontales ya que no existe el límite en $+\infty$ ni en $-\infty$.

b) Al igual que la anterior, no tiene asíntotas.

65. Halla las asíntotas de las siguientes funciones con valores absolutos.

a) $f(x)=|2x-3|+x|x-1|$

b) $f(x)=\frac{1}{|x|}$

c) $f(x)=\left|\frac{x}{x+1}\right|$

d) $f(x)=\frac{|x|+2}{x+2}$

e) $f(x)=\ln|x-2|$

f) $f(x)=e^{-|x|}$

a) La función se puede escribir como una función definida a trozos en la que todos los tramos están expresados por polinomios. Por tanto, no tiene asíntotas.

b) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim_{x\to 0^-}-\frac{1}{x}=+\infty \Rightarrow$ $x=0$ es asíntota vertical tanto por la izquierda como por la derecha.

$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim_{x\to -\infty}-\frac{1}{x}=0 \Rightarrow$ $y=0$ es asíntota horizontal, tanto en $+\infty$ como en $-\infty$.

c) $x=-1$ es asíntota vertical por la izquierda y por la derecha.

$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x+1}=1$, $\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x+1}=1 \Rightarrow$ $y=1$es asíntota horizontal tanto en $+\infty$ como en $-\infty$.

d) $x=-2$ es asíntota vertical por la izquierda y por la derecha.

En $-\infty$, $y=-1$ es asíntota horizontal.

En $+\infty$, $y=1$ es asíntota horizontal.

e) $x=2$ es asíntota vertical.

f) $y=0$ es asíntota horizontal tanto en $+\infty$ como en $-\infty$.

Funciones polinómicas

66. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$:

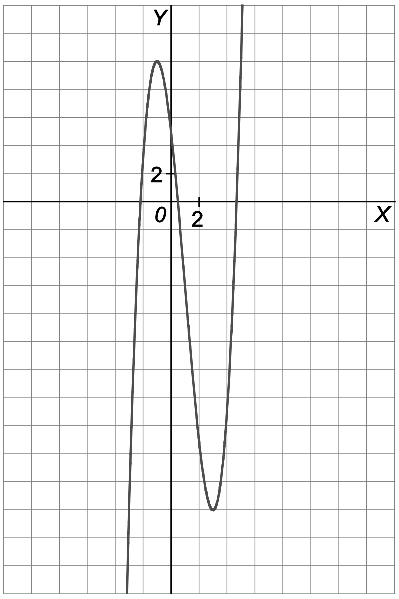
a) Traza su gráfica estudiando previamente el crecimiento y la existencia de extremos relativos.

b) ¿Hay puntos de corte con los ejes de coordenadas?

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Si $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 3$

Crece en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. Decrece en $(-1, 3)$.

Máximo $(-1, 10)$. Mínimo $(3, -22)$.

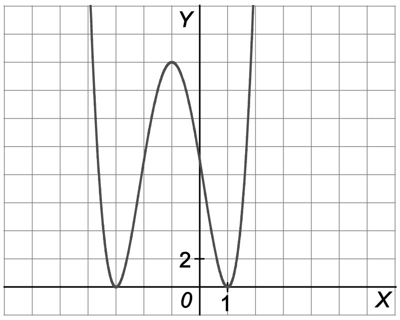


b) Corta al eje *Y* en $(0, 5)$ y al eje *X* en tres puntos.

67. Dada la función $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$:

a) Traza su gráfica estudiando primero los cortes con los ejes, el signo, el crecimiento y la existencia de extremos relativos.

b) ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la función?



a) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = (x-1)^2(x+3)^2$

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12 = 4(x+1)(x-1)(x+3)$

Puntos de corte con los ejes: $(1, 0)$, $(-3, 0)$ $(0, 9)$

La función es siempre positiva, excepto en los puntos que se anula.

Crece en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$. Decrece en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$.

Máximo relativo: $(-1, 16)$. Mínimos relativos: $(-3, 0)$, $(1, 0)$.

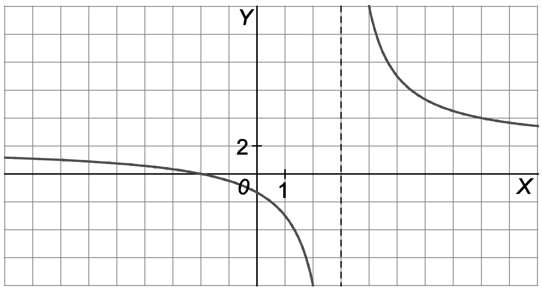
b) Tiene dos puntos de inflexión.

Funciones racionales

68. Dibuja las siguientes funciones racionales, realizando el estudio completo de las mismas.

a) $f(x)=\dfrac{2x+4}{x-3}$ **b)** $f(x)=\dfrac{3x}{x^3-8}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-4}$

a) Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}-\{3\}$



Simetría: No es par ni impar.

Puntos de corte con los ejes: $(-2,0)$, $\left(0,-\dfrac{4}{3}\right)$

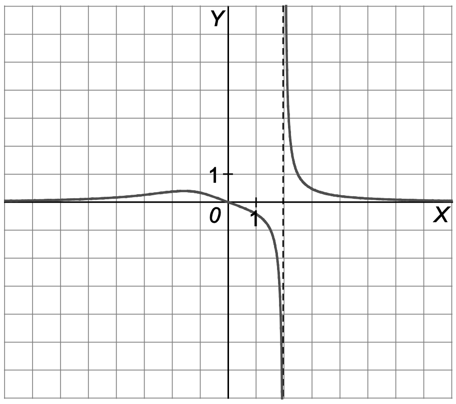
Asíntotas: Verticales: $x=3$. Horizontales: $y=2$.

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=-\dfrac{10}{(x-3)^2}$

Siempre decrece. No tiene extremos relativos.

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{20}{(x-3)^3}$. Cóncava hacia arriba en $(3,+\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty,3)$. No tiene puntos de inflexión.

b) Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$



Simetría: No es par ni impar.

Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$

Asíntotas: Verticales: $x=2$

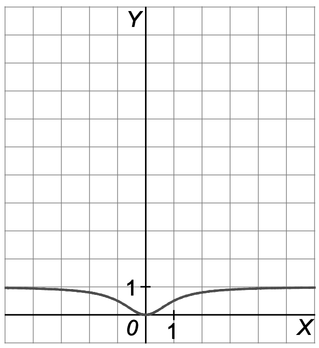
Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{6(x^3+4)}{(x^3-8)^2}$

Decrece en $(-\sqrt[3]{4},2)\cup(2,+\infty)$ y crece en $(-\infty,-\sqrt[3]{4})$.

Máximo en $\left(-\sqrt[3]{4},\dfrac{\sqrt[3]{4}}{4}\right)$

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{18x^2(x^2+16)}{(x^3-8)^3}$. Cóncava hacia arriba en $(-\infty,-\sqrt[3]{16})\cup(2,+\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\sqrt[3]{16},0)\cup(0,2)$. Puntos de inflexión: $\left(-\sqrt[3]{16},\dfrac{\sqrt[3]{2}}{4}\right)$.

c) Dominio y continuidad: $D(f)=\mathbb{R}$



Simetría: *f* es par.

Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$

Asíntotas: Horizontales: $y=1$.

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

Decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0,+\infty)$. Mínimo en $(0,0)$.

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$.Cóncava hacia arriba en $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$. Puntos de inflexión: $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$ y $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$.

d) Dominio y continuidad: $D(f) = \mathbb{R} - \{-2,2\}$

Simetría: *f* es impar.

Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$

Asíntotas: Verticales: $x = 2$, $x = -2$. Oblicuas: y = 2x

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x) = \dfrac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$

Decrece en $(-\sqrt{12},-2)\cup(-2,2)\cup(2,\sqrt{12})$ y

crece en $(-\infty,-\sqrt{12})\cup(\sqrt{12},+\infty)$.

Máximo $(-\sqrt{12},-3\sqrt{12})$ Mínimo $(\sqrt{12},3\sqrt{12})$.

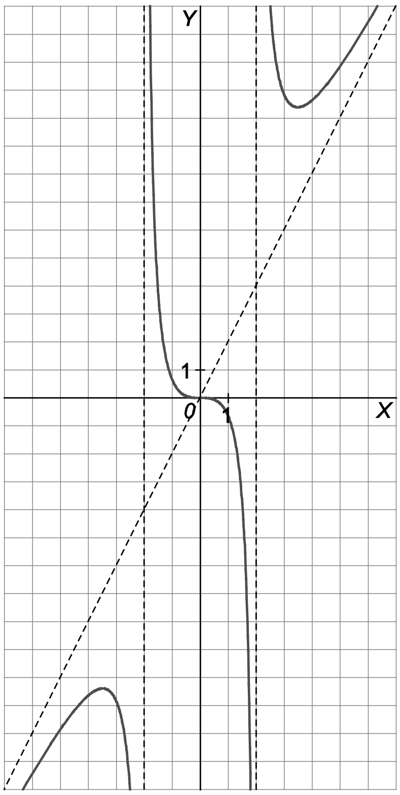
Puntos de inflexión y concavidad:

$f''(x) = \dfrac{16x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} = 0 \Rightarrow x = 0$

Puntos de inflexión: $(0,0)$

Cóncava hacia arriba en $(-2,0)\cup(2,+\infty)$ y

cóncava hacia abajo en $(-\infty,-2)\cup(0,2)$.



Funciones irracionales

69. Para la función $f(x) = x + \sqrt{\dfrac{1}{x}}$, halla el dominio, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas y los extremos relativos y, finalmente, traza su gráfica.

Dominio: $D(f) = (0,+\infty)$

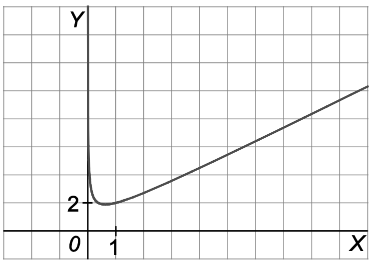
No tiene puntos de corte con los ejes.

Asíntotas verticales: $x = 0$ porque $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right) = +\infty$

Asíntotas oblicuas: $y = x$ en $+\infty$

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$.

Decrece en $\left(0,\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right)$ y crece en $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}},+\infty\right)$. Mínimo en $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}},\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$.



70. Dada la función $f(x)=\sqrt{x^2-4x+8}$:

a) Dibuja su gráfica estudiando previamente su dominio, los puntos de corte con los ejes, el crecimiento y la existencia de extremos relativos.

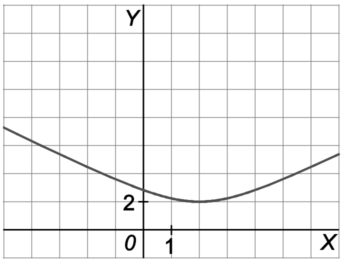
b) De acuerdo con gráfica, señala los intervalos de concavidad de la función.

a) Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$.

Corta al eje Y en $\left(0,\sqrt{8}\right)$

$f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}$

Decrece en $(-\infty,2)$ y crece en $(2,+\infty)$. Mínimo en $(2,2)$.



b) La función es siempre cóncava hacia arriba.

71. Dada la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x}}$, traza su gráfica estudiando previamente su dominio los puntos de corte con los ejes, las asíntotas y los extremos relativos.

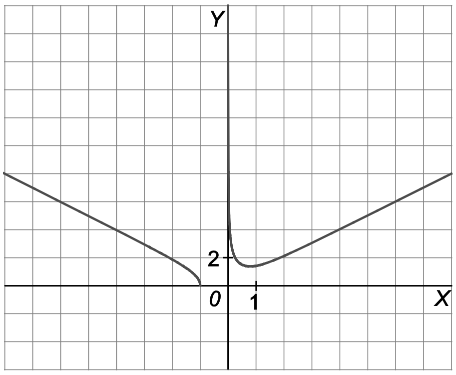
Dominio: $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

Puntos de corte con los ejes: $(-1,0)$

Asíntotas verticales: $x=0$ porque $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x}}=+\infty$

Asíntotas oblicuas: $y=x$ en $+\infty$ e $y=-x$ en $-\infty$.

$f'(x)=\dfrac{(2x^3-1)\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x}}}{2x(x^3+1)}$. Mínimo en $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}},\dfrac{\sqrt[6]{432}}{2}\right)$.



Funciones exponenciales

72. Realiza el estudio completo de la función $f(x)=(1-x)e^{-x}$ y dibuja su gráfica.

Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

Puntos de corte con los ejes: $(1,0)$, $(0,1)$

Asíntotas horizontales: $y=0$ en $+\infty$ porque $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^{-x}=0$

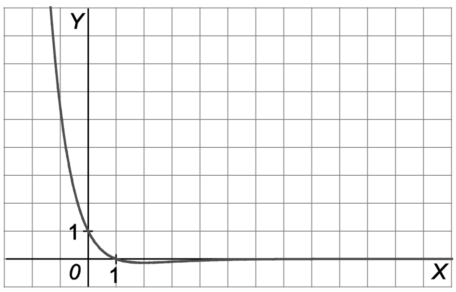
$f'(x)=e^{-x}(x-2)=0\Rightarrow x=2$.

Decrece en $(-\infty,2)$ y crece en $(2,+\infty)$. Mínimo en $\left(2,-e^{-2}\right)$

$f''(x)=e^{-x}(3-x)=0\Rightarrow x=3$

Cóncava hacia arriba en $(-\infty,3)$ y cóncava hacia abajo en $(3,+\infty)$.

Punto de inflexión en $\left(3,-2e^{-3}\right)$



73. Traza las gráficas de las siguientes funciones realizando, previamente, un estudio completo de ellas.

a) $f(x)=\left(x^2-4x+5\right)e^x$

b) $f(x)=\left(x^2-4x+5\right)e^{-x}$

a) Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

Simetrías: No es par ni impar.

Puntos de corte con los ejes: $(0,5)$

Asíntotas horizontales: $y=0$ en $-\infty$

$f'(x)=(x-1)^2e^x=0\Rightarrow x=1$

Creciente en todo el dominio.

$f''(x)=(x-1)(x+1)e^x=0\Rightarrow x=1,\ x=-1$

Cóncava hacia arriba en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Cóncava hacia abajo en $(-1,1)$

Puntos de inflexión: $\left(-1,10e^{-1}\right)$, $(1,2e)$

b) Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

Simetrías: No es par ni impar.

Puntos de corte con los ejes: $(0,5)$

Asíntotas horizontales: $y=0$ en $+\infty$

$f'(x)=-(x-3)^2e^{-x}=0\Rightarrow x=3$

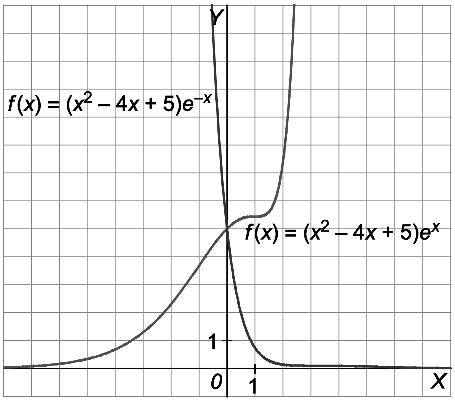
Decreciente en todo el dominio.

$f''(x)=-(x-3)(5-x)e^{-x}\Rightarrow x=3,\ x=5$

Cóncava hacia arriba en $(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$

Cóncava hacia abajo en $(3,5)$

Puntos de inflexión: $\left(3,2e^{-3}\right)$, $\left(5,10e^{-5}\right)$



74. Dada la función $f(x)=x^2e^x$:

a) Traza su gráfica estudiando previamente el dominio, las asíntotas, los puntos de corte con los ejes, el crecimiento y los extremos relativos.

b) A la vista de la gráfica, indica cuántos puntos de inflexión posee la función.

a) Dominio: $\mathbb{R}$.

Punto de corte con los ejes: $(0,0)$

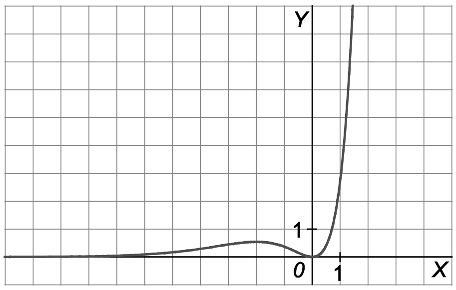
No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

$y=0$ es asíntota horizontal en $-\infty$.

$f'(x)=\left(x^2+2x\right)e^x=0\Rightarrow x=0\ \ x=-2$

Crece en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y decrece en $(-2,0)$.

Máximo: $\left(-2,4e^{-2}\right)$. Mínimo: $(0,0)$



b) Tiene dos puntos de inflexión.

Funciones logarítmicas

75. Realiza el estudio completo de la función $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ y traza su gráfica.

Dominio: $D(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Simetría: *f* es par.

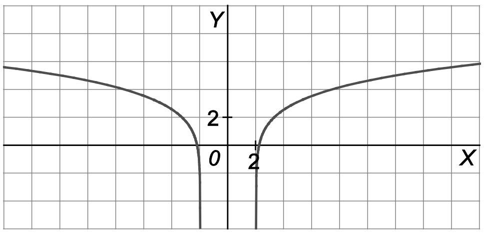
Puntos de corte con los ejes: $\left(-\sqrt{5}, 0\right)$, $\left(\sqrt{5}, 0\right)$

Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$.

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x = 0$ que no es un punto del dominio.

Decrece en $(-\infty, -2)$ y crece en $(2, +\infty)$. No tiene extremos relativos.

$f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)} \neq 0 \Rightarrow$ No tiene puntos de inflexión. Cóncava hacia abajo en todo su dominio.



76. Haz un estudio completo de la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$ y dibuja su gráfica.

Dominio: $D(f) = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

Simetría: No es par ni impar.

No tiene puntos de corte con los ejes.

Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 1$

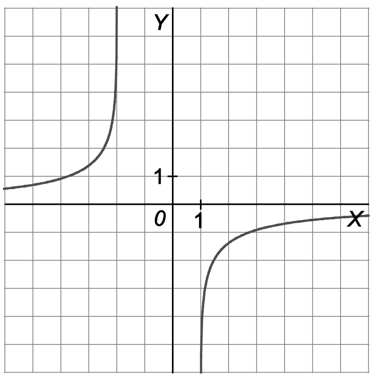
Asíntota horizontal: $y = 0$ en $+\infty$ y en $-\infty$

$f'(x) = \dfrac{3}{(x-1)(x+2)} \neq 0$

Es creciente en todo el dominio. No tiene extremos relativos.

$f''(x) = -\dfrac{6x+3}{(x-1)^2(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ que no es un punto del dominio.

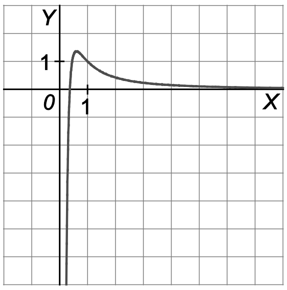
Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$ y cóncava hacia abajo en $(1, +\infty)$. No tiene puntos de inflexión.



77. Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$, estudiando previamente su dominio, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas, el crecimiento y los extremos relativos.

Dominio: $D(f)=(0,+\infty)$

Puntos de corte con los ejes: $\left(\dfrac{1}{e},0\right)$



Asíntota vertical: $x=0$

$f'(x)=\dfrac{-1-2\ln x}{x^3}=0 \Rightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$

Crece en $\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right)$ y decrece en $\left(e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$. Máximo relativo en $\left(e^{-\frac{1}{2}},\dfrac{e}{2}\right)$.

$f''(x)=\dfrac{1+6\ln x}{x^4}=0 \Rightarrow x=e^{-\frac{1}{6}}$

Cóncava hacia abajo en $\left(0,e^{-\frac{1}{6}}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(e^{-\frac{1}{6}},+\infty\right)$. Punto de inflexión $\left(e^{-\frac{1}{6}},\dfrac{5\sqrt[3]{e}}{6}\right)$.

Funciones trigonométricas y sus inversas

78. Dada la función $f(x)=2\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}(2x)$, traza su gráfica estudiando previamente las simetrías y periodicidad, los puntos de corte con los ejes y los extremos relativos.

Simetría: *f* es impar.

Periodicidad: *f* es periódica de período 2π.

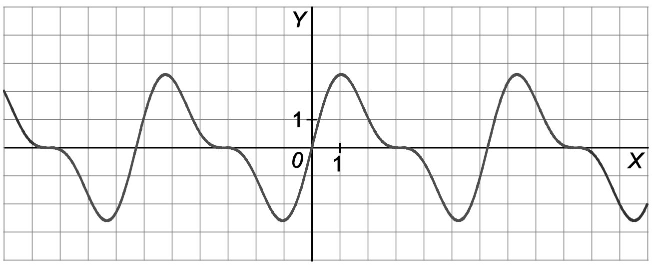
Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$, $(\pi,0)$ porque:

$$2\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x=0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} x+2\operatorname{sen} x\cos x=0 \Rightarrow \begin{cases}\operatorname{sen} x=0 \Rightarrow x=0, x=\pi\\ \cos x=-1 \Rightarrow x=\pi\end{cases}$$

$f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=0 \Rightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases}\cos x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3}, x=\dfrac{5\pi}{3}\\ \cos x=-1 \Rightarrow x=\pi\end{cases}$$

Crece en $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{3},2\pi\right)$ y decrece en $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}\right)$. Máximo $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ y mínimo $\left(\dfrac{5\pi}{3},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.



79. Dada la función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}$, dibuja su gráfica estudiando previamente la periodicidad, las asíntotas verticales, los puntos de corte con los ejes y los extremos relativos.

Periodicidad: *f* es periódica de período 2π.

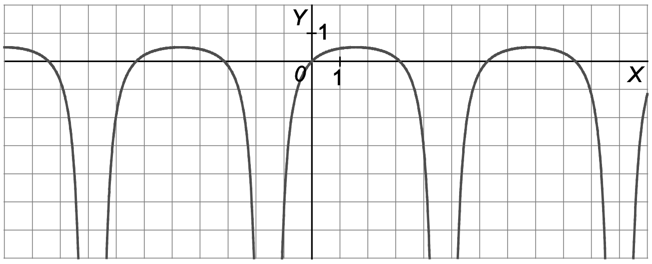
Asíntota vertical $x=\dfrac{3\pi}{2}$ por la izquierda y por la derecha porque:

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}=-\infty \text{ y } \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}=-\infty$$

Puntos de corte con los ejes en $[0,2\pi)$: $(0,0)$, $(\pi,0)$ porque: $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}=0\Rightarrow \operatorname{sen} x=0\Rightarrow x=0, x=\pi$

$f'(x)=\dfrac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$.

Crece en $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ y decrece en $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Máximo relativo en $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

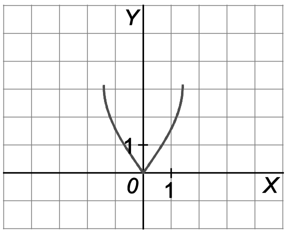


80. Traza las gráficas de las siguientes funciones.

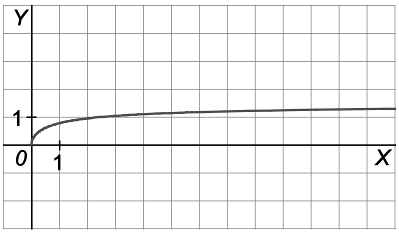
a) $f(x)=\arccos\left(1-x^2\right)$

b) $f(x)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x}\right)$

a)



b)



Síntesis

81. Dada la función $f(x)=\frac{1}{8}x^4+ax^3-2x^2+bx-\frac{14}{3}$:

a) Calcula los valores de *a* y *b* para que tenga un punto de inflexión en $(-2,0)$. Utiliza los valores hallados para *a* y *b* en el resto de los apartados.

b) Para los valores hallados de *a* y *b*, traza la gráfica de *f* estudiando previamente el crecimiento, los extremos relativos, la concavidad y los puntos de inflexión.

c) ¿En cuántos puntos corta *f* al eje de abscisas?

$f'(x)=\frac{1}{2}x^3+3ax^2-4x+b$, $f''(x)=\frac{3}{2}x^2+6ax-4$

a) $f''(-2)=6-12a-4=0\Rightarrow a=\frac{1}{6}$ y $f(-2)=0\Rightarrow 2+\frac{1}{6}\cdot(-8)-8-2b-\frac{14}{3}=0\Rightarrow b=-6$

Por tanto, $f(x)=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{6}x^3-2x^2-6x-\frac{14}{3}$

b) $f'(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2-4x-6\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(x-3)(x+2)^2$.

Decrece en $(-\infty,3)$ y crece en $(3,+\infty)$.

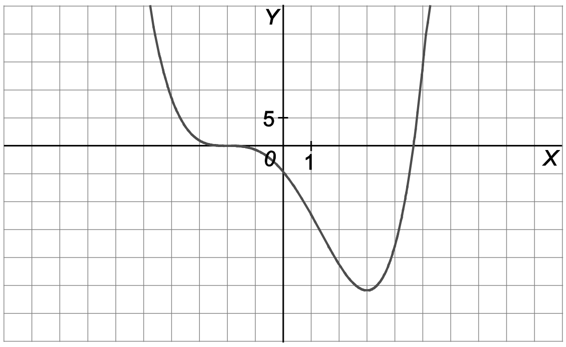
Mínimo en $\left(3,-\frac{625}{24}\right)$

$f''(x)=\frac{3}{2}x^2+x-4=0\Rightarrow x=\frac{4}{3}$, $x=-2$.

Cóncava hacia arriba en $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$

Cóncava hacia abajo en $\left(-2,\frac{4}{3}\right)$

Puntos de inflexión $(-2,0)$ y $\left(\frac{4}{3},-\frac{1250}{81}\right)$.



c) Tiene dos puntos de corte con el eje de abscisas.

82. Calcula el valor de *k* para que la recta *y* = 2*x* – 5 sea asíntota oblicua de la función: $f(x)=\frac{2x^3+kx^2+7x+3k}{x^2+3}$

Estudia el resto de asíntotas de *f*, si es que existen.

$f(x)=\frac{2x^3+kx^2+7x+3k}{x^2+3}=2x+k+\frac{x}{x^2+3}\Rightarrow k=-5$

No tiene asíntotas verticales porque $D(f)=\mathbb{R}$.

No tiene asíntotas horizontales porque:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+5x^2+7x+15}{x^2+3}=+\infty \text{ y } \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+5x^2+7x+15}{x^2+3}=-\infty$$

83. Halla el valor de *k* para que $f(x)=\dfrac{2x+k}{\sqrt{x-1}}$ tenga un extremo relativo en $x=\dfrac{5}{2}$. ¿Qué tipo de extremo es?

Para el valor de *k* hallado, determina el dominio, las asíntotas, el crecimiento de *f* y traza su gráfica.

$f'(x)=\dfrac{2x-k-4}{2\sqrt{(x-1)^3}}$, $f'\left(\dfrac{5}{2}\right)=0 \Rightarrow k=1$. Es un mínimo.

Dominio: $(1,+\infty)$

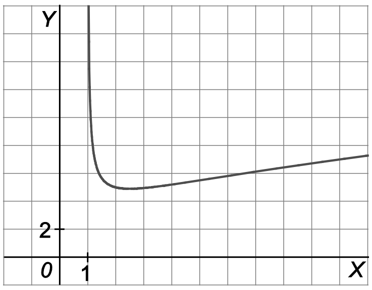
Asíntota vertical: $x=1$.

No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

Crece en $\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$ y decrece en $\left(1,\dfrac{5}{2}\right)$.

$f''(x)=\dfrac{11-2x}{4\sqrt{(x-1)^5}}=0 \Rightarrow x=\dfrac{11}{2}$. Punto de inflexión $\left(\dfrac{11}{2},4\sqrt{2}\right)$.

Cóncava hacia arriba en $\left(1,\dfrac{11}{2}\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(\dfrac{11}{2},+\infty\right)$.



84. Para la función $f(x)=\dfrac{2x+k}{x^2-2x+1}$:

a) Halla el valor de *k* para que *f* tenga un máximo relativo en el punto $x=2$. ¿Cuál es el valor de este máximo?

b) Estudia, si es que existen, el resto de extremos relativos de la función.

a) $f(x)=\dfrac{2x+k}{x^2-2x+1}=\dfrac{2x+k}{(x-1)^2}$, $f'(x)=\dfrac{-2(x+k+1)}{(x-1)^3} \Rightarrow f'(2)=-6-2k=0 \Rightarrow k=-3$.

Se puede observar que a la izquierda de 2 la función crece y a la derecha decrece.

El valor de la función en $x=2$ es 1.

b) $f'(x)=\dfrac{-2(x-2)}{(x-1)^3}=0 \Rightarrow x=2$.

Por tanto, la función no tiene más extremos relativos.

85. Calcula, si es que existen, el valor o los valores de *k* para que la función $f(x)=\dfrac{x+k}{e^x}$:

a) Tenga un máximo relativo en $x=-2$.

b) Tenga un punto de inflexión en $x=1$.

c) Tenga la asíntota horizontal $y=0$ en $+\infty$.

d) Tenga la asíntota horizontal $y=0$ en $-\infty$.

a) $f'(x)=\dfrac{1-x-k}{e^x}$, $f'(-2)=\dfrac{1-(-2)-k}{e^{-2}}=0 \Rightarrow k=3$

b) $f''(x)=\dfrac{-2+x+k}{e^x}$, $f''(1)=\dfrac{-2+1+k}{e^x}=0 \Rightarrow k=1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+k}{e^x}=0$ para cualquier valor real de k

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+k}{e^x}=-\infty$. Por tanto, no existe ningún valor de k para que $y=0$ sea asíntota horizontal en $-\infty$.

86. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+k}{e^x}$:

a) Halla el valor de *k* para que tenga un punto de inflexión en $x=0$.

b) Para el valor de *k* obtenido, traza la gráfica de la función estudiando previamente el dominio, los puntos de corte con los ejes, el signo, las asíntotas, la concavidad y los puntos de inflexión.

c) A la vista de la gráfica, indica cuántos máximos y mínimos relativos tiene *f*.

d) A la vista de la gráfica, indica, si es que existe, el valor del máximo y mínimo absoluto de *f*.

a) $f'(x)=-\dfrac{x^2-2x+k}{e^x}$, $f''(x)=\dfrac{x^2-4x+k+2}{e^x}$, $f''(0)=0 \Rightarrow k+2=0 \Rightarrow k=-2$. Luego $f(x)=\dfrac{x^2-2}{e^x}$

b) Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

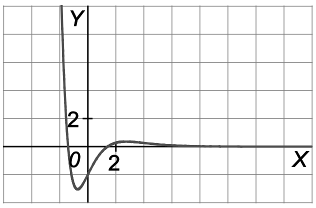
Puntos de corte con los ejes: $(0,-2)$, $\left(-\sqrt{2},0\right)$, $\left(\sqrt{2},0\right)$.

Signo: $f>0$ en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$ y $f<0$ en $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

Asíntota horizontal $y=0$ en $+\infty$.

Cóncava hacia arriba en $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(0,+\infty)$.

Puntos de inflexión: $(0,-2)$, $\left(4,\dfrac{14}{e^4}\right)$.



c) Máximo relativo: $\left(1+\sqrt{3};0,36\right)$. Mínimo relativo: $(-0,73;-3,04)$.

d) No tiene máximo absoluto y el mínimo absoluto vale $-3,04$.

87. Halla el valor de k para que $f(x)=\dfrac{k+\ln x}{x^2}$ tenga en $x=e$ un máximo relativo. ¿Cuál es su valor?

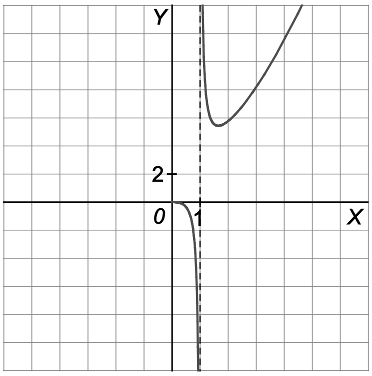
$f'(x)=\dfrac{1-2k-2\ln x}{x^3}$, $f'(e)=\dfrac{1-2k-2}{e^3}=0\Rightarrow 1-2k-2=0\Rightarrow k=-\dfrac{1}{2}$

A la izquierda de $x=e$ la función crece y a la derecha la función decrece.

Luego es un máximo y su valor es $\dfrac{1}{2e^2}$.

88. Halla el valor de k para que $f(x)=\dfrac{x^2+k}{\ln x}$ tenga un extremo relativo en $x=\sqrt{e}$. Para el valor encontrado traza la gráfica.

$f'(x)=\dfrac{2x^2\ln x-x^2-k}{x(\ln x)^2}$, $f'\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{2e\cdot\dfrac{1}{2}-e-k}{\dfrac{\sqrt{e}}{4}}=0\Rightarrow k=0.$



Dominio: $(0,1)\cup(1,+\infty)$

No tiene puntos de corte con los ejes.

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2}{\ln x}=\dfrac{0}{0}(\text{indet.})=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}2x^2=0$

Asíntota vertical: $x=1$

Decrece en $(0,1)\cup\left(1,\sqrt{e}\right)$ y crece en $\left(\sqrt{e},+\infty\right)$. Mínimo $\left(\sqrt{e},2e\right)$.

$f''(x)=\dfrac{2(\ln x)^2-3\ln x+2}{(\ln x)^3}$. No tiene solución real, por tanto, no hay puntos de inflexión.

89. Dada la función $f(x)=e^{\operatorname{sen}x}$.

a) Estudia su dominio, continuidad y su periodicidad.

b) ¿Por qué no posee ningún tipo de asíntota?

c) Estudiando previamente sus puntos de corte con los ejes y extremos relativos, traza la gráfica de f.

a) Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$. Es continua en todo el dominio.

$f(x+2\pi)=e^{\operatorname{sen}(x+2\pi)}=e^{\operatorname{sen}x}=f(x)$. Función periódica de periodo 2π.

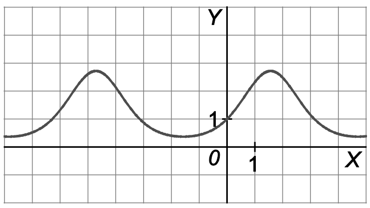
b) No tiene ningún tipo de asíntota porque el dominio es $\mathbb{R}$ y $\nexists\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

c) Puntos de corte: $(0,1)$

$f'(x)=\cos x e^{\operatorname{sen}x}=0\Rightarrow\cos x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2},x=\dfrac{3\pi}{2}$

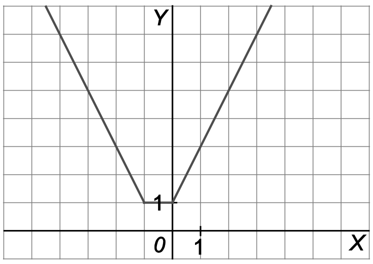
Crece en $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ y decrece en $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Máximo: $\left(\dfrac{\pi}{2},e\right)$. Mínimo: $\left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{1}{e}\right)$.



90. Expresa la función $f(x)=|x|+|x+1|$ como una función definida a trozos, y traza su gráfica estudiando sus extremos relativos. Determina también el máximo y el mínimo absolutos de *f*.

$$f(x)=\begin{cases}-2x-1 & \text{si } x\le -1\\ 1 & \text{si } -1<x<0\\ 2x+1 & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$

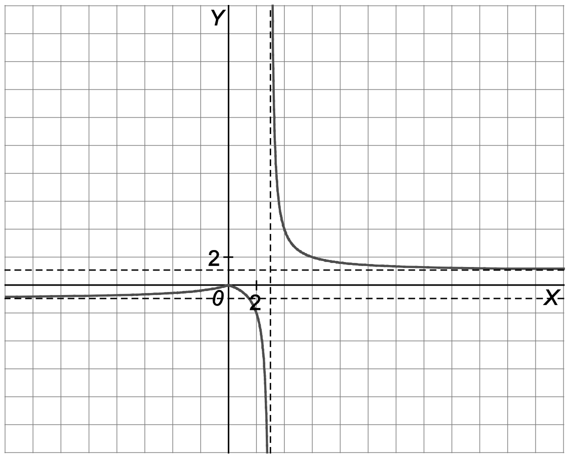


Los extremos relativos se encuentran en los puntos tales que $f'(x)=0$ más aquellos puntos del dominio donde no existe la derivada. Por tanto, todos los valores de x pertenecientes al intervalo $[-1,0]$ son puntos donde alcanza un mínimo relativo ya que en sus cercanías, a la derecha y a la izquierda, la función no toma valores menores.

La función no posee máximo absoluto. El mínimo absoluto de la función es 1 y se alcanza en cualquiera de los puntos del intervalo $[-1,0]$.

91. Traza la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{|x|}{x-3}$ estudiando previamente su dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas, crecimiento y extremos relativos.

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{x-3} & \text{si } x<0\\ \dfrac{x}{x-3} & \text{si } 0\le x\end{cases}$$



Dominio: $D(f)=\mathbb{R}-\{3\}$

Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$

Asíntotas:

Verticales: $x=3$ porque $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x|}{x-3}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{|x|}{x-3}=-\infty$

Horizontales: $y=1$ en $+\infty$. $y=-1$ en $-\infty$.

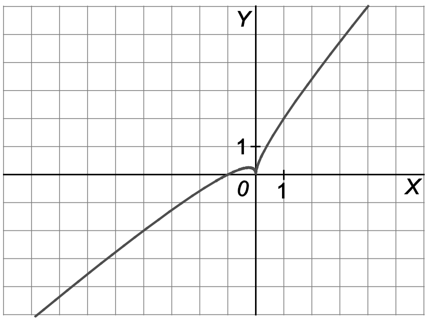
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{(x-3)^2} & \text{si } x<0\\ -\dfrac{3}{(x-3)^2} & \text{si } 0<x\end{cases}.$$

No existe $f'(0)$ porque $f'(0^-)=\dfrac{1}{3}$ y $f'(0^+)=-\dfrac{1}{3}$. $x=0$ es un punto crítico.

Creciente en $(-\infty,0)$ y decrece en $(0,3)\cup(3,+\infty)$. Máximo relativo en $x=0$.

92. Dada la función $f(x) = x + \sqrt{|x|}$, traza su gráfica estudiando previamente su dominio, cortes con los ejes, existencia de asíntotas y extremos relativos.

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ x + \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Dominio: $\mathbb{R}$

Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$, $(-1, 0)$.

No tiene asíntotas.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 + \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}. \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Los puntos críticos son $x = -\frac{1}{4}$ y $x = 0$ (ya que no existe $f'(0)$).

Crece en $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup (0, +\infty)$ y decrece en $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$. Máximo relativo en $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Mínimo relativo en $(0, 0)$.

93. Dada la función $f(x) = |\text{sen}(x + \pi)| + 1$.

a) Establece su período.

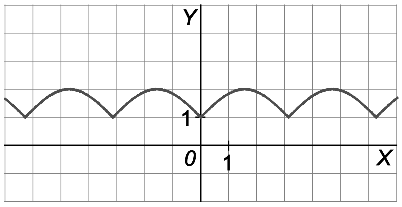
b) Determina sus puntos de corte con los ejes.

c) Dibuja la gráfica de la función.

a) $f(x + \pi) = |\text{sen}(x + \pi + \pi)| + 1 = |-\text{sen}(x + \pi)| + 1 = |\text{sen}(x + \pi)| + 1 = f(x)$. Período $T = \pi$.

b) Puntos de corte con los ejes: $(0, 1)$.

c) $f(x) = \text{sen}(x + \pi) + 1 \quad 0 \leq x < \pi$



Dominio: $\mathbb{R}$

No tiene asíntotas.

$f'(x) = -\cos x$. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Los puntos críticos son $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ y $x = \pi$ (ya que no existen $f'(0)$ ni $f'(\pi)$)

Crece en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y decrece en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Máximo en $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$. Mínimos en $(0, 1)$, $(\pi, 1)$.

CUESTIONES

94. **a)** ¿Puede una función cortar a una asíntota horizontal suya? En caso afirmativo, muestra un ejemplo y en caso negativo explica la razón.

b) ¿Puede una función cortar a alguna de sus asíntotas verticales? En caso afirmativo, muestra un ejemplo y en caso negativo, explica la razón.

a) Sí puede ser cortada por alguna rama de la función. Por ejemplo, $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+3}$, la asíntota en $+\infty$ es $y=1$

$\dfrac{x^2+x}{x^2+3}=1\Rightarrow x^2+x=x^2+3\Rightarrow x=3$. Luego la función corta a la asíntota en $(3,1)$.

b) Sí puede una función cortar a alguna de las asíntotas verticales. Por ejemplo, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$. Por tanto, $x=0$ es una asíntota vertical y la función corta a la asíntota en $(0,0)$.

95. **Se considera la función $y=f(x)$ de la cual se sabe que es una función par. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.**

a) Si la función tiene una asíntota vertical en $x=a$, entonces también tiene asíntota vertical $x=-a$.

b) Si la función tiene la asíntota horizontal $y=b$ en $+\infty$, también tiene la asíntota horizontal $y=-b$ en $-\infty$.

c) Si la función tiene un máximo relativo en $(-2, 4)$ tiene también un máximo relativo en $(2, 4)$.

d) Si la función es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-3,-1)$ entonces es cóncava hacia abajo en $(1, 3)$.

a) Verdadero, porque $\lim\limits_{x\to -a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} f(-x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

b) Falso, porque $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} f(-x)=\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=b$.

c) Verdadero, porque $f(-2)=f(2)=4$ y es simétrica respecto del eje *Y.*

d) Falso, porque la función es par y por tanto simétrica respecto del eje *Y*, luego es cóncava hacia arriba en $(1,3)$.

96. **Se considera una función impar *f*. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.**

a) Si $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$ entonces $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$

b) Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-3$ entonces $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=3$

c) Si *f* tiene un máximo relativo en $(-3,10)$, entonces también tiene un máximo relativo en $(3,10)$.

d) Si la función es creciente en el intervalo $(-5,-2)$ entonces es decreciente en el intervalo $(2,5)$.

a) Falso, porque $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-(-\infty)=+\infty$

b) Verdadero, porque $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} f(-x)=-\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-(-3)=3$

c) Falso, porque es impar y $f(3)=-f(-3)=-10$.

d) Falso, porque la derivada es par y entonces $f'(x)>0$ en $(2,5)$.

97. Si la función $f(x)$ tiene como asíntota oblicua en $+\infty$ la recta $y = 2x + 1$, ¿qué asíntota oblicua en $+\infty$ tendrá la función $g(x) = f(x+3)$?

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+3)}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t-3} = 2$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} \left(g(x) - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x+3) - 2x\right) = \lim_{t\to+\infty} \left(f(t) - 2(t-3)\right) = \lim_{t\to+\infty} \left(f(t) - 2t\right) + 6 = 1 + 6 = 7$$

Luego la asíntota oblicua es $y = 2x + 7$.

98. Si la función $f(x)$ tiene como asíntotas oblicuas $y = x$ en $+\infty$ e $y = -x$ en $-\infty$. ¿Tendrá la función $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ asíntotas horizontales u oblicuas? Indica cuáles son.

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, pendiente de la asíntota oblicua en $+\infty$.

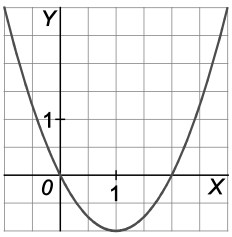
$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$, pendiente de la asíntota oblicua en $-\infty$.

Luego tiene asíntotas horizontales $y = 1$ en $+\infty$ e $y = -1$ en $-\infty$.

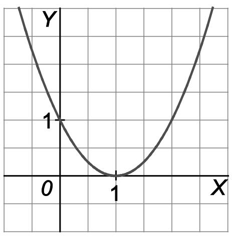
99. Las siguientes figuras representan las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = (x-1)^2 - 1$, $h(x) = |x^2 - 1|$ y $j(x) = (x-1)^2$.

Indica cuál es la gráfica que corresponde a cada una de ellas.

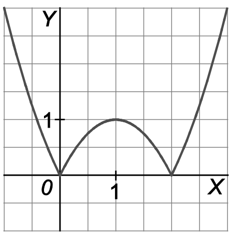
a)



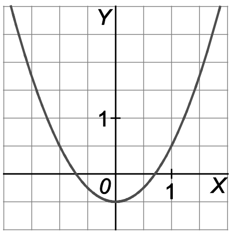
c)



b)



d)



a) $g(x) = (x-1)^2 - 1$ **b)** $h(x) = |x^2 - 1|$ **c)** $j(x) = (x-1)^2$ **d)** $f(x) = x^2 - 1$

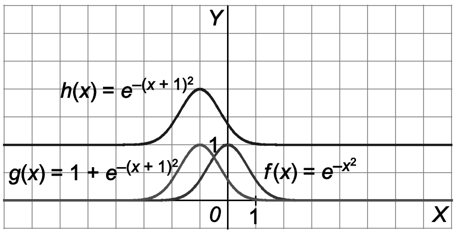
PROBLEMAS

100. Dibuja $f(x)=e^{-x^2}$ obteniendo sus asíntotas y extremos relativos. Con la ayuda de dicha gráfica, dibuja las funciones:

a) $g(x)=e^{-(x+1)^2}$ **b)** $h(x)=1+e^{-(x+1)^2}$

Asíntota horizontal: $y=0$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

Máximo relativo: $(0,1)$.



101. Construye la gráfica de una función que cumpla todos y cada uno de los siguientes requisitos:

I. $D(f)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

II. $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

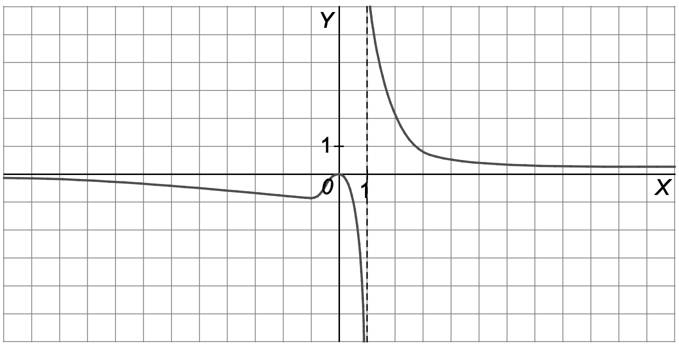
III. $\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)=0$

IV. Tiene un máximo relativo en $(0,0)$.

V. Tiene un mínimo relativo en $x=\sqrt[3]{-2}$.

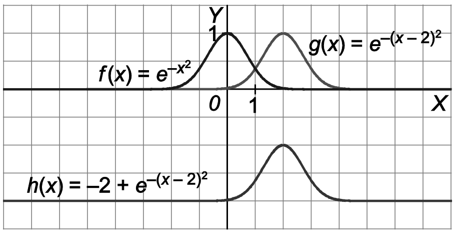
VI. Es creciente en el intervalo $\left(\sqrt[3]{-2},0\right)$

VII. Es decreciente en $\left(-\infty,\sqrt[3]{-2}\right)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

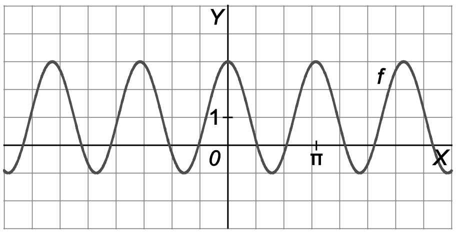


102. Dibuja la función $f(x) = e^{-x^2}$ obteniendo sus asíntotas y el crecimiento de *f*. Con la ayuda de dicha gráfica, dibuja las funciones:

a) $g(x) = e^{-(x-2)^2}$ **b)** $h(x) = -2 + e^{-(x-2)^2}$



103. Sabiendo que la función que aparece en la gráfica es del tipo $f(x) = a + b\,\text{sen}(cx + d)$, determina los valores de *a*, *b*, *c* y *d*.



Se considera la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}\,x$. Si se comprime horizontalmente a la mitad, se traslada $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda, se dilata verticalmente al doble y, finalmente, se desplaza una unidad hacia arriba, se obtiene la gráfica dada.

Por tanto, $f(x) = 1 + 2\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ y los valores buscados son $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, $d = \frac{\pi}{2}$.

104. Partiendo de la gráfica de $y = \cos x$, construye las gráficas de:

a) $y = \cos(x + \pi)$

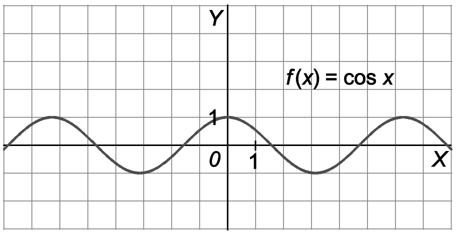
b) $y = 2\cos x$

c) $y = \cos(2x)$

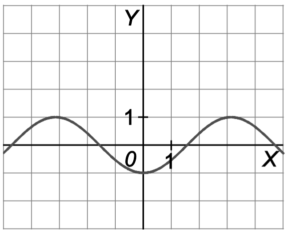
d) $y = \dfrac{1}{2}\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

e) $y = |\cos x|$

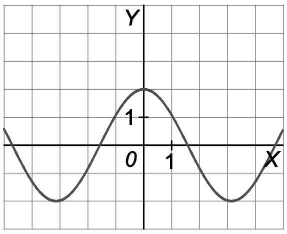
f) $y = \cos|x|$



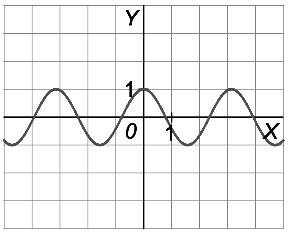
a)



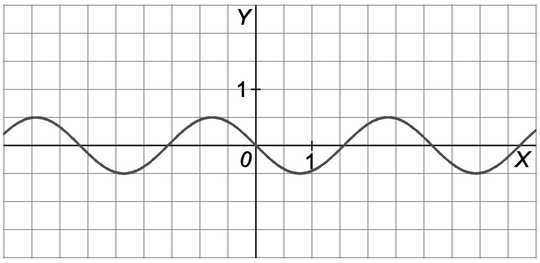
b)



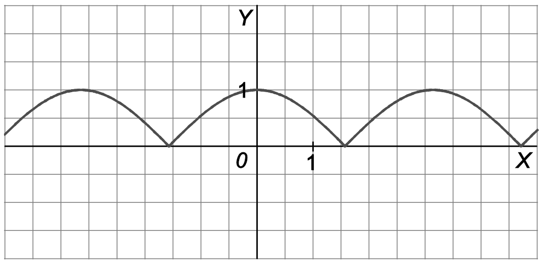
c)



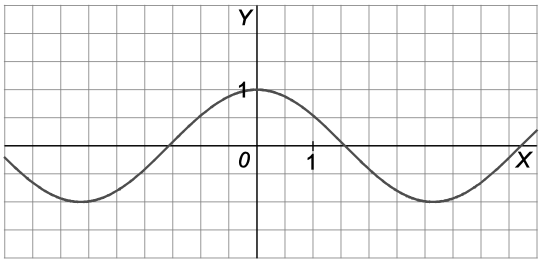
d)



e)



f)



105. En cierto momento, el número de bacterias en un cultivo es de 3000. Debido a ciertas condiciones ambientales, este número evoluciona según el modelo $N(t) = 3 - \dfrac{2\ln(t+1)}{t+1}$ donde *t* representa los días que han pasado desde el instante inicial y $N(t)$ representa los miles de individuos que hay en cada momento.

a) Comprueba que, efectivamente en el momento inicial hay 3000 individuos.

b) Estudia si, con el paso de los días, la población se estabiliza e indica hacia qué valor.

c) En qué momento la población es la menor posible. ¿Cuál es dicha población?

d) Dibuja la gráfica correspondiente e interprétala.

a) $N(0) = 3 - \dfrac{2\ln 1}{1} = 3$. Luego hay 3000 bacterias en el momento inicial.

b) $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = 3 - \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{2\ln(t+1}{t+1} = 3 - 0 = 3$. Se estabiliza en 3000 individuos.

c) $N'(t) = \dfrac{2\ln(t+1) - 2}{(t+1)^2} = 0 \Rightarrow 2\ln(t+1) - 2 = 0 \Rightarrow \ln(t+1) = 1 \Rightarrow t+1 = e \Rightarrow t = e-1$.

Como la función decrece en $(0, e-1)$ y crece en $(e-1, +\infty)$, entonces hay un mínimo en $t = e-1$.

La población es $N(e-1) = 3 - \dfrac{2\ln(e-1+1)}{e-1+1} = 3 - \dfrac{2}{e} \simeq 2{,}264$, es decir, 2264 bacterias aproximadamente.

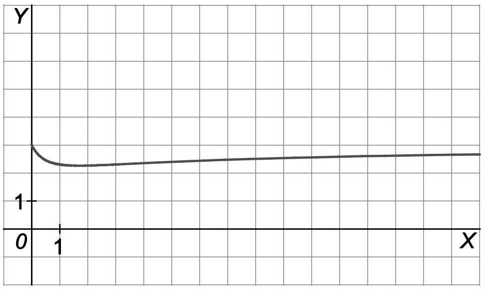
d) Dominio: $D(N(t)) = [0, +\infty)$

Puntos de corte con los ejes: $(0,3)$

Asíntota horizontal: $N(t) = 3$ en $+\infty$

Decrece en $(0, e-1)$ y crece en $(e-1, +\infty)$. Mínimo en $\left(e-1, 3 - \dfrac{2}{e}\right)$.

Inicialmente hay una población de 3000 bacterias que va descendiendo hasta, aproximadamente, el segundo día, cuando alcanza una población aproximada de 2264 bacterias. A partir de este momento, la población de bacterias en el cultivo aumenta hasta estabilizarse en 3000 bacterias.



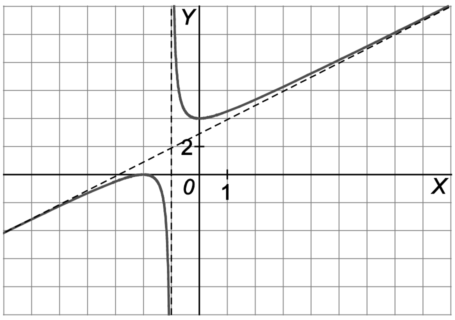
PARA PROFUNDIZAR

106. Dibuja la gráfica de las funciones:

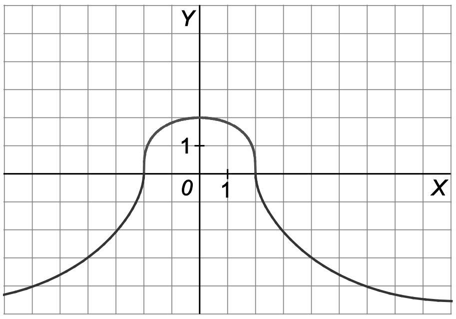
a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{8}{4 + e^{-x}}$ **e)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + \ln x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{8 - 2x^2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ **f)** $f(x) = \operatorname{sen} x \sqrt{\cos x}$

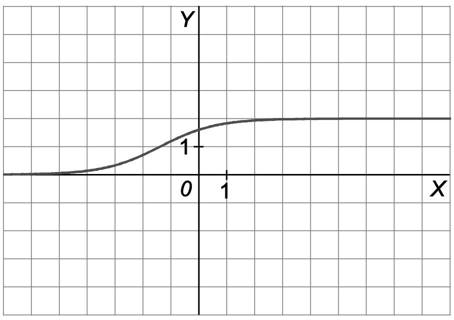
a)



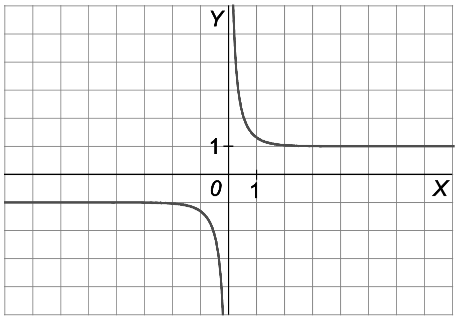
b)



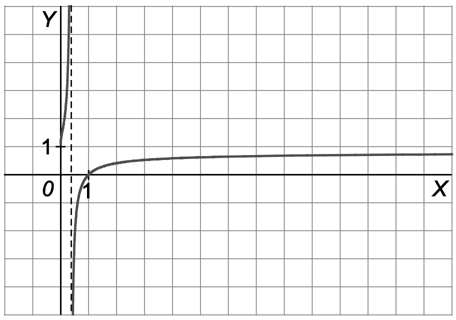
c)



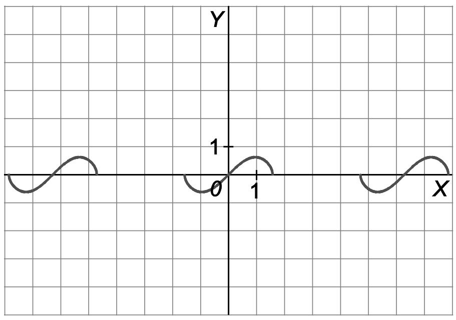
d)



e)



f)



107. Demuestra la igualdad algebraica: $\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a - b$

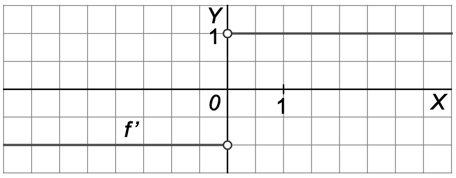
Apoyándote en la igualdad anterior, demuestra que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1}$.

$$\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2} - \sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2} - \sqrt[3]{b^3} = a - b$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x^3-1}\right) = \infty - \infty \text{(indet.)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x^3-1}\right)\left(\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2} + \sqrt[3]{x^6-1} + \sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2} + \sqrt[3]{x^6-1} + \sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}} =$$

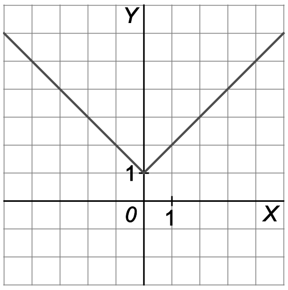
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 1 - \left(x^3 - 1\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2} + \sqrt[3]{x^6-1} + \sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2} + \sqrt[3]{x^6-1} + \sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}} = 0$$

108. De una función $f(x)$ continua en todo $\mathbb{R}$ se conoce la gráfica de su derivada (figura adjunta). Se sabe, además, que $f(0)=1$. Dibuja la gráfica de $f(x)$ y encuentra su expresión analítica.



$$f(x)=\begin{cases} x+a & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ -x+b & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Como la función debe ser continua en 0, entonces $a=b=1 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\geq 0 \\ -x+1 & \text{si } x<0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=|x|+1$.



109. Se consideran las funciones *f*, periódica con período *T*, y *g* otra función cualquiera:

a) Demuestra que $(g\circ f)(x)$ es una función periódica. ¿Es $(f\circ g)(x)$ periódica?

b) Aplicando la propiedad indicada en el apartado a, demuestra que $f(x)=e^{\text{sen}\,x}$ es periódica

c) ¿Se puede aplicar la propiedad anterior a $f(x)=\text{sen}(\ln x)$.

a) $(g\circ f)(x+T)=g(f(x+T))=g(f(x))=(g\circ f)(x) \Rightarrow g\circ f$ es periódica de período *T*.

En general, $(f\circ g)(x)$ no es periódica.

b) $f(x)=\text{sen}\,x$ es periódica de período 2π. Como $g(x)=e^x$, por el apartado a, $(g\circ f)(x)=e^{\text{sen}\,x}$ es periódica de período 2π.

c) No. Para poder aplicarla, a la *x* debe afectarle directamente una función periódica.

Autoevaluación

Comprueba qué has aprendido

1. Determina el dominio y las posibles asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3}{8-x^2}$ **b)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x}$

a) Se trata de una función racional. Por tanto:

Dominio: $8-x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{8} \\ x=-\sqrt{8} \end{cases} \Rightarrow D(f)=\left(-\infty,-\sqrt{8}\right)\cup\left(-\sqrt{8},\sqrt{8}\right)\cup\left(\sqrt{8},+\infty\right)$

Asíntotas: Verticales $x=\sqrt{8}$, $x=-\sqrt{8}$

Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

Oblicuas: $f(x)=\dfrac{2x^3}{8-x^2}=-2x+\dfrac{16x}{8-x^2}\Rightarrow y=-2x$ es asíntota oblicua.

b) Como $x^2+1>0\Rightarrow$ el numerador de la función siempre existe. Por otra parte, el denominador se anula para $x=0$. Por tanto: $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Asíntotas: Verticales $x=0$ ya que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$.

Horizontales: $y=\dfrac{1}{2}$ en $+\infty$ ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x}=\dfrac{\sqrt{1}}{2}=\dfrac{1}{2}$

$y=-\dfrac{1}{2}$ en $-\infty$ ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{-2x}=\dfrac{\sqrt{1}}{-2}=-\dfrac{1}{2}$

Obviamente, no tiene asíntotas oblicuas.

2. Traza la gráfica de la función polinómica $f(x)=(x-1)^2(x+1)$ realizando, previamente, un estudio completo de la misma.

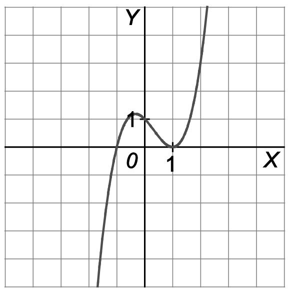
Dominios: $D(f)=\mathbb{R}$

Puntos de corte con los ejes: $(1,0)$, $(-1,0)$ y $(0,1)$

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=(x-1)(3x+1)=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{3}$, $x=1$.

Crece en $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$.

Mínimo: $(1,0)$. Máximo: $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{32}{27}\right)$.



Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=6x-2=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}$.

Cóncava hacia arriba en $\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$. Punto de inflexión: $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{16}{27}\right)$.

3. **Dibuja la gráfica de la función racional $f(x)=\dfrac{x^2+8}{x+1}$, tras realizar un estudio completo de la misma.**

Dominio: $D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

Simetrías: La función no es par ni impar.

Puntos de corte con los ejes: $(0,8)$.

Asíntotas:

Verticales: $x=-1$

Horizontales: No tiene.

Oblicua: $y=x-1$, ya que $f(x)=\dfrac{x^2+8}{x+1}=x-1+\dfrac{9}{x+1}$

Puntos singulares y crecimiento:

$$f'(x)=\frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}=0 \Rightarrow x=-4,\ x=2$$

Crece en $(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $(-4,-1)\cup(-1,2)$.

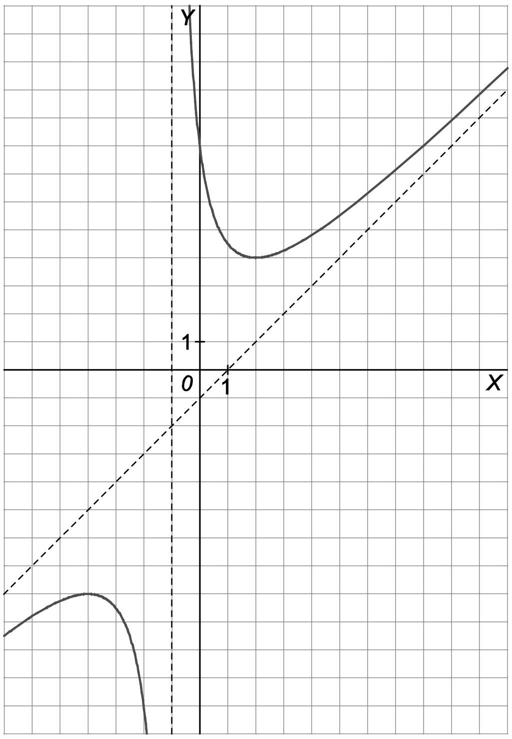
Máximo en $(-4,-8)$. Mínimo en $(2,4)$

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{18}{(x+1)^3}\neq 0$

Cóncava hacia abajo en $(-\infty,-1)$ y

cóncava hacia arriba en $(-1,+\infty)$.

No tiene puntos de inflexión.



4. **Calcula, en cada caso, los posibles valores de *a* y *b* para que la función racional $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x+b}$ tenga:**

a) Por asíntota oblicua la recta $y=x-2$.

b) Un máximo relativo en el puno $(-1,-1)$.

a) $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x+b}=x-b+\dfrac{b^2+a}{x+b}$. Para cualquier valor de *a* y $b=2$, la función tiene una asíntota oblicua $y=x-2$.

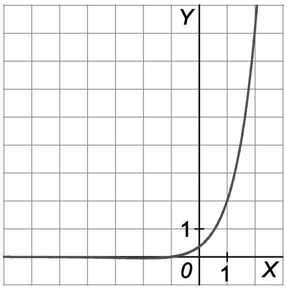
b) $f'(x)=\dfrac{x^2+2xb-a}{(x+b)^2}$

$\begin{cases} f(-1)=-1 \\ f'(-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1+a}{-1+b}=-1 \\ \dfrac{1-2b-a}{-1+b}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-b \\ a=1-2b \end{cases} \Rightarrow a=-1,\ b=1.$ Con estos valores la función sería $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}=x-1$ si $x\neq -1$ y no existe en el punto en el que debería tener un máximo.

5. Realiza un estudio completo de la función $f(x)=(x+1)e^{x-1}$ y con los resultados obtenidos, traza su gráfica.

Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

Puntos de corte con los ejes: $(-1,0)$, $(0,e^{-1})$



Asíntotas:

Horizontales: $y=0$ en $-\infty$, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=(x+2)e^{x-1}=0 \Rightarrow x=-2$.

Decrece en $(-\infty,-2)$ y crece en $(-2,+\infty)$. Mínimo $\left(-2,-\frac{1}{e^3}\right)$.

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=(x+3)e^{x-1}=0 \Rightarrow x=-3$.

Cóncava hacia abajo en $(-\infty,-3)$ y cóncava hacia arriba en $(-3,+\infty)$. Punto de inflexión: $\left(-3,-\frac{2}{e^4}\right)$.

6. Dada la función $f(x)=\dfrac{\ln(x^4)}{x^2}$, dibuja su gráfica tras hacer un estudio completo de la misma.

Dominio: $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

Simetrías: *f* es par pues $f(-x)=\dfrac{\ln((-x)^4)}{(-x)^2}=\dfrac{\ln(x^4)}{x^2}=f(x)$.

Puntos de corte con los ejes: $(-1,0)$, $(1,0)$

Asíntotas:

Verticales: $x=0$ ya que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x^4)}{x^2}=-\infty$

Horizontales: $y=0$

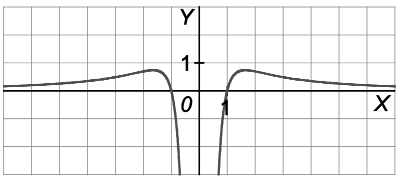
Puntos singulares y crecimiento: $f'(x)=\dfrac{4-4\ln(x^2)}{x^3}=0 \Rightarrow x=\sqrt{e}, x=-\sqrt{e}$

Crece en $\left(-\infty,-\sqrt{e}\right)\cup\left(0,\sqrt{e}\right)$ y decrece en $\left(-\sqrt{e},0\right)\cup\left(\sqrt{e},+\infty\right)$. Máximo en: $\left(-\sqrt{e},\frac{2}{e}\right)$, $\left(\sqrt{e},\frac{2}{e}\right)$.

Puntos de inflexión y concavidad: $f''(x)=\dfrac{-20+12\ln(x^2)}{x^4}=0 \Rightarrow x=-\sqrt{e^{\frac{5}{3}}}\ x=\sqrt{e^{\frac{5}{3}}}$

Cóncava hacia arriba en $\left(-\infty,-\sqrt{e^{\frac{5}{3}}}\right)\cup\left(\sqrt{e^{\frac{5}{3}}},+\infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\sqrt{e^{\frac{5}{3}}},0\right)\cup\left(0,\sqrt{e^{\frac{5}{3}}}\right)$

Puntos de inflexión: $\left(-\sqrt{e^{\frac{5}{3}}},\dfrac{10}{3e^{\frac{5}{3}}}\right)$, $\left(\sqrt{e^{\frac{5}{3}}},\dfrac{10}{3e^{\frac{5}{3}}}\right)$



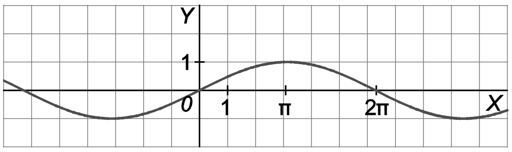
7. Estudia la periodicidad de la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ y traza su gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, su crecimiento y sus extremos relativos.

$$f(x+4\pi) = \operatorname{sen}\left(\frac{x+4\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}+2\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) \Rightarrow \text{ Período } T = 4\pi$$

Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$, $(2\pi,0)$ y $(4\pi,0)$

Puntos singulares y crecimiento: $f'(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \pi \\ x = 3\pi \end{cases}$

Crece en $(0,\pi) \cup (3\pi,4\pi)$ y decrece en $(\pi,2\pi)$. Máximo: $(\pi,1)$. Mínimo: $(3\pi,-1)$.



8. Si la gráfica de $f(x)$ es la que aparece en la figura, dibuja las gráficas de:

a) $f(x+2)$

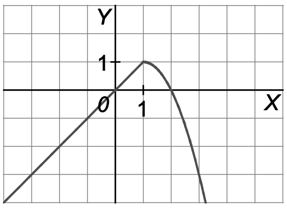
b) $f(x)+2$

c) $f(x+2)-2$

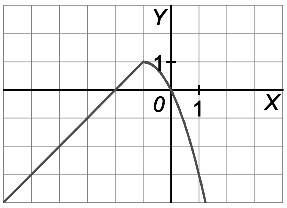
d) $f(2x)$

e) $|f(x)|$

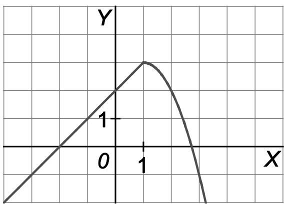
f) $f(|x|)$



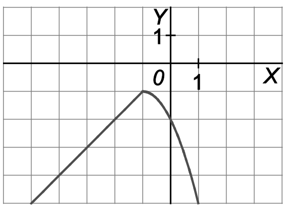
a)



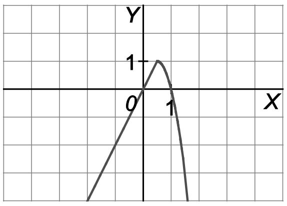
b)



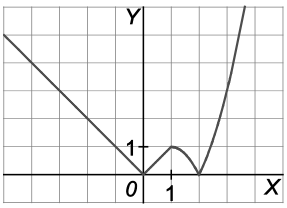
c)



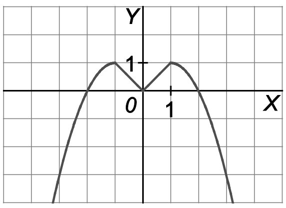
d)



e)



f)



Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. La función $f(x)=\frac{x^2}{x^3+1}$:

A. Es par.

B. Es impar.

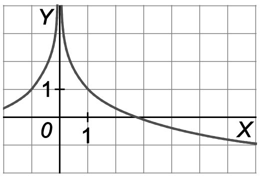
C. Presenta una simetría respecto del eje *X*.

D. Las tres respuestas anteriores son falsas.

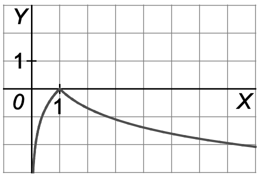
La respuesta correcta es D. $f(-x)=\frac{x^2}{-x^3+1}$ que es distinta a $f(x)$ y a $f(-x)$. Por tanto, no es par ni impar, en consecuencia, no presenta simetrías.

2. La gráfica de la función $f(x)=1-|\ln(x)|$ es:

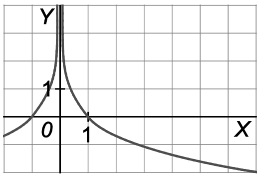
A.



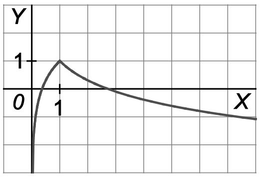
B.



C.



D.



La respuesta correcta es D, porque la función pasa por el punto $(1,1)$ y su dominio es $(0,+\infty)$.

3. De entre las siguientes posibilidades, ¿cuál es posible para el número de puntos de corte con los ejes que puede tener la gráfica de la función $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$?

A. Uno con el eje *Y* e infinitos con el eje *X*.

B. Uno con el eje *Y* y cinco con el eje *X*.

C. Ninguno con el eje *Y* y cuatro con el eje *X*.

D. Uno con el eje *Y* y dos con el eje *X*.

Al ser una función polinómica debe tener un punto con el eje *Y* y al ser una función polinómica de cuarto grado puede tener cero, uno, dos, tres o cuatro puntos de corte con el eje *X* La respuesta correcta es la B.

4. *Si $f(x)=mx^3+nx^2+mx-n$ tiene un punto de inflexión en $x=2$, entonces la relación entre los valores de *m* y *n* es:

A. $6m+n=0$ **B.** $2m-n=0$ **C.** $2m+n=0$ **D.** $m-2n=0$

La respuesta correcta es A.

$f'(x)=3mx^2+2nx+m$, $f''(x)=6mx+2n=0 \Rightarrow 6m\frac{1}{3}+2n=0 \Rightarrow 2m+2n=0 \Rightarrow m+n=0$

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

5. Dada la función $f(x) = xe^{-x}$:

A. Tiene un máximo relativo en $x = 1$.

B. Tiene una asíntota horizontal en $+\infty$.

C. Es discontinua en $x = 0$.

D. Es siempre decreciente.

Las respuestas correctas son la A y la B.

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 1$.

$f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$, $f''(1) < 0$.

Por tanto tiene un máximo en $x = 1$.

Además, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Asíntota horizontal $y = 0$.

6. Dada la función $f(x) = \frac{x}{\ln x}$:

A. Tiene un mínimo relativo en $x = e$.

B. Tiene una asíntota vertical.

C. Su dominio es $(0,+\infty)$.

D. Es siempre decreciente.

Las respuestas correctas son A y B.

El dominio de la función es $(0,1) \cup (1,+\infty)$.

En $x = 1$ tiene una asíntota vertical ya que $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

$$f''(x) = \frac{2-\ln x}{x(\ln x)^3} \Rightarrow f''(e) = \frac{2-1}{e} = \frac{1}{e} > 0 .$$

Tiene un mínimo en $x =$ e. La función es creciente en $(e,+\infty)$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

7. *La función $y = f(x)$ verifica que:

1. $f'(0) = f''(0) = 0$ **;**

2. Tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

A. 1 $\Leftrightarrow$ 2

B. 1 $\Rightarrow$ 2 pero 2 $\not\Rightarrow$ 1

C. 2 $\Rightarrow$ 1 pero 1 $\not\Rightarrow$ 2.

D. Pueden ocurrir las dos cosas.

La respuesta correcta es D.

Si $f'(0) = f''(0) = 0$, entonces no se puede de deducir que $x = 0$ sea un mínimo de la función porque dependería del valor de $f'''(0)$. Si $f'''(0) \neq 0$ entonces $x = 0$ es un punto de inflexión pero no mínimo y si $f'''(0) = 0$ se tiene que calcular la derivada siguiente.

Si $x = 0$ es mínimo relativo, entonces $f'(0) = 0$ y $f''(0) > 0$, pero no $f''(0) = 0$.

Señala el dato innecesario para contestar

8. Para saber cuántos cortes con el eje *X* tiene una función *f*, se sabe:

1. Que $f(x)$ tiene un una única asíntota y es vertical.

2. Que $f(x)$ es par y cambia su crecimiento solo en $x = 0$.

3. Que $f(x)$ no tiene puntos de inflexión.

A. Es innecesario el dato 1.

B. Es innecesario el dato 2.

C. Es innecesario el dato 3.

D. Hacen falta todos los datos.

La respuesta correcta es C porque para determinar los puntos de corte con el eje *X* de la función *f* no es necesario conocer ninguna condición sobre los puntos de inflexión.

5 Primitiva de una función

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. **Ejercicios resueltos.**

3. **Utiliza la tabla de derivadas para calcular estas integrales:**

a) $\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \quad (r \in \mathbb{R}\ ,\ r \neq -1)$

b) $\int x^{-1} dx = \ln|x| + C$

c) $\int e^x dx = e^x + C$

d) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a \in \mathbb{R} > 0\ ,\ a \neq 1)$

e) $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$

f) $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$

h) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$

4. **Calcula las siguientes integrales indefinidas.**

a) $\int \left(\operatorname{sen} x - e^x + \sqrt{x}\right) dx = -\cos x - e^x + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = -\cos x - e^x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

b) $\int \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{x} + C$

c) $\int \sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}\, dx = \int \sqrt[6]{x^5} dx = \frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1} + C = \frac{6}{11}\sqrt[6]{x^{11}} + C$

5. Calcula, en cada caso, la función *f*(*x*) que verifica las condiciones dadas.

a) $f'(x) = \cos x + x\sqrt{x}$ y $f(\pi) = 0$

$f(x) = \int\left(\cos x + x\sqrt{x}\right)dx = \int\left(\cos x + x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \operatorname{sen}x + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

Para calcular C utilizamos, $f(\pi) = 0 \Rightarrow 0 = \operatorname{sen}\pi + \frac{2}{5}\sqrt{\pi^5} + C \Rightarrow C = -\frac{2}{5}\sqrt{\pi^5}$

$f(x) = \operatorname{sen}x + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{2}{5}\sqrt{\pi^5}$

b) $f'(x) = \dfrac{3}{1+x^2} - e^x$ y $f(0) = 1$

$f(x) = 3\int\frac{1}{1+x^2}dx - \int e^x\,dx = 3\operatorname{arctg}x - e^x + C$

Calculamos C , $f(0) = 3\operatorname{arctg}0 - e^0 + C = 1 \Rightarrow C = 2$

$f(x) = 3\operatorname{arctg}x - e^x + 2$

c) $f'(x) = x - 2\cos x$ y la gráfica de f corta a la bisectriz del II cuadrante en el punto de abscisa $x = \pi$.

$f(x) = \int(x - 2\cos x)dx = \frac{1}{2}x^2 - 2\operatorname{sen}x + C$

Sabemos que $f(\pi) = -\pi \Rightarrow f(\pi) = \frac{1}{2}\pi^2 - 2\operatorname{sen}\pi + C = -\pi \Rightarrow C = -\frac{1}{2}\pi^2 - \pi$.

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\operatorname{sen}x - \frac{1}{2}\pi^2 - \pi$

6. Prueba que $F(x) = \operatorname{sen}^2 x$ y $G(x) = -\dfrac{\cos 2x}{2}$ son primitivas de $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$. ¿En qué constante se diferencian? (Recuerda que $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$).

Bastará comprobar que las derivadas de *F* y de *G* coinciden con *f*.

En efecto, esto es así ya que:

$F'(x) = 2\operatorname{sen}x\cos x = \operatorname{sen}2x$ y $G'(x) = \dfrac{2\operatorname{sen}2x}{2} = \operatorname{sen}2x$

Para encontrar la constante que las diferencias restamos ambas expresiones:

$$F(x) - G(x) = \operatorname{sen}^2 x + \frac{\cos 2x}{2} = \operatorname{sen}^2 x + \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{2} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{2} = \frac{1}{2}$$

7. Ejercicio resuelto.

8. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{t+1}{\sqrt{3t^2+6t-5}}\,dt = \int \frac{6t+6}{6\sqrt{3t^2+6t-5}}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{6t+6}{2\sqrt{3t^2+6t-5}}\,dt = \frac{\sqrt{3t^2+6t-5}}{3} + C$

b) $\int \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-\sqrt{x}}\,dx = \int \left(1+\sqrt{x}\right)dx = x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

c) $\int \left(x^3+1\right)^{12}\cdot 4x^2\,dx = \frac{4}{3}\int \left(x^3+1\right)^{12}\cdot 3x^2\,dx = \frac{4}{39}\left(x^3+1\right)^{13} + C$

d) $\int \frac{\operatorname{sen}\left(\ln t\right)}{t}\,dt = -\cos(\ln t) + C$

e) $\int \frac{e^{3s}}{1+e^{6s}}\,ds = \frac{1}{3}\int \frac{3e^{3s}}{1+\left(e^{3s}\right)^2}\,ds = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(e^{3s}\right) + C$

f) $\int \frac{8x}{\sqrt{1-9x^4}}dx = \int \frac{8x}{\sqrt{1-\left(3x^2\right)^2}}dx = \frac{8}{6}\int \frac{6x}{\sqrt{1-\left(3x^2\right)^2}}dx = \frac{4}{3}\operatorname{arcsen}\left(3x^2\right) + C$

9. Halla las primitivas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x(\operatorname{sen} x^2)(\cos^4 x^2)$ **b)** $g(x) = \operatorname{tg}(3x+2)$

a) $\int 2x(\operatorname{sen} x^2)(\cos^4 x^2)dx = -\frac{1}{5}\int 2x(-\operatorname{sen} x^2)(5\cos^4 x^2)dx = -\frac{1}{5}\cos^5 x^2 + C$

b) $\int \operatorname{tg}\left(3x+2\right)dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3\operatorname{sen}\left(3x+2\right)}{\cos(3x+2)}\,dx = -\frac{1}{3}\ln\left|\cos(3x+2)\right| + C$

10. Calcula las derivadas de $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ y $g(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, simplifícalas al máximo y explica qué observas.

$f'(x) = 2\operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$ y $g'(x) = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$

Sus derivadas son iguales, luego son dos primitivas de $h(x) = \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$. Como $f(x) = g(x) + C$, mirando su valor en $x = 0$ tenemos que $0 = f\left(0\right) = g\left(0\right) + C = 1 + C$.

11. Ejercicio interactivo.

12. Ejercicio resuelto.

13. Obtén las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int (x^2-5x+1)\cos x\,dx$

f	g'
x^2-5x+1	$\cos x$
$2x-5$	$\operatorname{sen} x$
2	$-\cos x$
0	$-\operatorname{sen} x$

$$\int (x^2-5x+1)\cos x\,dx=(x^2-5x+1)\operatorname{sen} x-(2x-5)(-\cos x)+2(-\operatorname{sen} x)+C=(x^2-5x-1)\operatorname{sen} x+(2x-5)\cos x+C$$

b) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

f	g'
$arctgx$	**1**
$\frac{1}{1+x^2}$	x

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx=x\cdot\operatorname{arctg} x-\int\frac{x}{1+x^2}dx=x\cdot\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$$

c) $\int \operatorname{arcsen} x\,dx$

f	g'
$\operatorname{arc\,sen} x$	1
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	x

$$\int\sqrt{\frac{x+5}{x}}dx=\int\frac{-10t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt=-\frac{5}{2}\int\frac{1}{(t-1)}dt+\frac{5}{2}\int\frac{-1}{(t-1)^2}dt+\frac{5}{2}\int\frac{1}{(t+1)}dt+\frac{5}{2}\int\frac{-1}{(t+1)^2}dt=$$

$$=\frac{5}{2}\left(-\ln|t-1|+\frac{1}{t-1}+\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}\right)+C=\frac{5}{2}\left(-\ln\left|\sqrt{\frac{x+5}{x}}-1\right|+\frac{1}{\sqrt{\frac{x+5}{x}}-1}+\ln\left|\sqrt{\frac{x+5}{x}}+1\right|+\frac{1}{\sqrt{\frac{x+5}{x}}+1}\right)+C=$$

$$=\frac{5}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}}\right|+\sqrt{x(x+5)}+C$$

d) $\int x\operatorname{sen}(2x)\,dx$

f	g'
x	$\operatorname{sen}(2x)$
1	$-\frac{1}{2}\cos(2x)$
0	$-\frac{1}{4}sen(2x)$

$$\int x\operatorname{sen}(2x)dx=-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)+C$$

e) $\int (x^7 - 3x + 1)\operatorname{sen} x\, dx$

f	g'
$x^7 - 3x + 1$	sen$x$
$7x^6 - 3$	–cos$x$
$42x^5$	–sen$x$
$210x^4$	cos$x$
$840x^3$	sen$x$
$2520x^2$	–cos$x$
$5040x$	–sen$x$
5040	cos$x$
0	sen$x$

$\int (x^7 - 3x + 1)\operatorname{sen} x\, dx = (x^7 - 3x + 1)(-\cos x) - (7x^6 - 3)(-\operatorname{sen} x) + 42x^5 \cos x - 210x^4 \operatorname{sen} x + 840x^3(-\cos x) -$
$-2520x^2(-\operatorname{sen} x) + 5040x \cos x - 5040 \operatorname{sen} x + C = (-x^7 + 42x^5 - 840x^3 + 5043x - 1)\cos x +$
$+(7x^6 - 210x^4 + 2520x^2 - 5043)\operatorname{sen} x + C$

f) $\int e^{3x} \cos x dx$

f	g'
e^{3x}	cos$x$
$3e^{3x}$	sen$x$
$9e^{3x}$	–cos$x$

$\int e^{3x} \cos x dx = e^{3x} \operatorname{sen} x + 3e^{3x} \cos x + \int 9e^{3x}(-\cos x)dx$

Despejando, $\int e^{3x} \cos x dx = \dfrac{e^{3x}(\operatorname{sen} x + 3\cos x)}{10} + C$.

14. Halla la primitiva de $f(x) = (x+1)^2 \operatorname{sen} x$ que cumpla $F(0) = 1$.

$F(x) = \int (x^2 + 2x + 1)\operatorname{sen} x dx$

f	g'
$x^2 + 2x + 1$	sen$x$
$2x + 2$	–cos$x$
2	–sen$x$
0	cos$x$

$\int (x^2 + 2x + 1)\operatorname{sen} x dx = (x^2 + 2x + 1)(-\cos x) - (2x + 2)(-\operatorname{sen} x) + 2\cos x + C =$
$= -(x^2 + 2x + 1)\cos x + (2x + 2)\operatorname{sen} x + 2\cos x + C$

$1 = -1 + 0 + 2 + C \Rightarrow C = 0$

Luego $F(x) = -(x^2 + 2x + 1)\cos x + (2x + 2)\operatorname{sen} x + 2\cos x$

15. Determina las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \sqrt{x}\ln x dx$

f	g'
$\ln x$	$\sqrt{x}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

$$\int \sqrt{x}\ln x dx = \frac{2}{3}\ln x\sqrt{x^3} - \int \frac{2\sqrt{x^3}}{3x}dx = \frac{2}{3}\ln x\sqrt{x^3} - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C$$

b) $\int x(\ln x)^2 dx$

f	g'
$(\ln x)^2$	x
$\frac{2\ln x}{x}$	$\frac{1}{2}x^2$

f	g'
$\ln x$	x
$\frac{1}{x}$	x^2

$$\int x(\ln x)^2 dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \int x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + \int \frac{1}{2}x dx + C = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$$

c) $\int x^2(\ln x)^2 dx$

f	g'
$(\ln x)^2$	x^2
$\frac{2\ln x}{x}$	$\frac{x^3}{3}$

f	g'
$\ln x$	$\frac{2}{3}x^2$
$\frac{1}{x}$	$\frac{2}{9}x^3$

$$\int x^2(\ln x)^2 dx = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \int \frac{2}{3}x^2\ln x dx = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \left[\frac{2}{9}x^3(\ln x) - \int \frac{2}{9}x^2 dx\right] = \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3(\ln x) - \frac{2}{27}x^3 + C$$

d) $\int \sqrt{x}(\ln x)^2 dx$

f	g'
$(\ln x)^2$	$\sqrt{x}$
$\frac{2\ln x}{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

$$\int \sqrt{x}(\ln x)^2 dx = \frac{2\sqrt{x^3}(\ln x)^2}{3} - \int \frac{4}{3}\ln x\sqrt{x}dx = \frac{2\sqrt{x^3}(\ln x)^2}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right)\right) + C =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}(\ln x)^2}{3} - \frac{8}{9}\sqrt{x^3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C$$

e) $\int (1-x)e^{-x}dx$

f	g'
$1-x$	e^{-x}
-1	$-e^{-x}$
0	e^{-x}

$$\int (1-x)e^{-x}dx = -(1-x)e^{-x} - (-1)e^{-x} + C = xe^{-x} + C$$

f) $\int x^4 e^{2x}dx$

f	g'
x^4	e^{2x}
$4x^3$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
$12x^2$	$\frac{1}{4}e^{2x}$
$24x$	$\frac{1}{8}e^{2x}$
24	$\frac{1}{16}e^{2x}$
0	$\frac{1}{32}e^{2x}$

$$\int x^4e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^4e^{2x} - x^3e^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x} - \frac{3}{2}xe^{2x} + \frac{3}{4}e^{2x} + C = e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right) + C$$

16. Calcula, utilizando la fórmula de la integración por partes, una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x^2 \ln x^2$ que cumpla $F(1) = 0$.

f	g'
$\ln x^2$	x^2
$\frac{2}{x}$	$\frac{x^3}{3}$

$$\int x^2 \ln x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x^2 - \int \frac{2}{3}x^2\, dx + C = \frac{1}{3}x^3 \ln x^2 - \frac{2}{9}x^3 + C = \frac{1}{9}x^3\left(3\ln x^2 - 2\right) + C$$

$$0 = F(1) = \frac{1}{9}(-2) + C \Rightarrow C = \frac{2}{9} \text{ y } F(x) = \frac{1}{9}x^3\left(3\ln x^2 - 2\right) + \frac{2}{9}$$

17 a 19 Ejercicios resueltos.

20. Calcula las siguientes integrales indefinidas primitivas previa descomposición en fracciones simples.

a) $\int \frac{dx}{2x+5} = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$

b) $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{3}{x-2}dx = -\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$

c) $\int \frac{dx}{x^2-x} = \int \frac{dx}{x(x-1)}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{-1}{x}dx = \ln|x-1| - \ln|x| + C$

d) $\int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+3}dx = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + C$

e) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+3)(x+5)} = \frac{1}{24}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{3}{8}\int \frac{1}{x+3}dx - \frac{5}{12}\int \frac{1}{x+5}dx = \frac{1}{24}\left(\ln|x-1| + 9\ln|x+3| - 10\ln|x+5|\right) + C$

f) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \int (x^2+x+4)dx + \int \frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{5}{x-2}dx + \int \frac{-3}{x+2}dx =$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C$

21. Determina las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = \int \frac{-dx}{x-1} + \int \frac{-dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-2} = -\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \ln|x-2| + C$

b) $\int \frac{1+8x}{1+x^2}dx = \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{8xdx}{1+x^2} = \text{arctg}\, x + 4\ln|1+x^2| + C$

c) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{3x-2}{x^2-2x+5}dx = -\ln|x-1| + \frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}dx =$

$= -\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x^2-2x+5| + \frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$

d) $\int \frac{dx}{x^3+1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx +$

$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$

e) $\int \frac{x^3}{x^3+x-2}dx = \int dx + \int \frac{-x+2}{x^3+x-2}dx = x + \frac{1}{4}\int \frac{(-x-6)}{x^2+x+2}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx =$

$= x - \frac{1}{8}\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}dx - \frac{11}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}dx + \frac{1}{4}\ln|x-1| =$

$= x - \frac{1}{8}\ln|x^2+x+2| - \frac{11\sqrt{7}}{49}\text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + \frac{1}{4}\ln|x-1| + C$

f) $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx = \int \frac{x^3-6}{(x^2+2)(x^2+4)}dx = \int \frac{-x-3}{x^2+2}dx + \int \frac{2x+3}{x^2+4}dx =$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx - \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx + \int \frac{2x}{x^2+4}dx + \frac{3}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx =$

$= -\frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{3}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \ln(x^2+4) + \frac{3}{2}\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

22 y 23. Ejercicios resueltos.

24. Calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx \qquad t = 1+\sqrt{x},\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow 2(t-1)dt = dx$

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{-2(t-1)(t-2)}{t}dt = -\int (2t-6)dt - 4\int \frac{dt}{t} = -t^2 + 6t - 4\ln|t| + C =$$
$$= -\left(1+\sqrt{x}\right)^2 + 6\left(1+\sqrt{x}\right) - 4\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C$$

b) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}dx \qquad t = \sqrt[3]{x},\ dt = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}dx \Rightarrow 3t^2dt = dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \int \frac{3t^2}{t+1}dt = 3\int (t-1)dt + 3\int \frac{1}{t+1}dt = \frac{3}{2}t^2 - 3t + 3\ln|t+1| + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + 3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right| + C$$

c) $\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+1}dx \qquad t = e^x,\ dt = e^x dx \Rightarrow \frac{dt}{t} = dx$

$$\int \frac{1+e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{1+t}{\left(t^2+1\right)t}dt = \int \frac{1}{t}dt + \int \frac{-t+1}{t^2+1}dt = \ln|t| - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}dt + \int \frac{1}{t^2+1}dt = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| + arctg(t) + C =$$
$$= x - \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+1\right| + arctg\left(e^x\right) + C$$

d) $\int \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1}\cos x\, dx \qquad t = \operatorname{sen} x, dt = \cos x dx$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1}\cos x dx = \int \frac{t-1}{t+1}dt = \int dt - \int \frac{2}{t+1}dt = t - 2\ln|t+1| + C = \operatorname{sen} x - 2\ln|\operatorname{sen} x + 1| + C$$

25. Determina las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx \qquad t = \sqrt[6]{x};\ dt = \frac{dx}{6\left(\sqrt[6]{x}\right)^5} \Rightarrow 6t^5dt = dx$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \int \frac{6t^5 \cdot t^3}{t^2+1}dt = 6\int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1\right)dt + 6\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 + \frac{6}{3}t^3 - 6t + 6\operatorname{arctg} t + C =$$
$$= \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\operatorname{arctg}\left(\sqrt[6]{x}\right) + C$$

b) $\int \sqrt{\frac{x+5}{x}}dx \qquad \left(\text{toma } \frac{x+5}{x} = t^2\right)$

$$\frac{x+5}{x} = t^2 \Rightarrow\ t^2 = 1 + \frac{5}{x},\ 2tdt = \frac{-5}{x^2}dx = -\frac{1}{5}\left(\frac{5}{x}\right)^2 dx \Rightarrow dx = \frac{-10t}{\left(t^2-1\right)^2}dt$$

$$\int \sqrt{\frac{x+5}{x}}dx = \int \frac{-10t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt = -\frac{5}{2}\int \frac{1}{(t-1)}dt + \frac{5}{2}\int \frac{-1}{(t-1)^2}dt + \frac{5}{2}\int \frac{1}{(t+1)}dt + \frac{5}{2}\int \frac{-1}{(t+1)^2}dt =$$
$$= \frac{5}{2}\left(-\ln|t-1| + \frac{1}{t-1} + \ln|t+1| + \frac{1}{t+1}\right) + C = \frac{5}{2}\left(-\ln\left|\sqrt{\frac{x+5}{x}} - 1\right| + \frac{1}{\sqrt{\frac{x+5}{x}} - 1} + \ln\left|\sqrt{\frac{x+5}{x}} + 1\right| + \frac{1}{\sqrt{\frac{x+5}{x}} + 1}\right) + C =$$
$$= \frac{5}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+5} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{x}}\right| + \sqrt{x(x+5)} + C$$

26. Ejercicio interactivo.

27. Transforma estas integrales en otras polinómicas o racionales.

a) $\int \text{sen}^5 x \cos^2 x\, dx$

$t = \cos x,\ dt = -\text{sen}\, x dx$

$$\int \text{sen}^5 x \cos^2 x\, dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x(-\text{sen}\, x\,)dx = -\int (1-t^2)^2 t^2 dt$$

b) $\int \frac{\text{sen}^4 x}{\cos^3 x} dx$

$t = \text{sen}\, x,\ dt = \cos x dx$

$$\int \frac{\text{sen}^4 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\text{sen}^4 x}{\cos^4 x} \cos x dx = \int \frac{\text{sen}^4 x}{(1-\text{sen}^2 x)^2} \cos x dx = \int \frac{t^4}{(1-t^2)^2} dt$$

c) $\int \frac{1}{\cos x} dx$

$t = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right),\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{2dt}{1-t^2}$$

28. Transforma en polinómicas o racionales estas integrales:

a) $\int \frac{2\text{sen}\, x \cos x}{1+\text{sen}^2 x} dx$

$t = \text{sen}\, x\ ,\ dt = \cos x dx \Rightarrow \int \frac{2\,\text{sen}\, x \cos x}{1+\text{sen}^2 x} dx = \int \frac{2\,\text{sen}\, x}{1+\text{sen}^2 x} \cos x dx = \int \frac{2t}{1+t^2} dt$

b) $\int \text{sen}^4 x \cos^2 x dx$

$t = \text{tg}\, x\ ,\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow \int \text{sen}^4 x \cos^2 x\, dx = \int \frac{t^4}{\left(1+t^2\right)^7} dt$

c) $\int \text{tg}^4 x\, dx$

$t = \text{tg}\, x\ ,\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow \int \text{tg}^4 x\, dx = \int \frac{t^4}{1+t^2} dt$

29. Utiliza las propiedades de las derivadas y prueba el recíproco del teorema de Liouville, es decir: "la derivada de $f(x)e^{g(x)}$ con *f* y *g* funciones racionales, es $R(x)e^{g(x)}$ con *R* función racional".

$$F(x) = f(x)e^{g(x)} \Rightarrow F'(x) = f'(x)e^{g(x)} + f(x)g'(x)e^{g(x)} = \left(f'(x) + f(x)g'(x)\right)e^{g(x)}$$

Si *f(x)* y *g(x)* son funciones racionales, entonces, $R(x) = f'(x) + f(x)g'(x)$ pues la derivada de una función racional es racional y producto y suma de racionales es racional.

30. Utilizando la no elementalidad de $\int x^{2n}\cdot e^{ax^2}dx$, prueba que no son elementales las primitivas:

a) $\int \sqrt{\ln x}\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx$ **c)** $\int \frac{e^{ax}}{\sqrt{x}}dx$

Indicación: pon $\ln x = t^2$ en *a* y *b* y $x = t^2$ en *c*.

a) $\int \sqrt{\ln x}\,dx$. Llamando $x = e^{t^2}, dx = 2te^{t^2}dt \Rightarrow \int \sqrt{\ln x}\,dx = \int \sqrt{\ln\left(e^{t^2}\right)}2te^{t^2}dt = 2\int t^2e^{t^2}dt$ que no es elemental.

b) $\int \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx$. Llamando $x = e^{t^2}, dx = 2te^{t^2}dt \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{\ln x}}dx = \int \frac{2te^{t^2}}{\sqrt{\ln\left(e^{t^2}\right)}}dt = 2\int e^{t^2}dt$ que no es elemental.

c) $\int \frac{e^{ax}}{\sqrt{x}}dx$. Llamando $x = t^2, dx = 2tdt \Rightarrow \int \frac{e^{at^2}}{t}2tdt = 2\int e^{at^2}dt$ que no es elemental.

31 a 36. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Primitivas e integral indefinida. Propiedades

37. Asocia a cada función *f*(*x*) una primitiva *F*(*x*).

***f*(*x*)**
$6\,\text{sen}^2(2x+1)\cos(2x+1)$
$\cos(2x+1)$
$6(2x+1)^2\cos(2x+1)^3$
$6\cos(6x+3)$

***F*(*x*)**
$\text{sen}(2x+1)^3$
$\frac{1}{2}\text{sen}(2x+1)$
$\text{sen}[3(2x+1)]$
$\text{sen}^3(2x+1)$

***f*(*x*)**	***F*(*x*)**
$6\,\text{sen}^2(2x+1)\cos(2x+1)$	$\text{sen}^3(2x+1)$
$\cos(2x+1)$	$\frac{1}{2}\text{sen}(2x+1)$
$6(2x+1)^2\cos(2x+1)^3$	$\text{sen}(2x+1)^3$
$6\cos(6x+3)$	$\text{sen}[3(2x+1)]$

38. Comprueba que $F(x) = \text{arcsen}\,x$ y $G(x) = -\arccos x$ son ambas primitivas de la misma función. ¿De qué función se trata? ¿En qué constante difieren?

$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $G'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, luego son ambas primitivas de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Como $F(x) - G(x)$ es constante, para ver en qué se diferencian basta calcular $F(0) - G(0) = \text{arcsen}\,0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

39. Una primitiva de cierta función *f*(*x*) es $F(x)=x^2-3x+1$. Encuentra otra primitiva de *f*(*x*) cuya gráfica pase por el punto *A*(1, 5).

Las primitivas de *f*(*x*) son de la forma $G(x)=x^2-3x+1+C$ Haciendo $x=1$ tenemos:

$5=1-3+1+C\Rightarrow C=6$. La primitiva buscada es $G(x)=x^2-3x+1+6$.

40. Determina, razonando la respuesta, si las funciones $F(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x+\cos x}{\operatorname{sen}x}$ y $G(x)=\dfrac{1-\operatorname{sen}^2x}{\cos x\operatorname{sen}x}$ son primitivas de una misma función.

Derivando ambas funciones obtenemos:

$$F'(x)=\frac{(\cos x-\operatorname{sen}x)\operatorname{sen}x-(\operatorname{sen}x+\cos x)\cos x}{\operatorname{sen}^2x}=-\frac{\operatorname{sen}^2x+\cos^2x}{\operatorname{sen}^2x}=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2x}$$

$$G'(x)=\frac{-2\operatorname{sen}x\cos x\cdot\cos x\operatorname{sen}x-(1-\operatorname{sen}^2x)(-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}x+\cos x\cos x)}{(\cos x\operatorname{sen}x)^2}=\frac{-2\operatorname{sen}^2x\cos^2x-\cos^2x(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x)}{\cos^2x\operatorname{sen}^2x}=$$

$$=\frac{-2\operatorname{sen}^2x-\cos^2x+\operatorname{sen}^2x}{\operatorname{sen}^2x}=-\frac{1}{\operatorname{sen}^2x}$$

Como sus derivadas son iguales, ambas son primitivas de la misma función. Dicha función es $f(x)=-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2x}$.

41. Comprueba que:

a) $\displaystyle\int 6\operatorname{sen}(x+1)\cos(x+1)\,dx=3\operatorname{sen}^2(x+1)+C$

Comprobamos que, efectivamente, $\left(3\operatorname{sen}^2(x+1)+C\right)'=6\operatorname{sen}(x+1)\cos(x+1)$.

b) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}=4\sqrt[4]{x}+C$

Comprobamos que, efectivamente, $\left(4\sqrt[4]{x}+C\right)'=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

c) $\displaystyle\int\sqrt{ax+b}=\frac{2(ax+b)\sqrt{ax+b}}{3a}+C$

Comprobamos que, efectivamente, $\left(\dfrac{2(ax+b)\sqrt{ax+b}}{3a}+C\right)'=\left(\dfrac{2(ax+b)^{3/2}}{3a}+C\right)'=\sqrt{ax+b}$.

Primitivas inmediatas

42. Calcula las siguientes primitivas inmediatas indicando de qué tipo son.

a) $\int \sqrt[5]{x^3}dx$ Tipo: $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \Rightarrow \int \sqrt[5]{x^3}dx = \frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + C$

b) $\int \frac{4^x - 3\cdot 2^x}{2^x}dx$ Tipo: $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \Rightarrow \int \frac{4^x - 3\cdot 2^x}{2^x}dx = \int 2^x dx - 3\int dx = \frac{2^x}{\ln 2} - 3x + C$

c) $\int \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 7}{x^2}dx$ Tipo: $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$ y $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 7}{x^2}dx = \int x dx + 3\int dx - 5\int \frac{1}{x}dx + 7\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 5\ln|x| - \frac{7}{x} + C$$

d) $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}dx$ Tipo: $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$ y $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\, dx + \frac{1}{2}\int \cos x\, dx = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C$$

e) $\int \frac{2\sqrt{1-x^2} - 3}{\sqrt{1-x^2}}dx$ Tipo: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen} x + C$

$$\int \frac{2\sqrt{1-x^2} - 3}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\int dx - 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2x - 3\operatorname{arcsen} x + C$$

f) $\int e^{-x}dx$ Tipo: $\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + C \Rightarrow \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$

g) $\int \frac{2+t^2}{1+t^2}dt$ Tipo: $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C \Rightarrow \int \frac{2+t^2}{1+t^2}dt = \int dt + \int \frac{1}{1+t^2}dt = t + \operatorname{arctg} t + C$

h) $\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^6}}dt$ Tipo: $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \operatorname{arcsen} f(x) + C$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^6}}dt = \frac{1}{3}\int \frac{3t^2}{\sqrt{1-(t^3)^2}}dt = \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}(t^3) + C$$

43. Halla una primitiva de $y = \frac{x^2+3}{\sqrt{x}}$.

$$\int \frac{x^2+3}{\sqrt{x}}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx + 3\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + C$$

Luego una primitiva sería: $f(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 6\sqrt{x}$

44. Determina $f(x)$ sabiendo que:

$f'''(x) = 24x$; $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$; $f''(0) = 2$

$f'''(x) = 24x$ entonces $f''(x) = 12x^2 + C$, como $f''(0) = 2$, se deduce que $C = 2$.

$f''(x) = 12x^2 + 2$ entonces $f'(x) = 4x^3 + 2x + C$, como $f'(0) = 1$, se deduce que $C = 1$.

$f'(x) = 4x^3 + 2x + 1$ entonces $f(x) = x^4 + x^2 + x + C$, como $f(0) = 0$, se deduce que $C = 0$.

Por tanto, $f(x) = x^4 + x^2 + x$.

45. Calcula $\int x\ln\left(1+x^2\right)dx$.

Comenzamos llamando $t=1+x^2$, $dt=2xdx \Rightarrow \int x\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}\int \ln t dt$

Esta integral se realiza por partes tomando $f(t)=\ln t$ y $g'(t)=1$.

f	g'
$\ln t$	1
$\frac{1}{t}$	t

$$\frac{1}{2}\int \ln t dt=\frac{1}{2}\left(t\ln t-\int \frac{1}{t}tdt\right)=\frac{1}{2}t\left(\ln t-1\right)+C$$

Así pues, $\int x\ln(1+x^2)dx=\frac{1}{2}(1+x^2)\left(\ln(1+x^2)-1\right)+C$

46. Halla la ecuación de una curva $y=f(x)$, sabiendo que pasa por el punto (1, 1) y que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x es $3x+1$.

Sabemos $f'(x)=3x+1$, luego $f(x)=\frac{3}{2}x^2+x+C$ y como $f(1)=1$ entonces $C=-\frac{3}{2}$.

La curva tiene ecuación $y=f(x)=\frac{3}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$.

47. De una función $y=f(x)$, $x>-1$, se sabe que tiene por derivada $y'=\frac{a}{1+x}$ donde a es una constante. Determina la función si, además, se cumple que $f(0)=1$ y $f(1)=-1$.

$$f(x)=\int \frac{a}{1+x}dx=a\ln(1+x)+C$$

Sustituyendo:

$$f(0)=a\cdot\ln 1+C=1 \Rightarrow C=1$$

$$f(1)=a\cdot\ln 2+1=-1 \Rightarrow a=-\frac{2}{\ln 2}$$

La función es $f(x)=-\frac{2\ln(1+x)}{\ln 2}+1=-2\log_2(1+x)+1$.

48. Halla una función $F(x)$ que verifique que $x^5F'(x)+x^3+2x=3$ para $x\neq 0$.

$$x^5F'(x)+x^3+2x=3 \Rightarrow F'(x)=\frac{3-2x-x^3}{x^5}$$

$$F(x)=\int \frac{3-2x-x^3}{x^5}dx=-\frac{3}{4x^4}+\frac{2}{3x^3}+\frac{1}{x}+C$$

Como nos piden una función, tomando $C=0$ tenemos $F(x)=-\frac{3}{4x^4}+\frac{2}{3x^3}+\frac{1}{x}$.

49. De la función $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ se sabe que $f'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}$ y que $f(2)=0$.

a) Determina *f*.

b) Halla la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

a) $f(x)=\int\frac{3}{(x+1)^2}dx=-\frac{3}{x+1}+C$ como $f(2)=0$ entonces $f(2)=-\frac{3}{2+1}+C=0\Rightarrow C=1$

Luego $f(x)=-\frac{3}{x+1}+1$

b) $F(x)=\int\left(-\frac{3}{x+1}+1\right)dx=-3\ln|x+1|+x+C$

$1=-3\ln|0+1|+C\Rightarrow C=1$

$F(x)=-3\ln|x+1|+x+1$

50. Calcula estas integrales.

a) $\int\frac{\sqrt{5-3\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}\,dx=-\frac{2}{9}\sqrt{(5-3\operatorname{tg}x)^3}+C$

b) $\int\sqrt{x+3}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}+C$

c) $\int\frac{\ln x^2}{x}\,dx=\frac{(\ln x^2)^2}{4}+C$

d) $\int\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx=\ln|x|-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$

e) $\int\frac{x+2}{x^2+4x}\,dx=\frac{1}{2}\ln|x^2+4x|+C$

f) $\int\operatorname{sen}x^6\cos x\,dx=\frac{\operatorname{sen}^7 x}{7}+C$

51. De todas las primitivas de la función $f(x)=2\operatorname{tg}x\sec^2 x$, halla la que pasa por el punto $P\left(\frac{\pi}{4},1\right)$.

$F(x)=\int 2\operatorname{tg}x\sec^2 x\,dx=\frac{1}{\cos^2 x}+C$

Como $P\left(\frac{\pi}{4},1\right)$, entonces $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}+C=1\Rightarrow C=-1.$

Luego, $F(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1.$

52. Calcula la primitiva de la función $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$ que se anula en el punto de abscisa $x = 2$.

$$F(x) = \int x\sqrt{x^2-1}dx = \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3} + C$$

Como x = 2, tenemos que $0 = \frac{\sqrt{(2^2-1)^3}}{3} + C \Rightarrow 0 = \frac{3\sqrt{3}}{3} + C \Rightarrow C = -\sqrt{3}$.

Luego, $F(x) = \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3} - \sqrt{3}$.

53. Calcula las integrales:

a) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx$

b) $\int e^{2x^2-x+3}(1-4x)dx$

a) $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{2x}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{2\sqrt{x}}{15}\left(3x^2 - 10x + 15\right) + C$

b) $\int e^{2x^2-x+3}(1-4x)dx = -e^{2x^2-x+3} + C$

54. Halla la función $F(x)$ tal que $F(0) = 2$, y que sea primitiva de la función $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

$$F(x) = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \ln(e^x+1) + C$$

Como $F(0) = 2$, entonces $\ln 2 + C = 2 \Rightarrow C = 2 - \ln 2$.

Luego, $F(x) = \ln(e^x+1) + 2 - \ln 2$.

55. Calcula la integral $\int\left[\sqrt{x^2+20x} + (x^2+20x)\right](x+10)dx$.

$$\int\left[\sqrt{x^2+20x} + \left(x^2+20x\right)\right]\left(x+10\right)dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+20x}\cdot 2\left(x+10\right)dx + \frac{1}{2}\int\left(x^2+20x\right)\cdot 2\left(x+10\right)dx =$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2+20x)^3}}{3} + \frac{1}{4}\left(x^2+20x\right)^2 + C$$

Integración por partes

56. Calcula:

a) $\int \ln(x+1)\,dx$

f	g'
$\ln(x+1)$	1
$\frac{1}{x+1}$	$x+1$

$$\int \ln(x+1)\,dx = (x+1)\ln(x+1) - \int \frac{x+1}{x+1}dx = (x+1)\ln(x+1) - x + C$$

b) $\int x\,\text{arctg}(x+1)dx$

$$\int x\,\text{arctg}(x+1)dx = \frac{1}{2}x^2\,\text{arctg}(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+(1+x)^2}dx = \frac{1}{2}x^2\,\text{arctg}(x+1) - \left(\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{-2x-2}{x^2+2x+2}dx\right) =$$

$$= \frac{x^2\,\text{arctg}(x+1)}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\ln(x^2+2x+2)}{2} + C$$

c) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln x + 1}{x} + C$$

d) $\int x \ln x\,dx$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

e) $\int x(\ln x)^2 dx$

f	g'
$(\ln x)^2$	x
$2(\ln x)\frac{1}{x}$	$\frac{x^2}{2}$

$$\int x(\ln x)^2 dx = \frac{x^2}{2}(\ln|x|)^2 - \int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}(\ln|x|)^2 - \left[\frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4}\right] + C$$

f) $\int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x dx$

$$\int \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x dx = \int x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \int dx - \int \frac{1}{x^2-1}dx =$$

$$\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x - \int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x - \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x - \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx =$$

$$\frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x + C$$

57. Determina la integral indefinida $\int x^2 \operatorname{sen}(2x)\,dx$.

f	g'
x^2	$\operatorname{sen}2x$
$2x$	$-\frac{1}{2}\cos 2x$
2	$-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x$
0	$\frac{1}{8}\cos 2x$

$$\int x^2 \operatorname{sen}(2x)\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos(2x) + \frac{1}{2}x\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

58. Calcula con la tabla auxiliar de integrales sucesivas:

a) $\int x^6 \cos x dx$

f	g'
x^6	$\cos x$
$6x^5$	$\operatorname{sen}x$
$30x^4$	$-\cos x$
$120x^3$	$-\operatorname{sen}x$
$360x^2$	$\cos x$
$720x$	$\operatorname{sen}x$
720	$-\cos x$
0	$-\operatorname{sen}x$

$$\int x^6 \cos x dx = 6\cos x(x^5 - 20x^3 + 120x) + \operatorname{sen}x(x^6 - 30x^4 + 360x^2 - 720) + C$$

b) $\int x^7 e^{7x} dx$

f	g'
x^7	e^{7x}
$7x^6$	$\frac{1}{7}e^{7x}$
$42x^5$	$\frac{1}{7^2}e^{7x}$
$210x^4$	$\frac{1}{7^3}e^{7x}$
$840x^3$	$\frac{1}{7^4}e^{7x}$
$2520x^2$	$\frac{1}{7^5}e^{7x}$
$5040x$	$\frac{1}{7^6}e^{7x}$
5040	$\frac{1}{7^7}e^{7x}$
0	$\frac{1}{7^8}e^{7x}$

$$\int x^7 e^{7x} dx = e^{7x}\left(\frac{x^7}{7} - \frac{x^6}{7} + \frac{6x^5}{7^2} - \frac{30x^4}{7^3} + \frac{120x^3}{7^4} - \frac{360x^2}{7^5} + \frac{720x}{7^6} - \frac{720}{7^7}\right) + C$$

c) $\int e^{ax} \cos bx \, dx$

f	g'
$\cos bx$	e^{ax}
$-b \operatorname{sen} xb$	$\frac{e^{ax}}{a}$
$-b^2 \cos bx$	$\frac{e^{ax}}{a^2}$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx - \frac{1}{a^2} e^{ax}(-b \operatorname{sen} bx) + \int \frac{1}{a^2} e^{ax}(-b^2 \cos bx) = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx)}{a^2 + b^2} + C$$

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx - \frac{1}{a^2} e^{ax}(-b \operatorname{sen} bx) \Rightarrow \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx)}{a^2 + b^2} + C$$

d) $\int (x^3 + x^2 + 1) e^x dx$

f	g'
$x^3 + x^2 + 1$	e^x
$3x^2 + 2x$	e^x
$6x + 2$	e^x
6	e^x
0	e^x

$$\int (x^3 + x^2 + 1) e^x dx = e^x (x^3 - 2x^2 + 4x - 3) + C$$

59. Determina las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfacen la condición de que la pendiente de la recta tangente en un punto genérico (x, y) de su gráfica viene dada por la expresión xe^x.

$$f(x)=\int xe^x dx = xe^x-\int e^x dx = e^x(x-1)+C$$

60. Sea $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(1-x^2)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

$$F(x)=\int \ln\left(1-x^2\right)dx = x\ln(1-x^2)-\int -\frac{2x^2}{1-x^2}dx = x\ln(1-x^2)-2\int dx+2\int\frac{1}{(1-x)(1+x)}dx$$

$$x\ln(1-x^2)-2x+\int\frac{1}{1-x}dx+\int\frac{1}{(1+x)}dx = x\ln(1-x^2)-2x-\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C$$

Como pasa por (0,1) se tiene que $-\ln 1+C=1\Rightarrow C=1$ y la función es $F(x)=x\ln(1-x^2)-2x-\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+1$.

61. Calcula la siguiente integral indefinida $\int e^{ax}\left(x^2+bx+c\right)dx$ en función de los parámetros a, b y c.

$$\int e^{ax}\left(x^2+bx+c\right)dx=\frac{1}{a}e^{ax}\left(x^2+bx+c\right)-\frac{1}{a}\int e^{ax}\left(2x+b\right)dx = e^{ax}\left(x^2+bx+c\right)-\frac{1}{a^2}e^{ax}\left(2x+b\right)+\frac{1}{a^2}\int 2e^{ax}\,dx=$$

$$=e^{ax}\left(\frac{x^2+bx+c}{a}-\frac{2x+b}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right)+C$$

62. Hallar la primitiva de $f(x)=x^2\ln x$ cuya gráfica pasa por el punto $A(1, 2)$.

f	g'
$\ln x$	x^2
$\frac{1}{x}$	$\frac{x^3}{3}$

$$\int x^2\ln x\,dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{1}{3}x^2dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C=\frac{1}{9}x^3\left(3\ln x-1\right)+C$$

$$F(1)=\frac{1}{9}\left(-1\right)+C=2\Rightarrow C=\frac{19}{9}$$

Luego una primitiva sería $F(x)=\frac{1}{9}x^3\left(3\ln x-1\right)+\frac{19}{9}$.

63. Utiliza la integración por partes para calcular la función $f(x)$ que cumple $f(0)=1$ y $f'(x)=e^x\cos x$.

$$f(x)=\int e^x\cos x dx = e^x\cos x+\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x\cos x+e^x\operatorname{sen} x-\int e^x\cos x dx.$$

Despejando tenemos $f(x)=\int e^x\cos x dx=\frac{e^x\cos x+e^x\operatorname{sen} x}{2}+C$.

$$f(0)=\frac{1}{2}+C=1\Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

Luego, $f(x)=\frac{e^x}{2}(\cos x+\operatorname{sen} x+1)$.

Integración de funciones racionales

64. Encuentra dos números reales A y B tales que: $\dfrac{4x-5}{x^2-1}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}$ y calcula $\displaystyle\int\frac{4x-5}{x^2-1}dx$.

$$\frac{4x-5}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}\Rightarrow A(x-1)+B(x+1)=4x-5$$

En particular, si hacemos $x=1$ obtenemos $2B=-1\Rightarrow B=-\dfrac{1}{2}$.

Y si hacemos $x=-1$, $-2A=-9\Rightarrow A=\dfrac{9}{2}$.

Luego, $\dfrac{4x-5}{x^2-1}=\dfrac{\frac{9}{2}}{x+1}+\dfrac{-\frac{1}{2}}{x-1}$.

$$\int\frac{4x-5}{x^2-1}dx=\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=\frac{9}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$$

65. Se consideran las funciones reales $f(x)=12x^3-8x^2+9x-5$ y $g(x)=6x^2-7x+2$. Calcula la función $H(x)=\displaystyle\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ que cumple que $H(1) = 1$.

$$H(x)=\int\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}dx=\int(2x+1)dx+\int\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}dx=x^2+x+\ln\left(6x^2-7x+2\right)+C$$

Como $H(1)=1\Rightarrow 1+1+\ln 1+C=1\Rightarrow C=-1$

La función es $H(x)=x^2+x+\ln\left(6x^2-7x+2\right)-1$.

66. Resuelve las siguientes integrales que dan lugar a funciones tipo arco tangente. Para ello, primero debes transformar las fracciones en otras de la forma: $\dfrac{a}{1+(ax+b)^2}$, cuya integral es inmediata $\displaystyle\int\frac{a}{1+(ax+b)^2}dx=\text{arctg}(ax+b)+C$.

a) $\displaystyle\int\frac{2}{1+x^2}dx=2\,\text{arctg}\,x+C$

b) $\displaystyle\int\frac{1}{1+2x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}}{1+\left(\sqrt{2}x\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\sqrt{2}x\right)+C$

c) $\displaystyle\int\frac{1}{9+x^2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx=\frac{1}{3}\text{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)+C$

d) $\displaystyle\int\frac{1}{4+(x-3)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right)+C$

e) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-4x+5}dx=\int\frac{1}{(x-2)^2+1}dx=\text{arctg}(x-2)+C$

f) $\displaystyle\int\frac{2}{x^2+10x+41}dx=\int\frac{2}{(x+5)^2+16}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{x+5}{4}\right)^2+1}dx=\frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{x+5}{4}\right)+C$

67. Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx$.

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx = \int -dx + \int \frac{x-2}{x^2+x-2}\,dx = -x + \int \frac{x-2}{(x-1)(x+2)}\,dx = -x + \int \frac{-\frac{1}{3}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{4}{3}}{x+2}\,dx =$$
$$= -x - \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{4}{3}\ln|x+2| + C$$

68. Halla la integral racional $\int \frac{3x}{x^2+x-2}\,dx$.

$$\int \frac{3x}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{3x}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx = \ln|x-1| + 2\ln|x+2| + C$$

69. Calcula la integral indefinida $\int \frac{x-1}{x^3+x^2}dx$.

$$\int \frac{x-1}{x^3+x^2}\,dx = \int \frac{x-1}{x^2(x+1)}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{-1}{x^2}\,dx + \int \frac{-2}{x+1}\,dx = 2\ln|x| + \frac{1}{x} - 2\ln|x+1| + C$$

70. Determina estas integrales correspondientes a los diferentes casos de funciones racionales.

a) $\int \frac{dx}{2x-7}$

Esta integral es inmediata.

$$\int \frac{dx}{2x-7} = \frac{1}{2}\ln|2x-7| + C$$

b) $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$

Caso C. Polinomio de 2.º grado sin raíces reales.

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}dx}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

c) $\int \frac{x}{x^2-4x-5}\,dx$

Caso A. Raíces reales distintas.

$$\int \frac{x}{x^2-4x-5}\,dx = \int \frac{x}{(x+1)(x-5)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{6}}{x+1}\,dx + \int \frac{\frac{5}{6}}{x-5}\,dx = \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{5}{6}\ln|x-5| + C$$

d) $\int \frac{1}{x^4+3x^2+2}\,dx$

Caso D. Raíces complejas de multiplicidad 1.

$$\int \frac{1}{x^4+3x^2+2}\,dx = \int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{-1}{x^2+2}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx =$$
$$= \text{arctg}\,x - \frac{\sqrt{2}}{2}\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

e) $\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

Caso B. Solo tiene raíces reales, algunas de ellas iguales.

$$\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx = \int \frac{x+5}{(x+1)(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx = \ln|x+1| - \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C$$

f) $\int \frac{x}{x^2+4x+7}dx$

Caso C. Polinomio de 2.º grado sin raíces reales.

$$\int \frac{x}{x^2+4x+7}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx - \int \frac{2}{x^2+4x+7}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+7| - \int \frac{2}{(x+2)^2+3}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+7| - \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+7| - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right) + C$$

g) $\int \frac{dx}{x^4+4}$

Caso D. Raíces complejas de multiplicidad 1.

$$\int \frac{1}{x^4+4}dx = \int \frac{-\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2-2x+2}dx + \int \frac{\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x-1)^2+1}dx + \frac{1}{16}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\ln\left(x^2-2x+2\right) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x-1) + \frac{1}{16}\ln\left(x^2+2x+2\right) + \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(x+1) + C$$

h) $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx$

Caso A. Raíces reales distintas.

$$\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{2x+1}{(x-2)(x-1)}dx = \int \frac{5}{x-2}dx + \int \frac{-3}{x-1}dx = 5\ln|x-2| - 3\ln|x-1| + C$$

Integración por cambio de variables

71. Calcula las siguientes primitivas realizando el cambio de variable que se indica.

a) $\int \frac{x}{x^4+1}dx$, $x^2 = t$

$x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2) + C$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4x-2}$, $2x-1=t^2$

$2x-1=t^2 \Rightarrow 2dx = 2tdt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4x-2} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{\sqrt{2x-1}+2(2x-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t+2t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2dt}{1+2t} = \frac{1}{2}\ln|1+2t| + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+2\sqrt{2x-1}\right) + C$$

72. Calcula la primitiva $\int \text{sen}(\ln x)dx$.

Hacemos el cambio de variable $x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$

$$\int \text{sen}(\ln x)dx = \int e^t \,\text{sen}\, t dt = e^t \,\text{sen}\, t - \int e^t \cos t dt = e^t \,\text{sen}\, t - e^t \cos t - \int e^t \,\text{sen}\, t dt = x\,\text{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \text{sen}(\ln x)dx$$

$$\int \text{sen}(\ln x)dx = \frac{x(\text{sen}(\ln x) - \cos(\ln x))}{2} + C$$

73. Sea la integral $\int e^{2x}\text{sen}(e^x)dx$:

a) Resuélvela mediante el cambio $t = e^x$.

b) Calcula la constante de integración para determinar la primitiva que pasa por el origen de coordenadas.

a) $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$$\int e^{2x}\,\text{sen}(e^x)dx = \int t\,\text{sen}\, t dt = -t\cos t - \int -\cos t dt = -t\cos t + \text{sen}\, t + C = -e^x\cos(e^x) + \text{sen}(e^x) + C$$

b) $0 = -e^0\cos(e^0) + \text{sen}(e^0) + C \Rightarrow C = \cos 1 - \text{sen}\,1$

74. Calcula las siguientes primitivas.

a) $\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}dx$ $\qquad \sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$

$$\int \frac{2}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{4t}{1+t}dt = \int \frac{4(t+1)}{1+t}dt - 4\int \frac{1}{1+t}dt = 4t - 4\ln|1+t| + C = 4\sqrt{x} - 4\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C$$

b) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx$ $\qquad e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx = \int \frac{1}{\left(t + \frac{1}{t}\right)t}dt = \int \frac{1}{t^2+1}dt = \text{arctg}(t) + C = \text{arctg}(e^x) + C$$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}dx$ $\qquad x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt = \int \frac{6t^3}{t+1}dt = \int \left(6t^2 - 6t + 6\right)dt + \int \frac{-6dt}{t+1} = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$
$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + C$$

d) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}dx$ $\qquad 1 + x^3 = t^2 \Rightarrow 3x^2 dx = 2t dt$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{((1+x^3)-1)3x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{(t^2-1)2t}{t}dt = \frac{2}{3}\int (t^2-1)dt = \frac{2}{9}t^3 - \frac{2}{3}t + C = \frac{2\sqrt{1+x^3}\left(x^3-2\right)}{9} + C$$

e) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx$ $\qquad 2^x = t \Rightarrow 2^x \ln 2 dx = dt$

$$\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{1}{\ln 2}\text{arcsen}(t) + C = \frac{1}{\ln 2}\text{arcsen}(2^x) + C$$

f) $\int \frac{x\,\text{arcsen}\, x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $\qquad t = \text{arcsen}\, x \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\int \frac{x\,\text{arcsen}\, x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int t\,\text{sen}\, t dt = -t\cos t + \int \cos t dt = -t\cos t + \text{sen}\, t + C = -\sqrt{1-x^2}\,\text{arcsen}\, x + x + C$$

75. Utiliza el cambio de variable $t^2 = 1 + x^2$ para calcular la integral indefinida $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

$$t^2 = 1 + x^2 \Rightarrow 2tdt = 2xdx \Rightarrow tdt = xdx$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}xdx = \int \frac{t^2-1}{t}tdt = \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} - \sqrt{1+x^2} + C$$

76. Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcula las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}dx \qquad t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}dx = \int \frac{dt}{(t^2-1)(t+1)} = \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)^2} = \int \frac{\frac{1}{4}dt}{(t-1)} + \int \frac{-\frac{1}{4}dt}{(t+1)} + \int \frac{-\frac{1}{2}dt}{(t+1)^2} =$$
$$\frac{1}{4}\ln|t-1| - \frac{1}{4}\ln|t+1| + \frac{1}{2}\frac{1}{t+1} + C = \frac{1}{4}\ln|e^x-1| - \frac{1}{4}\ln|e^x+1| + \frac{1}{2(e^x+1)} + C$$

b) $\int \frac{e^x}{1-e^{-x}}dx \qquad t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{1-e^{-x}}dx = \int \frac{dt}{1-\frac{1}{t}} = \int \frac{t}{t-1}dt = \int 1 + \frac{1}{t-1}dt = t + \ln|t-1| + C = e^x + \ln|e^x-1| + C$$

c) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$

Llamando $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| = \frac{1}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{2}\ln|e^x+1| + C = \ln\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} + C$$

77. Calcula $\int x\left(\ln(1+x^2) + e^{-x}\right)dx$.

$$\int x\left(\ln(1+x^2) + e^{-x}\right)dx = \int x\ln(1+x^2)dx + \int xe^{-x}dx$$

Para resolver la primera integral hacemos el cambio $t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$ y después la hacemos por partes. La segunda la hacemos por partes directamente:

$$\int x\ln(1+x^2)dx + \int xe^{-x}dx = \frac{1}{2}\int \ln t dt - xe^{-x} + \int e^{-x}dx = \frac{1}{2}t\ln t - \frac{1}{2}\int dt - xe^{-x} - e^{-x} = \frac{1}{2}t\ln t - \frac{1}{2}t - xe^{-x} - e^{-x} + C$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos:

$$\int x\left(\ln(1+x^2) + e^{-x}\right)dx = \frac{1}{2}(1+x^2)\left(\ln(1+x^2) - 1\right) - e^{-x}(x+1) + C$$

78. Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\int e^{x+e^x}dx$.

$$t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$$

$$\int e^{x+e^x}dx = \int e^x e^{e^x}dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{e^x} + C$$

79. Calcula $\int \sec^3 x dx$ (el cambio $\operatorname{sen} x = t$ lleva a una función racional).

$\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

$$\int \sec^3 x dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{1}{\left(1-t^2\right)^2} dt = \int \frac{\frac{1}{4}}{t+1} dt + \int \frac{\frac{1}{4}}{\left(t+1\right)^2} dt + \int \frac{-\frac{1}{4}}{t-1} dt + \int \frac{\frac{1}{4}}{\left(t-1\right)^2} dt =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{t+1} - \frac{1}{4}\ln|t-1| - \frac{1}{4}\frac{1}{t-1} + C = \frac{1}{4}\ln|\operatorname{sen} x + 1| - \frac{1}{4}\frac{1}{\operatorname{sen} x + 1} - \frac{1}{4}\ln|\operatorname{sen} x - 1| - \frac{1}{4}\frac{1}{\operatorname{sen} x - 1} + C$$

80. Calcula $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$ (realiza el cambio $\sqrt{x^2-2} - x = t$).

$$\sqrt{x^2-2} - x = t \Rightarrow dt = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-2}} - 1\right)dx = \frac{x - \sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-2}} dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} \cdot \frac{x-\sqrt{x^2-2}}{x-\sqrt{x^2-2}} dx = \int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-2}} \cdot \frac{x-\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2-2}} dx = \int \frac{1}{-t} dt = -\ln|t| + C = -\ln\left|\sqrt{x^2-2} - x\right| + C$$

Integración de funciones trigonométricas

81. Dada la función $f(x) = \cos x - \cos^3 x$:

a) Halla su integral indefinida.

b) ¿Cuál es la primitiva de $f(x)$ que pasa por $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$?

a) Hacemos el cambio $\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

$$\int \left(\cos x - \cos^3 x\right) dx = \int \cos x (1 - \cos^2 x) dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3} + C = 0 \Rightarrow C = -\dfrac{1}{3}$

La primitiva buscada es $F(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x - 1}{3}$.

82. Calcula estas dos integrales.

a) $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$ **b)** $\int \cos^3 x \, dx$

a) Haciendo el cambio $\cos x = t \Rightarrow -\operatorname{sen} x dx = dt$:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x dx = \int (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x dx = -\int (1 - t^2) dt = \frac{1}{3}t^3 - t + C = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

b) Haciendo el cambio $\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$:

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \, dx = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{1}{3}t^3 + C = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$

83. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int (2\operatorname{sen}^2 x - 3\cos x)\, dx = 2\int \operatorname{sen}^2 x\, dx - 3\int \cos x\, dx$

Para calcular $\int sen^2 x\, dx$ lo hacemos por partes:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\operatorname{sen} x\cos x + \int \cos^2 x dx = -\operatorname{sen} x\cos x + \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\, dx = -\operatorname{sen} x\cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\, dx$$

Despejando, obtenemos $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \dfrac{x - \operatorname{sen} x\cos x}{2} + C$.

Y por tanto: $\int (2\operatorname{sen}^2 x - 3\cos x)\, dx = 2\int \operatorname{sen}^2 x\, dx - 3\int \cos x\, dx = x - \operatorname{sen} x\cos x - 3\operatorname{sen} x + C$

b) $\int \cos^5 x \operatorname{sen}^2 x\, dx$

Hacemos el cambio $\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$:

$$\int \cos^5 x \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \cos^4 x \operatorname{sen}^2 x \cos x dx = \int \left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^2 \operatorname{sen}^2 x \cos x dx = \int (1-t^2)^2 t^2 dt = \int (t^6 - 2t^4 + t^2) dt =$$

$$= \frac{1}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x - \frac{2}{5}\operatorname{sen}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$

c) $\int \dfrac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$

Hacemos el cambio $\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x} \cos x\, dx = \int \frac{1-t^2}{t^2} dt = \int \frac{1}{t^2} dt - \int dt = -\frac{1}{t} - t + C = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x + C$$

d) $\int \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x} dx$

Hacemos el cambio $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t \Rightarrow \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2};\ \operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2};\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x} dx = \int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{4t^3} dt = \frac{1}{4}\int t dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t} dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{8t^2} + C =$$

$$= \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \frac{\cot g^2\left(\frac{x}{2}\right)}{8} + C$$

84. Halla estas integrales haciendo el cambio $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$.

Como $\left(1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}\right)\dfrac{1}{2} dx = dt \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$ y $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ y $\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

a) $$\int \frac{1}{2+\cos x} dx = \int \frac{1}{2 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{t^2+3} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + C$$

b) $$\int \frac{1}{2+\operatorname{sen} x} dx = \int \frac{1}{2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} dt}{\left(\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

85. Busca en tu libro de 1.º las fórmulas de las sumas y restas de senos y cosenos y empléalas para calcular estas integrales:

a) $\int \cos(5x-3)\operatorname{sen}(3x-1)\,dx$

Usamos $2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)=\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}b \Rightarrow \begin{cases} a=(5x-3)+(3x-1)=8x-4 \\ b=(5x-3)-(3x-1)=2x-2 \end{cases}.$

$$\int \cos(5x-3)\operatorname{sen}(3x-1)\,dx=\frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(8x-4)dx-\frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2x-2)dx=-\frac{\cos(8x-4)}{16}+\frac{\cos(2x-2)}{4}+C$$

b) $\int \cos(2x+6)\cos(4x-2)\,dx$

Usamos $2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)=\cos a+\cos b \Rightarrow \begin{cases} a=6x+4 \\ b=2x-8 \end{cases}.$

$$\int \cos(2x+6)\cos(4x-2)\,dx=\frac{1}{2}\int \cos(6x+4)dx+\frac{1}{2}\int \cos(2x-8)dx=\frac{\operatorname{sen}(6x+4)}{12}+\frac{\operatorname{sen}(2x-8)}{4}+C$$

c) $\int \operatorname{sen}(2x+1)\operatorname{sen}(3x+5)\,dx$

Usamos $2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)=\cos b-\cos a \Rightarrow \begin{cases} a=5x+6 \\ b=x+4 \end{cases}.$

$$\int \operatorname{sen}(2x+1)\operatorname{sen}(3x+5)\,dx=\frac{1}{2}\int \cos(x+4)dx-\frac{1}{2}\int \cos(5x+6)dx=\frac{\operatorname{sen}(x+4)}{2}-\frac{\operatorname{sen}(5x+6)}{10}+C$$

d) $\int \operatorname{sen}(2x+1)\cos(3x+5)\,dx$

Usamos $2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)=\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}b \Rightarrow \begin{cases} a=5x+6 \\ b=x+4 \end{cases}.$

$$\int \operatorname{sen}(2x+1)\cos(3x+5)\,dx=\frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(5x+6)dx-\frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(x+4)dx=\frac{-\cos(5x+6)}{10}+\frac{\cos(x+4)}{2}+C$$

Integrales no elementales

86. Partiendo de que $\int \frac{e^{ax}}{x^n}dx$, $a\neq 0$, $n\in\mathbb{N}$ no es elemental, demuestra que las siguientes integrales tampoco lo son.

a) $\int \frac{dx}{\ln x}$ **b)** $\int e^{e^x}dx$ **c)** $\int \ln(\ln x)dx$

a) Hacemos el cambio $e^t=x \Rightarrow e^t dt=dx$ $\int \frac{dx}{\ln x}=\int \frac{e^t}{t}dt$.

b) Hacemos el cambio $t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx$ $\int e^{e^x}dx=\int \frac{e^{e^x}}{e^x}e^x dx=\int \frac{e^t}{t}dt$.

c) Hacemos el cambio $e^t=x \Rightarrow e^t dt=dx$ $\int \ln(\ln x)dx=\int \ln t\cdot e^t dt$.

Ahora, integrando por partes, tenemos $\int \ln(\ln x)dx=\int \ln t\cdot e^t dt=\ln t\cdot e^t-\int \frac{e^t}{t}dt$.

87. Utilizando la tabla de integración por partes demuestra que $\int \frac{e^x}{x}dx$, no es elemental.

Si tomamos $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g'(x)=e^x$:

f	g'
$\frac{1}{x}$	e^x
$-\frac{1}{x^2}$	e^x
$\frac{2}{x^3}$	e^x
...	...

Si tomamos $f(x)=e^x$ y $g'(x)=\frac{1}{x}$:

f	g'
e^x	$\frac{1}{x}$
e^x	$\ln x$
e^x	$x(\ln x-1)$
...	...

Se observa que tanto de una forma como de la otra se llega a sumas de infinitos sumandos y, por tanto, la integral es no elemental.

Actividades de síntesis

88. Resuelve las siguientes integrales por el método que creas más conveniente.

a) $\int \frac{x^2+2\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}+3}{2x}dx=\frac{1}{2}\int x\,dx+\int x^{\frac{-2}{3}}dx-\frac{1}{2}\int x^{\frac{-1}{2}}dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x}dx=\frac{1}{4}x^2+3\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}+\frac{3}{2}\ln|x|+C$

b) $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$

Como $\operatorname{sen}^5 x=\operatorname{sen}^4 x\operatorname{sen} x$, se pone $\cos x=t$ y $-\operatorname{sen} x dx=dt$, quedándonos:

$$\int \operatorname{sen}^5 x\,dx=\int(1-\cos^2 x)^2\operatorname{sen} x\,dx=-\int(1-t^2)^2\,dt=-\frac{1}{5}t^5-t+\frac{2}{3}t^3=-\frac{1}{5}\cos^5 x-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x+C$$

c) $\int\sqrt{x}(1-x^2)dx$

Poniendo $x=t^2$ y $dx=2tdt$, se tiene: $2\int t(1-t^4)t\,dt=2\frac{t^3}{3}-2\frac{t^7}{7}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{2}{7}\sqrt{x^7}+C$

d) $\int\frac{1}{x^2-x}dx=\int\frac{dx}{x(x-1)}=\int\frac{-dx}{x}+\int\frac{dx}{x-1}=-\ln|x|+\ln|x-1|+C$

e) $\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$

Haciendo $1+x=t^2$ y $dx=2tdt$, se tiene:

$$\int(t^2-1)^2t\cdot 2t\,dt=2\left(\frac{t^7}{7}-2\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)=2\sqrt{(1+x)^3}\left(\frac{(1+x)^2}{7}-\frac{2}{5}(1+x)+\frac{1}{3}\right)+C=\frac{2}{105}\sqrt{(1+x)^3}(15x^2-12x+8)+C$$

f) $\int\left(\frac{x-2\sqrt{x}}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=\int\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=x-4\sqrt{x}-\frac{6}{x}-\ln|x|+C$

g) $\int \text{tg}(ax)\sec^2(ax)dx$

Haciendo $\text{tg}(ax)=t$ y $a\sec^2(ax)dx=dt$, se llega a $\frac{1}{a}\int t\,dt=\frac{1}{a}\cdot\frac{t^2}{2}=\frac{1}{2a}\text{tg}^2(ax)+C$.

h) $\int x\ln(x+a)dx=\frac{x^2\ln(a+x)}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+a}dx=\frac{x^2\ln(a+x)}{2}-\frac{1}{2}\int(x-a)dx-\frac{1}{2}\int\frac{a^2}{x+a}dx=$

$=\frac{x^2\ln(a+x)}{2}-\frac{1}{4}(x-a)^2-\frac{a^2}{2}\ln(x+a)+C=\frac{1}{2}\ln(x+a)\left(x^2-a^2\right)-\frac{1}{4}(x-a)^2+C$

i) $\int\frac{x}{(x-2)(x^2-9)}dx=\int\frac{x}{(x-2)(x-3)(x+3)}dx=-\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x+3}=$

$=-\frac{2}{5}\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{10}\ln|x+3|+C$

j) $\int x\,\text{sen}(2x)\,dx$

f	g'
x	$\text{sen}(2x)$
1	$-\frac{1}{2}\cos(2x)$
0	$-\frac{1}{4}\text{sen}(2x)$

$\int x\,\text{sen}(2x)\,dx=-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{4}\text{sen}2x+C$

89. Resuelve estas integrales por el método más adecuado.

a) $\int x^a\ln x\,dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}\ln x-\frac{1}{a+1}\int x^{a+1}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}\ln x-\frac{1}{a+1}\cdot\frac{x^{a+1}}{a+1}=\frac{1}{a+1}x^{a+1}\left(\ln x-\frac{1}{a+1}\right)+C$

Si $a=-1$, $\int x^a\ln x\,dx=\int\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$

b) $\int e^{-x}\cos(5x)dx=-e^{-x}\cos(5x)+5e^{-x}sen(5x)-25\int e^{-x}\cos(5x)dx\Rightarrow\int e^{-x}\cos(5x)dx=$

$=\frac{-e^{-x}\cos(5x)+5e^{-x}sen(5x)}{26}+C$

c) $\int x\sqrt{x-3}\,dx$

Haciendo $x-3=t^2$ y $dx=2tdt$, se tiene:

$\int x\sqrt{x-3}\,dx=\int(t^2+3)t\cdot 2t\,dt=2\left(\frac{t^5}{5}+t^3\right)=\frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5}+2\sqrt{(x-3)^3}+C$

d) $\int\frac{\ln x}{x^3}dx$

Se denomina $f(x)=\ln x$ y $g'(x)=\frac{1}{x^3}$.

$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=-\frac{1}{2}\ln x\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{2}\ln x\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4x^2}+C$

e) $\int \frac{4}{x^4-1}dx$

$$\frac{4}{x^4-1}=\frac{4}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1}=\frac{(Ax+B)(x^2-1)+C(x^2+1)(x-1)+D(x^2+1)(x+1)}{x^4-1}$$

De la igualdad $4=(Ax+B)(x^2-1)+C(x^2+1)(x-1)+D(x^2+1)(x+1)$, haciendo:

$x=1 \Rightarrow 4=4D \Rightarrow D=1$

$x=-1 \Rightarrow 4=-4C \Rightarrow C=-1$

$x=0 \Rightarrow 4=-B-C+D \Rightarrow B=-2$

$x=2 \Rightarrow 4=6A+3B+5C+15D \Rightarrow A=0$

Luego la integral pedida es:

$$\int \frac{4}{x^4-1}dx=-2\ arctgx-\ln|x+1|+\ln|x-1|+C$$

f) $\int x\ln\sqrt{1+x^2}\,dx$

Como $x\ln\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}x\ln(1+x^2) \Rightarrow \int x\ln\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int x\ln(1+x^2)dx$. La integral se puede resolver haciendo $1+x^2=t$ y $2xdx=dt$ y se transforma en $\frac{1}{2}\int \ln t dt=\frac{1}{2}(t\ln t-t)=\frac{1}{2}t(\ln t-1)$.

Así que la integral pedida es $\int x\ln\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{4}(1+x^2)\left(\ln(1+x^2)-1\right)+C$.

g) $\int x\left(ax^2+b\right)^n dx$

Si $n=-1$, $\int \frac{x}{ax^2+b}dx=\frac{1}{2a}\ln|ax^2+b|+C$

Si $n\neq 1$, haciendo $ax^2+b=t$ y $2axdx=dt$, se tiene que:

$$\int x(ax^2+b)^n dx=\frac{1}{2a}\int t^n dt=\frac{1}{2a(n+1)}\left(ax^2+b\right)^{n+1}+C$$

h) $\int \frac{\pi}{\cos^2(\pi x-1)}dx=tg(\pi x-1)+C$

i) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

Haciendo $x=t^6$ y $dx=6t^5dt$, se tiene que resolver $6\int \frac{t^3-1}{t^2+1}\cdot\ t^5dt$

Como $t^8-t^5=(t^2+1)(t^6-t^4-t^3+t^2+t-1)+(1-t)$ la integral pedida es:

$$6\int (t^6-t^4-t^3+t^2+t-1)dt+6\int \frac{1-t}{t^2+1}dt=$$
$$=6\left(\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{1}{4}\sqrt[6]{x^4}+\frac{1}{3}\sqrt[6]{x^3}+\frac{1}{2}\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{x}\right)+6arctg\sqrt[6]{x}-3\ln\left(\sqrt[6]{x^2}+1\right)+C$$

j) $\int \frac{\text{sen}x}{1+\text{tg}^2x}dx=\int \text{sen}x\cos^2x dx=-\frac{1}{3}\cos^3x+C$

k) $\int \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 dx$

Como $\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x}-2)$

Así pues $\int \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}-2x\right)+C$

l) $\int \frac{x^2}{x^3+x^2-2x}dx$

$$\frac{x^2}{x^3+x^2-2x}=\frac{x}{x^2+x-2}=\frac{x}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

Como $x=A(x-1)+B(x+2)\Rightarrow \text{A}=\frac{2}{3}, B=\frac{1}{3}$ por lo que $\int \frac{x^2}{x^3+x^2-2x}dx=\frac{2}{3}\ln|x+2|+\frac{1}{3}\ln|x-1|+C$

m) $\int \frac{x-3}{x^2+9}dx=\int \frac{x}{x^2+9}dx-\int \frac{3}{x^2+9}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\text{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)+C$

n) $\int x\sqrt{x^2-9}\,dx$ Haciendo $x^2-9=t$ y $2xdx=dt$:

$$\int x\sqrt{x^2-9}\,dx=\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3}=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-9)^3}+C$$

o) $\int (e^{\text{sen}3x})^3\cos(3x)\,dx$

Haciendo $e^{sen3x}=t$ y $e^{\text{sen}3x}\cdot 3\cos 3x dx=dt$, se tiene que:

$$\int \left(e^{\text{sen}3x}\right)^3\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\int t^2dt=\frac{1}{9}t^3=\frac{1}{9}\left(e^{sen3x}\right)^3+C$$

p) $\int \cos\frac{x}{2}\cos x\,dx$

Usamos $2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)=\cos a+\cos b\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{2}x \\ b=\frac{1}{2}x \end{cases}$

$$\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int \cos\left(\frac{3x}{2}\right)dx+\frac{1}{2}\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{3}sen\left(\frac{3x}{2}\right)+sen\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

q) $\int \frac{x-3}{x^3+x^2+x}dx=-3\ln|x|+\int \frac{3x+4}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$ y esta última integral se resuelve como:

$\int \frac{3x+4}{x^2+x+1}dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{8}{3}}{x^2+x+1}dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x+1+\frac{5}{3}}{x^2+x+1}dx=\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$ y, finalmente,

$$\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Así pues, $\int \frac{x-3}{x^3+x^2+x}dx=-3\ln|x|+\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{5}{\sqrt{3}}\text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

r) $\int \frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2}dx$

$$\frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}=\frac{A(x+1)(x+2)^2+B(x+2)^2+C(x+1)^2(x+2)+D(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)^2}$$

$x^2+3x-2=A\,(x+1)(x+2)^2+B\,(x+2)^2+C\,(x+1)^2\,(x+2)+D\,(x+1)^2$

Si $x=-1\Rightarrow -4=B$

Si $x=-2\Rightarrow -4=D$

Si $x=0\Rightarrow -2=4A+4B+2C+D$

Si $x=1$ es $2=18A+9B+12C+4D$

Por tanto, $B=-4$, $D=-4$, $4A+2C=18$; $18A+12C=54$, por lo que $A=9$, $C=-9$ y la integral pedida es:

$$\int \frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2}dx=9\ln|x+1|+\frac{4}{x+1}-9\ln|x+2|+\frac{4}{x+2}+C$$

s) $\int \frac{(1+x)^3}{\sqrt{x}} dx$

$\frac{(1+x)^3}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$, así que $\int \frac{(1+x)^3}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3} + \frac{6}{5}\sqrt{x^5} + \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + C$

t) $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx$

Poniendo $\sqrt{x+1} = t$ y $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx = dt$, se tiene que:

$$\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}} dx = 2\int \ln t^2 dt = 4(t\ln t - t) = 4\sqrt{x+1}\left(\ln\sqrt{x+1} - 1\right) + C$$

u) $\int \frac{5\cdot 2^x + 3^x}{3^{x-1}} dx$

Operando: $\frac{5\cdot 2^x + 3^x}{3^{x-1}} = 15\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3$

Así pues $\int \frac{5\cdot 2^x + 3^x}{3^{x-1}} dx = 15\int\left(\frac{2}{3}\right)^x dx + 3x = \frac{15}{\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3x + C$

v) $\int \frac{2x+5}{x^2+x+1} dx$

Como $\frac{2x+5}{x^2+x+1} = \frac{2x+1+4}{x^2+x+1}$, se tiene que:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+x+1} dx = \ln(x^2+x+1) + 4\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \ln(x^2+x+1) + 4\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

w) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx - \int \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

Llamando $t = e^x; dt = e^x dx$ y $s = e^{-x}; ds = -e^{-x} dx$

$$\int \frac{t}{t^2+1} dt + \int \frac{s}{1+s^2} ds = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(s^2+1\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(e^{-2x}+1\right) + C$$

x) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + 2\sqrt{x+1} + C$

y) $\int \frac{x^2}{1-x^6} dx$ Llamando $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$:

$$\int \frac{x^2}{1-x^6} dx = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{6}\int \frac{dt}{1+t} = -\frac{1}{6}\ln\left|1-t\right| + \frac{1}{6}\ln\left|1+t\right| + C = -\frac{1}{6}\ln\left|1-x^3\right| + \frac{1}{6}\ln\left|1+x^3\right| + C$$

z) $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{x+1} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} - \int \frac{dx}{x+1} = 2\sqrt{x+1} - \ln\left|x+1\right| + C$

90. Sea la función definida $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $f(x)=\left(1-x^2\right)e^{-x}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $A(-1, 0)$.

$u=1-x^2$	$v'=e^{-x}$
$-2x$	$-e^{-x}$
-2	e^{-x}
0	$-e^{-x}$

$$F(x)=\int\left(1-x^2\right)e^{-x}dx=-\left(1-x^2\right)e^{-x}+2x\,e^{-x}+2\,e^{-x}+C=\left(x+1\right)^2e^{-x}+C$$

Como $F(-1)=0\Rightarrow 0=\left(-1+1\right)^2e^{1}+C\Rightarrow C=0$ la función buscada es $F(x)=\left(x+1\right)^2e^{-x}$.

91. A partir de los datos, halla en cada caso la función $f(x)$.

a) $f'(x)=(x-1)^3(x-3), f(0)=1$

$$f(x)=\int(x-1)^3(x-3)dx=\int(x^3-3x^2+3x-1)(x-3)dx=\int(x^4-6x^3+12x^2-10x+3)dx=\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{2}+4x^3-5x^2+3x+C$$

Como $f(0)=1\Rightarrow C=1$, la función buscada es $f(x)=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{3x^4}{2}+4x^3-5x^2+3x+1$.

b) $f'(x)=\left(3x-2\right)^2\left(x-2\right), f(2)=0$

$$f(x)=\int\left(3x-2\right)^2\left(x-2\right)dx=\int\left(9x^3-30x^2+28x-8\right)dx=\frac{9}{4}x^4-10x^3+14x^2-8x+C$$

Como $f(2)=0\Rightarrow 0=\dfrac{9}{4}\cdot 16-10\cdot 8+14\cdot 4-8\cdot 2+C\Rightarrow C=4,$ la función buscada es:

$$f(x)=\frac{9}{4}x^4-10x^3+14x^2-8x+4.$$

92. Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$, halla $\int f(x)\,dx$.

$$\int\left(\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx=\int\frac{x}{x^2-4}dx+\int\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right|+\frac{1}{2}\ln^2(x+1)+C$$

93. Halla la integral indefinida $\int\dfrac{3x+7}{\left(x^2-3x+2\right)\left(x-3\right)}dx$.

$$\int\frac{3x+7}{\left(x^2-3x+2\right)\left(x-3\right)}dx=\int\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)\left(x-3\right)}dx$$

Debemos integrar una función ración racional por lo que la escribimos como: $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}=\dfrac{3x+7}{(x-1)(x-2)\left(x-3\right)}$

Resolviendo $\begin{cases}A+B+C=0\\-5A-4B-3C=3\\6A+3B+2C=7\end{cases}$ obtenemos $A=5$, $B=-13$, $C=8$ y podemos escribir la integral como:

$$\int\frac{3x+7}{\left(x^2-3x+2\right)\left(x-3\right)}dx=\int\frac{5}{(x-1)}dx+\int\frac{-13}{(x-2)}dx+\int\frac{8}{(x-3)}dx=5\ln\left|x-1\right|-13\ln\left|x-2\right|+8\ln\left|x-3\right|+C$$

94. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$

b) $\int \sqrt{6x-x^2-8}\,dx$

c) $\int \sqrt{1-(2x-1)^2}\,dx$

d) $\int \sqrt{3-x^2+2x}\,dx$

(Pista: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ se calcula con el cambio $x = \operatorname{sen} t$).

a) $\int \sqrt{1-4x^2}dx = \int \sqrt{1-(2x)^2}dx$

Haciendo $2x = t$ y $2dx = dt$, se tiene que $\int \sqrt{1-4x^2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1-t^2}dt$.

Poniendo ahora $t = \operatorname{sen} u$ y $dt = \cos u\,du$ se tiene:

$$\frac{1}{2}\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2u}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} t + t\sqrt{1-t^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} 2x + 2x\sqrt{1-4x^2}\right) + C$$

b) $\int \sqrt{6x-x^2-8}\,dx$

Como $6x-x^2-8 = 1-(x-3)^2$, se tiene que $\int \sqrt{6x-x^2-8}\,dx = \int \sqrt{1-(x-3)^2}dx$.

Haciendo $x-3 = t$ y $dx = dt$ se tiene:

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen} t + t\sqrt{1-t^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}(x-3) + (x-3)\sqrt{1-(x-3)^2}\right) + C$$

c) $\int \sqrt{1-(2x-1)^2}\,dx$

Haciendo $2x-1 = t$ y $2dx = dt$, se tiene que:

$$\int \sqrt{1-(2x-1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{4}\left(\operatorname{arcsen} t + t\sqrt{1-t^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\operatorname{arcsen}(2x-1) + (2x-1)\sqrt{1-(2x-1)^2}\right) + C$$

d) $\int \sqrt{3-x^2+2x}\,dx$

Como $3-x^2+2x = 4-(x-1)^2$, se tiene que $\int \sqrt{3-x^2+2x}\,dx = \int \sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$.

Haciendo $x-1 = 2t$ y $dx = 2dt$, se tiene:

$$2\int \sqrt{4-4t^2}\,dt = 4\int \sqrt{1-t^2}\,dt = 2\left(\operatorname{arcsen} t + t\sqrt{1-t^2}\right) = 2\left(\operatorname{arcsen}\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}\right) + C$$

95. **Escribe como integral de un cociente de polinomios $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$ y resuélvela (haz el cambio $x = \frac{1}{\text{sen}\,t}$).**

Poniendo $x = \frac{1}{\text{sen}\,t}$ y $dx = \frac{-\cos t}{\text{sen}^2 t}dt$, la integral dada se transforma en $-\int \frac{\cos^2 t}{\text{sen}^3 t}dt$.

Haciendo en esta última integral $\cos t = u$ y $-\text{sen}\,t\,dt = du$, se tiene que $\int \frac{u^2}{(1-u^2)^2}du$, cociente de polinomios.

$$\frac{u^2}{(1-u^2)^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{(1+u)^2} + \frac{C}{1-u} + \frac{D}{(1-u)^2} = \frac{A(1+u)(1-u)^2 + B(1-u)^2 + C(1-u)(1+u)^2 + D(1+u)^2}{(1+u)^2(1-u)^2}$$

En la igualdad $u^2 = A\,(1+u)(1-u)^2 + B\,(1-u)^2 + C\,(1-u)(1+u)^2 + D\,(1+u)^2$, haciendo:

$$u = 1 \Rightarrow 1 = 4D \Rightarrow D = \frac{1}{4}$$

$$u = -1 \Rightarrow 1 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 0 \Rightarrow 0 = A + B + C + D \\ u = 2 \Rightarrow 4 = 3A + B - 9C + 9D \end{array}\right\} \Rightarrow A = C = -\frac{1}{4}$$

La integral será:

$$\int \frac{u^2}{(1-u^2)^2}du = -\frac{1}{4}\ln|1+u| - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+u} + \frac{1}{4}\ln|1-u| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-u} = \frac{1}{2}\cdot\frac{u}{1-u^2} - \frac{1}{4}\ln\frac{1+u}{1-u}$$

Deshaciendo el cambio, se tiene:

$$\frac{u}{1-u^2} = \frac{\cos t}{\text{sen}^2 t} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = x\sqrt{x^2-1}$$

$$\frac{1+u}{1-u} = \frac{1+\cos t}{1-\cos t} = \frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2$$

Luego $\int \sqrt{x^2-1}\,dx = \int \frac{u^2}{(1-u^2)^2}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u}{1-u^2} - \frac{1}{4}\ln\frac{1+u}{1-u} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right) + C$

96. **a)** ¿Cuándo una función $F(x)$ es una primitiva de otra función $f(x)$?

b) Con el cambio de variable $t = \sqrt{x-1}$, halla la primitiva de la función $f(x) = x\sqrt{x-1}$ cuya gráfica pasa por el punto (1, 0).

a) Cuando $F'(x) = f(x)$.

b) Llamando $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = t^2+1$ y $dx = 2t\,dt$

$$F(x) = \int x\sqrt{x-1}\,dx = \int (t^2+1)t\cdot 2t\,dt = \int \left(2t^4+2t^2\right)dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + C$$

Como $F(1) = 0 \Rightarrow \frac{2}{5}\left(\sqrt{1-1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-1}\right)^3 + C = 0 \Rightarrow C = 0$ y la función es $F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{x-1}\,(x-1)^2 + \frac{2}{3}\sqrt{x-1}\,(x-1)$.

CUESTIONES

97. Observando que si $F(x)=f(x)g(x)$ entonces $F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$, encuentra $f(x)$ y $g(x)$ en los casos siguientes y decide quién es $F(x)$:

a) $F'(x)=2xe^x+x^2e^x$

$f(x)=x^2$ y $g(x)=e^x$ y $F(x)=x^2e^x$

b) $F'(x)=2x\cos x-x^2\operatorname{sen}x$

$f(x)=x^2$ y $g(x)=\cos x$ y $F(x)=x^2\cos x$

c) $F'(x)=\frac{1}{x}\operatorname{sen}x+\ln x\cos x$

$f(x)=\ln x$ y $g(x)=\operatorname{sen}x$ y $F(x)=\ln x\operatorname{sen}x$

d) $F'(x)=e^x\operatorname{sen}x+e^x\cos x$

$f(x)=e^x$ y $g(x)=\operatorname{sen}x$ y $F(x)=e^x\operatorname{sen}x$

e) $F'(x)=e^x\operatorname{sen}x-e^x\cos x=-e^x\cos x+e^x\operatorname{sen}x$

$f(x)=-e^x$ y $g(x)=\cos x$ y $F(x)=-e^x\cos x$

f) $F'(x)=1+\ln x=\frac{1}{x}\cdot x+\ln x\cdot 1$

$f(x)=\ln x$ y $g(x)=x$ y $F(x)=x\ln x$

98. Un estudiante no maneja el método de integración por partes y tiene que calcular $\int xe^x dx$. Como le han explicado que todas las primitivas de $f(x)=xe^x$ son de la forma $F(x)=Axe^x+Be^x$ con A y B números reales, se ha basado en ello para resolver el problema. ¿Cómo lo hizo?

Como $F'(x)$ debe ser igual a xe^x, derivó $F(x)$ y obtuvo:

$F'(x)=Ae^x+Axe^x+Be^x=xe^x$ para todo x.

Si $x=0$ obtenemos $A+B=0$ y si $x=1$ obtenemos $2Ae+Be=e$ por lo que $A=1$ y $B=-1$ y la primitiva buscada es $F(x)=xe^x-e^x$.

99. ¿Qué curva pasa por (0, 8) y en cada punto (x, y) de su gráfica la pendiente de la tangente es $3x^2y$?

La pendiente de la tangente en el punto (x, $f(x)$) es $f'(x)$ por lo que $f'(x)=3x^2f(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=3x^2$

Así pues $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 3x^2dx$ .Luego $\ln|f(x)|=x^3+C\Rightarrow f(x)=e^{x^3+C}=e^{x^3}\cdot D$

Como $f(0)=1\cdot D=8\Rightarrow D=8$

La función buscada es $f(x)=8e^{x^3}$.

100. Justifica que si $\int \frac{1}{x^2+bx+c}dx = \int \frac{1}{(x+p)^2+q^2}dx$, entonces $\int \frac{1}{x^2+bx+c}dx = \frac{1}{q}arctg\left(\frac{x+p}{q}\right)+C$.

Como $\int \frac{1}{(x+p)^2+q^2}dx = \int \frac{1}{q^2\left[\left(\frac{x+p}{q}\right)^2+1\right]}dx = \frac{1}{q}\int \frac{\frac{1}{q}}{\left[\left(\frac{x+p}{q}\right)^2+1\right]}dx$

Llamando $t = \frac{x+p}{q} \Rightarrow dt = \frac{1}{q}dx$ se tiene que:

$\frac{1}{q}\int \frac{\frac{1}{q}}{\left[\left(\frac{x+p}{q}\right)^2+1\right]}dx = \frac{1}{q}\int \frac{dt}{t^2+1}dx = \frac{1}{q}\text{arctg}\,t + C = \frac{1}{q}\text{arctg}\left(\frac{x+p}{q}\right)+C$.

101. Justifica que $\int \ln^n x dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x dx$ y calcula $\int \ln^3 x dx$.

Llamando $f(x)=\ln^n x$ y $g'(x)=1$ se tiene que $f'(x)=\frac{n\ln^{n-1}x}{x}$ y $g(x)=x$.

Integrando por partes $\int \ln^n x dx = x\ln^n x - \int x\cdot\frac{n\ln^{n-1}x}{x}dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x dx$.

$\int \ln^3 x dx = x\ln^3 x - 3\int \ln^2 x dx = x\ln^3 x - 3\left(x\ln^2 x - 2\int \ln x dx\right) = x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6\left(x\ln x - \int dx\right) =$
$x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + C$

102. Sea *f* una función derivable. Al calcular $\int f(x)\cos 2x\, dx$ se obtiene:

$\int f(x)\cos 2x dx = \frac{1}{2}f(x)\,\text{sen}\,2x - \int e^{2x}\,\text{sen}\,2x dx$

Si $f(0)=\frac{1}{2}e^2$, calcula $f(x)$.

Hemos integrado por partes llamando $f(x) = f(x)$ y $g'(x) = \cos 2x$.

Como $g(x)$ = $g(x)=\frac{1}{2}\text{sen } 2x$ la integral quedaría:

$\int f(x)\cos 2x dx = \frac{1}{2}f(x)\,\text{sen}\,2x - \int \frac{1}{2}f'(x)\,\text{sen}\,2x dx$. Así pues, $\int \frac{1}{2}f'(x)\,\text{sen}\,2x dx = \int e^{2x}\,\text{sen}\,2x dx$ y, por tanto $f'(x)=2e^{2x}$ por lo que $f(x)=e^{2x}+C$.

Como queremos que $f(0)=e^{2\cdot 0}+C=1+C=\frac{1}{2}e^2 \Rightarrow C=\frac{1}{2}e^2-1$ y la función buscada es $f(x)=e^{2x}+\frac{1}{2}e^2-1$.

103. Al calcular $\int \frac{1}{1+x^2}dx$, un estudiante observa que $\frac{1}{1+x^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ y como $-\frac{1}{x^2}$ es la derivada de $\frac{1}{x}$, se dice que $\int \frac{1}{1+x^2}dx = -\text{arctg}\frac{1}{x} + C$. ¿Pero $\int \frac{1}{1+x^2}dx$ no era $\text{arctg}x + C$? ¿Hay algún error en el razonamiento del estudiante?

No, no hay ningún error en el razonamiento, lo que ocurre es que esas dos funciones solo difieren en la constante $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y, por tanto, ambas son primitivas de la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

PROBLEMAS

104. La integral $\int \frac{\text{sen}x + \cos x}{3 + \text{sen}2x}dx$ es una integral racional en sen$x$ y cos$x$ por lo que el cambio $t = \text{tg}\frac{x}{2}$ la resolvería. Pero el cálculo es mucho más cómodo si se busca una función $g(x)$ tal que $g'(x) = \text{sen}x + \cos x$ y se hace $g(x) = t$ y $g'(x)dx = dt$. Hazlo así.

Si $g'(x) = \text{sen}\,x + \cos x$, entonces $g(x) = -\cos x + \text{sen}\,x$, por lo que $g^2(x) = 1 - \text{sen }2x$.

Así pues la integral $\int \frac{\text{sen}\,x + \cos x}{3 + \text{sen}\,2x}dx$, se puede escribir como $\int \frac{g'(x)\,dx}{4 - g^2(x)}$ que, con $g(x) = t$ y $g'(x)dx = dt$, se transforma en $\int \frac{dt}{4-t^2}$. Descomponiendo en fracciones simples:

$\frac{1}{4-t^2} = \frac{A}{2+t} + \frac{B}{2-t} = \frac{A(2-t)+B(2+t)}{4-t^2}$ se tiene que $1 = A\,(2-t) + B\,(2+t)$ y haciendo $t = 2 \Rightarrow 1 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}$ y $t = -2 \Rightarrow 1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

Luego $\int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln|2+t| - \frac{1}{4}\ln|2-t| = \frac{1}{4}\ln\frac{|2+t|}{|2-t|}$

Así pues $\int \frac{\text{sen}\,x + \cos x}{3 + \text{sen}\,2x}dx = \frac{1}{4}\ln\frac{2 + \text{sen}\,x - \cos x}{2 + \cos x - \text{sen}\,x} + C$.

105. Halla $\int \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x - 1}}dx$ con un cambio de variable.

Si $e^x - 1 = t^2$ y $e^x dx = 2tdt$, se tiene que:

$$\int \frac{e^x}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}dx = \int \frac{2t\,dt}{(t^2+4)t} = \int \frac{2\,dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} = \text{arctg}\frac{t}{2} = \text{arctg}\frac{\sqrt{e^x-1}}{2} + C$$

106. Calcula una primitiva de la función $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ de modo que $F(2)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$.

$$F(x)=\int\frac{dx}{1-x^2}=\int\frac{dx}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x}dx=-\frac{1}{2}\ln|1-x|+\frac{1}{2}\ln|1+x|+C$$

Como $F(2)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2x}{x^2+1}}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x^2+1}=0$, queremos que:

$F(2)=-\frac{1}{2}\ln|1-2|+\frac{1}{2}\ln|1+2|+C=\frac{1}{2}\ln 3+C=0\Rightarrow C=-\frac{1}{2}\ln 3$.

Luego $F(x)=\frac{1}{2}\ln|1-x|-\frac{1}{2}\ln|1+x|-\frac{1}{2}\ln 3$

107. Si para calcular $\int f(x)\operatorname{sen} x dx$, donde *f* es una cierta función derivable, se aplica integración por partes, se obtiene:

$$\int f(x)\operatorname{sen} x dx=-f(x)\cos x+\int 3x^2\cos x dx$$

Sabiendo que f(1) = 2, encuentra la expresión de *f*.

Si $\int f(x)\operatorname{sen} x dx=-f(x)\cos x+\int 3x^2\cos x\,dx$ se tiene que $f'(x)=3x^2$, por lo que $f(x)=x^3+C$.

Como $f(1)=2\Rightarrow 2=1^3+C\Rightarrow C=1$, luego $f(x)=x^3+1$.

108. En un examen se ha pedido a los estudiantes que resuelvan la integral $\int 2\operatorname{sen} x\cos x dx$.

I. Gema la resolvió con el cambio de variable $u=\operatorname{sen} x$.

II. Fernando utilizó el cambio de variable $u=\cos x$.

III. Iván lo hizo usando la fórmula $2\operatorname{sen} x\cos x=\operatorname{sen} 2x$.

Aunque los tres alumnos dieron respuestas distintas, sin embargo, el profesor les dijo que los tres la habían hecho bien.

Encuentra las tres respuestas dadas y explica por qué todas eran correctas sin ser iguales.

Gema: $u=\operatorname{sen} x\Rightarrow du=\cos x\,dx\Rightarrow\int 2\operatorname{sen} x\cos x\,dx=\int 2u\,du=u^2+C=\operatorname{sen}^2 x+C$

Fernando: $u=\cos x\Rightarrow du=-\operatorname{sen} x\,dx\Rightarrow\int 2\operatorname{sen} x\cos x\,dx=-\int 2u\,du=-u^2+C=-\cos^2 x+C$

Iván: $2\operatorname{sen} x\cos x=\operatorname{sen} 2x\Rightarrow\int 2\operatorname{sen} x\cos x\,dx=\int\operatorname{sen} 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

Las tres respuestas son correctas, pues difieren solo en una constante.

En efecto, $\operatorname{sen}^2 x=-\cos^2 x+1$, $-\frac{1}{2}\cos 2x=-\cos^2 x+\frac{1}{2}$.

109. Un punto se mueve en línea recta con una velocidad dada por la fórmula $v(t) = 12t - 5(m/s)$.

Calcula el espacio recorrido, $e(t)$, en cada instante t, sabiendo que $e(0) = 10$ m. ¿Cuál es la velocidad media entre $t = 0$ s y $t = 2$ s? (Recuerda que la velocidad es la derivada del espacio respecto del tiempo).

Se sabe que $e(t) = \int v(t)dt = \int (12t - 5)dt = 6t^2 - 5t + C$.

Como $e(0) = 10 \Rightarrow C = 10$ entonces $e(t) = 6t^2 - 5t + 10$.

La velocidad media es $v_m(0, 2) = \dfrac{e(2) - e(0)}{2 - 0} = 7$ m/s.

110. Se trasplanta un árbol y se observa que su tasa de crecimiento a los x años es de $1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ metros por año. Si a los 5 años medía 5 m, ¿cuánto medía al ser trasplantado?

La tasa de crecimiento es la derivada de la función que mide la altura, luego $C(x) = \int 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} dx = x + \dfrac{1}{x+1} + C$.

Como $5 = C(5) = 5 + \dfrac{1}{6} + C \Rightarrow C = -\dfrac{1}{6}$.

Luego $C(x) = x + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{6} \Rightarrow C(0) = \dfrac{5}{6}$. Por tanto, al ser trasplantado medía $\dfrac{5}{6}$ m.

111. Calcula $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx$.

a) Por fracciones simples.

b) Mediante el cambio $t = x - 1$.

a) $\dfrac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$ y descomponiendo la fracción se tiene que $\dfrac{3x-2}{(x-1)^2} = \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Luego $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \int (x+2)\, dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{3}{x-1} dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{x-1} + 3\ln|x-1| + C$.

b) Si se hace el cambio $t = x - 1$ y $dt = dx$ se tiene:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2} dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

Observa que $\frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} + 3x - 3 = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$.

112. Encuentra en cada caso la función $y = f(x)$ tal que:

a) $f'(x) = -3xf(x)$ y corta al eje Y en el punto de ordenada 1.

b) $f'(x) = \dfrac{x}{f(x) + x^2 f(x)}$ y $f(0) = -1$.

c) Su gráfica pasa por (0, 0) y $f'(x) = x^2 f^2(x) + x^2 - f^2(x) - 1$.

a) Como $f'(x) = -3xf(x)$, entonces $-3x = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))'$. Así pues, $\int -3x dx = \int (\ln f(x))' dx$ y por tanto $-\dfrac{3}{2}x^2 + C = \ln f(x)$. Se tiene entonces que $f(x) = e^{\left(-\frac{3}{2}x^2 + C\right)} = e^{-\frac{3}{2}x^2} \cdot C'$ y como se sabe que $f(0) = 1$ se tiene que $C' = 1$. Luego la función buscada es $f(x) = e^{-\frac{3}{2}x^2}$.

b) $f'(x) = \dfrac{x}{f(x) + x^2 f(x)} = \dfrac{x}{f(x)(1 + x^2)}$ y por tanto $\dfrac{x}{(1 + x^2)} = f'(x) \cdot f(x) = \dfrac{1}{2}\left((f(x))^2\right)'$

Así pues, $\displaystyle\int \frac{x}{(1 + x^2)} dx = \frac{1}{2}\int \left((f(x))^2\right)' dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C = \frac{1}{2}(f(x))^2$

Luego puede ser $f(x) = \pm\sqrt{\ln(1 + x^2) + C}$ y como $f(0) = -1$, entonces debe ser $f(x) = -\sqrt{\ln(1 + x^2) + 1}$.

c) $f'(x) = f^2(x)(x^2 - 1) + x^2 - 1 = (f^2(x) + 1)(x^2 - 1)$, luego $(x^2 - 1) = \dfrac{f'(x)}{(f^2(x) + 1)} = (\text{arctg}\,(f(x)))'$

Así pues, $\displaystyle\int (x^2 - 1)\, dx = \int (\text{arctg}\,(f(x)))' dx$ y por tanto $\dfrac{1}{3}x^3 - x + C = \text{arctg}\,(f(x)) \Rightarrow f(x) = \text{tg}\left(\dfrac{1}{3}x^3 - x + C\right)$

Como $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. Luego la función buscada es $f(x) = \text{tg}\left(\dfrac{1}{3}x^3 - x\right)$.

113. Halla el polinomio de grado dos $P(x)$ tal que $P(0) = 1$, $P'(0) = 0$ y $\displaystyle\int \frac{P(x)}{x^3(x-1)^2} dx$ sea una función racional.

Se pide encontrar el polinomio $P(x) = ax^2 + 1$, y tal que $\displaystyle\int \frac{ax^2 + 1}{x^3(x-1)^2} dx$ sea una función racional.

Si se descompone el integrando en fracciones simples, se obtiene:

$\dfrac{ax^2 + 1}{x^3(x-1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D}{x-1} + \dfrac{E}{(x-1)^2}$ y para que $\displaystyle\int \frac{ax^2 + 1}{x^3(x-1)^2} dx$ sea una función racional, debería ocurrir que $A = 0$ y $D = 0$ por lo que la descomposición tomaría la forma:

$$\frac{ax^2 + 1}{x^3(x-1)^2} = \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{E}{(x-1)^2} = \frac{B(x-1)^2 x + C(x-1)^2 + Ex^3}{x^3(x-1)^2}$$

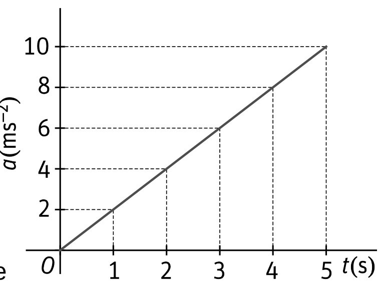
Así pues $ax^2 + 1 = (B + E)x^3 + x^2(-2B + C) + x(B - 2C) + C$, con lo que, identificando coeficientes, se tiene que:

$C = 1$, $B - 2C = 0$, $-2B + C = a$ y $B + E = 0$, es decir, $C = 1$, $B = 2$, $a = -3$, $E = -2$.

Por tanto, el polinomio pedido es $P(x) = -3x^2 + 1$.

114. La aceleración de un móvil con trayectoria rectilínea viene dada por la gráfica siguiente:

Si se sabe que para $t = 0$, su posición era $x(0) = 0$ y su velocidad inicial también era $v(0) = 0$, determina las ecuaciones que dan la aceleración, la velocidad y la posición de dicho móvil para cualquier instante de tiempo. Recuerda que la aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo.



A la vista de la gráfica, se deduce la ecuación de la aceleración es $a(t) = 2t$. De este modo:

$v(t) = \int a(t)\, dt = \int 2t\, dt = t^2 + C$ Como $v(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v(t) = t^2$

$x(t) = \int v(t)\, dt = \int t^2\, dt = \dfrac{t^3}{3} + C$ Como $x(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x(t) = \dfrac{t^3}{3}$

PARA PROFUNDIZAR

115. Demuestra las siguientes fórmulas de reducción.

a) $\int \text{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1}x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}x\, dx$ con n par mayor que 2.

$\int \text{sen}^n x\, dx = \int \text{sen}^{n-1} x\ \text{sen}\, x dx$, que llamando $f(x) = \text{sen}^{n-1} x$ y $g'(x) = \text{sen}\, x$, resulta ser:

$$\int \text{sen}^n x\, dx = -\text{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2} x \cos^2 x dx = -\text{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2} x(1-\text{sen}^2 x) dx =$$
$$= -\text{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int (\text{sen}^{n-2} x - \text{sen}^n x)\, dx$$

Así pues, $\int \text{sen}^n x\, dx = -sen^{n-1}xcosx - (n-1)\int \text{sen}^{n-2}x\, dx + (n-1)\int \text{sen}^n x\, dx$, es decir:

$$n\int \text{sen}^n x\, dx = -\text{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \text{sen}^{n-2} x\, dx \Rightarrow \int \text{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2} x\, dx .$$

b) $\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\ \text{sen}\, x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$ con n par mayor que 2.

De forma análoga resultaría la fórmula pedida, pero podría ser más cómodo si se escribe:

$\int \cos^n x\, dx = \int \text{sen}^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$ y, llamando $\frac{\pi}{2} - x = t$ y $-dx = dt$, quedaría $-\int \text{sen}^n t\, dt$. Luego volviendo al apartado a:

$$-\left(-\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx\right) = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\ \text{sen}\, x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$$

Obsérvese que estas fórmulas son válidas aunque n no fuera par. La observación de n par tiene sentido pues si n fuera impar sería mucho más cómodo hacer la integral directamente sin acudir a ninguna fórmula de reducción.

c) $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx$

Se tiene que $\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$,

por lo que $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx$.

Para resolver $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx$, sea $f(x) = x$, $g'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{1-n}\frac{1}{1-n}$.

De este modo: $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx - \left(\frac{1}{2(1-n)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx\right)$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \frac{-1}{2-2n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx - \frac{1}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx =$$
$$= \frac{-1}{2-2n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \left(1 - \frac{1}{2n-2}\right)\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx = \frac{-1}{2-2n}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx$$

116. Utilizando las fórmulas deducidas en los apartados a) y b) del ejercicio anterior, obtén:

a) $\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,dx$

Finalmente, como $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ sustituyendo en la última integral, se tiene que:

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{3}{8}\left(x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) + C$$

b) $\int \operatorname{sen}^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x \cos x + \frac{5}{6}\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

Ahora $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x \cos x + \frac{3}{4}\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$

Finalmente, como $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos\ 2x)$, sustituyendo en la última integral, se tiene que:

$$\int \operatorname{sen}^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x \cos x + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x \cos x + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)\right) =$$
$$= -\frac{1}{6}\operatorname{sen}^5 x \cos x - \frac{5}{24}\operatorname{sen}^3 x \cos x + \frac{5}{16}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) + C$$

117. Obtén $\int e^{-x} x^5\,dx$ de dos formas diferentes:

a) Por partes, utilizando el método de la tabla.

b) Utilizando que $\int e^{-x}x^5\,dx = e^{-x}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5) = I(x)$ y obteniendo los coeficientes a_i por derivación.

a)

f	g'
x^5	e^{-x}
$5x^4$	$-e^{-x}$
$20x^3$	e^{-x}
$60x^2$	$-e^{-x}$
$120x$	e^{-x}
120	$-e^{-x}$
0	e^{-x}

$$\int e^{-x}x^5\,dx = -x^5e^{-x} - 5x^4e^{-x} - 20x^3e^{-x} - 60x^2e^{-x} - 120xe^{-x} - 120e^{-x} + C = -e^{-x}(x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 60x^2 + 120x + 120) + C$$

b) $\int e^{-x}x^5\,dx = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5)e^{-x}$

Derivando:

$$e^{-x}x^5 = (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4)e^{-x} - e^{-x}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{-x}x^5dx = -e^{-x}\left(a_5x^5 + (a_4 - 5a_5)x^4 + (a_3 - 4a_4)x^3 + (a_2 - 3a_3)x^2 + (a_1 - 2a_2)x + a_0 - a_1\right)$$

Así pues, identificando coeficientes, se tiene que:

$a_5 = -1,\ a_4 = -5,\ a_3 = -20,\ a_2 = -60,\ a_1 = -120,\ a_0 = -120$

$$\int e^{-x}x^5dx == -e^{-x}(x^5 + 5x^4 + +20x^3 + 60x^2 + 120x + 120) + C$$

118. Expresa como integrales de cocientes de polinomios las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x+\sqrt[4]{x}}dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}}{x^2-2\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}dx$

a) Si $x=t^{12}$ y $dx=12t^{11}dt$, se tiene $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x+\sqrt[4]{x}}dx=12\int\frac{t^4+2}{t^{12}+t^3}t^{11}dt=12\int\frac{t^{12}+2t^8}{1+t^9}dt$.

b) b) Si $\dfrac{x-1}{x-2}=t^6$, es decir, $x-1=t^6x-2t^6\Rightarrow 2t^6-1=x(t^6-1)\Rightarrow x=\dfrac{2t^6-1}{t^6-1}$ y, de este modo, se tiene entonces: $dx=\dfrac{12t^5(t^6-1)-6t^5(2t^6-1)}{(t^6-1)^2}dt=\dfrac{-6t^5}{(t^6-1)^2}dt$

c) Por tanto, $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x-2}}}{x^2-2\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}dx=-6\int\frac{\frac{2t^6-1}{t^6-1}+t^2}{\left(\frac{2t^6-1}{t^6-1}\right)^2-2t^3}\cdot\frac{t^5}{(t^6-1)^2}dt$, que es una integral cociente de polinomios.

119. Demuestra que las siguientes integrales se pueden reducir a integrales de cocientes de polinomios.

a) $\displaystyle\int x^{-2}\sqrt[3]{1-x}dx$ **b)** $\displaystyle\int \sqrt[4]{x}(1-x)^2dx$ **c)** $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{5}{3}}dx$

a) Si $1-x=t^3$ y $-dx=3t^2dt$, se tiene $\displaystyle\int x^{-2}\sqrt[3]{1-x}\,dx=-\int\frac{1}{(1-t^3)^2}3t^3\,dt$.

b) Haciendo $x=t^4$ y $dx=4t^3dt$, se tiene $\displaystyle\int\sqrt[4]{x}(1-x)^2dx=\int t(1-t^4)^2 4t^3dt$.

c) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{5}{3}}dx=\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{5}{3}}x^2dx$ pues $2-\dfrac{5}{3}=\dfrac{1}{3}$

Así $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{5}{3}}\,dx=\int x^2\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{x}\right)^5}dx$ y haciendo $\dfrac{1-x}{x}=t^3$, es decir, $1-x=xt^3\Rightarrow 1=x(t^3+1)\Rightarrow x=\dfrac{1}{t^3+1}$ y $dx=\dfrac{-3t^2}{(t^3+1)^2}dt$, se transformaría en $\displaystyle -3\int\frac{1}{(t^3+1)^2}t^5\frac{t^2}{(t^3+1)^2}dt$, que es un cociente de polinomios.

120. Sean p y q números racionales. Demuestra que $\int x^p(1-x)^q\,dx$ se puede poner como integral de un cociente de polinomios si se cumple alguna de estas condiciones:

I. p es entero.

II. q es entero.

III. p y q son no enteros pero $p+q$ sí.

En el ejercicio anterior, se ha visto que $\int x^p(1-x)^q\,dx$ con p y q racionales se podría poner como cociente de polinomios, al menos en estos tres casos: $p=-2$, $q=2$, $p+q=\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{3}=2$

En general, procediendo exactamente igual que antes, si $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{Z}$ o $p+q\in\mathbb{Z}$, la integral dada se convierte en cociente de polinomios:

En *a*, si $q=\dfrac{m}{n}$, se toma $1-x=t^n$.

En *c*, si $p=\dfrac{m}{n}$, se toma $x=t^n$ en b se escribe $x^p(1-x)^q$ como $\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^q x^{p+q}$, y si $q=\dfrac{m}{n}$, se toma $\dfrac{1-x}{x}=t^n$.

121. El matemático ruso Tchebycheff (1821–1894) probó que las integrales $\int x^p(1-x)^q\,dx$ solo son elementales en los tres casos citados en el ejercicio anterior. Utiliza este resultado para demostrar estas afirmaciones:

a) $\int \sqrt{1-x^3}\,dx$ no es elemental.

b) $\int (1-x^n)^{\frac{1}{m}}\,dx$ con n y m enteros positivos es elemental si y solo si m o $n = 1$ o $m = n = 2$.

c) $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$ no es elemental.

d) $\int \operatorname{sen}^p x \cos^q x\,dx$ siendo p y q números racionales, solo es elemental cuando alguno de los dos es un entero impar o cuando $p+q$ es un entero par.

e) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^n}}\,dx$ con n entero positivo, es elemental solo si n = 1, 2 o 4. Calcula la integral en los tres casos.

f) $\int \operatorname{sen}^q x\,dx$ con q racional es elemental solo si q es entero.

a) Bastaría ver que $\int \sqrt{1-x^3}\,dx$ no responde a ninguno de los casos anteriores.

En efecto, haciendo $x^3 = t$ y $3x^2dx = dt$, se tiene $\int \sqrt{1-x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{1-t}\,\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}}$, es decir, $\frac{1}{3}\int t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt$ en la que $p = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$, $q = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ y $p+q = -\frac{2}{3}+\frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \notin \mathbb{Z}$.

b) Haciendo $x^n = t$ y $nx^{n-1}dx = dt$, se tiene $\int (1-x^n)^{\frac{1}{m}}dx = \frac{1}{n}\int (1-t)^{\frac{1}{m}}t^{\frac{1-n}{n}}dt$.

Así pues, si m o $n = 1$, se está en uno de los dos casos: a o b.

Si $m = n = 2$, $\frac{1}{m}+\frac{1-n}{n} = 0$ y se está en el caso c.

Si $m \neq 1$, $n \neq 1$ ni $\frac{1}{m}$ ni $\frac{1-n}{n}$ son enteros y su suma $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1$ tampoco, si m y n no son ambos igual a 2.

c) Haciendo $\operatorname{sen} x = \sqrt{t}$ y $\cos x dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, la integral dada se transforma en:

$\int \sqrt[4]{t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$ y ni p ni q son enteros ($p = -\frac{1}{4}$, $q = -\frac{1}{2}$), ni $p+q = -\frac{1}{4}-\frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$.

d) Escribiendo $\int \operatorname{sen}^p x \cos^q x\,dx = \int \operatorname{sen}^p x \cos^{q-1} \cos x\,dx$ y haciendo $\operatorname{sen} x = \sqrt{t}$ y $\cos x dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$

Como $\cos^{q-1} x = \left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^{\frac{q-1}{2}}$ se tiene $\int t^{\frac{p}{2}}(1-t)^{\frac{q-1}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{p-1}{2}}(1-t)^{\frac{q-1}{2}}dt$

Si p o q es un entero impar, $\frac{p-1}{2}$ o $\frac{q-1}{2}$ es entero.

Si $p+q$ es un entero par, resulta que $\frac{p-1}{2} + \frac{q-1}{2} = \frac{p+q}{2} - 1$ sería entero.

Pero si ni p ni q es un entero impar, $\frac{p-1}{2}$ ni $\frac{q-1}{2}$ es entero y si $p+q$ no es un entero par $\frac{p+q}{2}-1 \notin \mathbb{Z}$.

e) Haciendo $x^n = t$ y $nx^{n-1}dx = dt$, se tiene $\frac{1}{n}\int t^{\frac{1}{n}}(1+t)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1-n}{n}}dt = \frac{1}{n}\int t^{\frac{2}{n}-1}(1+t)^{-\frac{1}{2}}dt$

$q = -\frac{1}{2}$ no es entero.

Si $n = 1$ o 2, $\frac{2}{n}-1$ es entero. Si $n = 4$, $\frac{2}{n}-1-\frac{1}{2}$ es entero.

Si $n \neq 1$, 2 o 4, $\frac{2}{n}-1 \notin \mathbb{Z}$ y $\frac{2}{n}-1-\frac{1}{2} = \frac{2}{n}-\frac{3}{2}$ que es entero solamente si $n = 4$.

Si $n = 1$, es $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$ y haciendo $1+x = t^2$ y $dx = 2tdt$, se transforma en: $\int \frac{t^2-1}{t}2t\,dt = 2\int (t^2-1)\,dt = 2\left(\frac{\sqrt{(1+x)^3}}{3} - \sqrt{1+x}\right) + C$

Si $n = 2$, es $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ y haciendo $1+x^2 = t$ y $2xdx = dt$, se transforma en: $\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{t} = \sqrt{1+x^2}+C$

Si $n = 4$, es $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx$ y haciendo $x^2 = t$ y $2xdx = dt$, se transforma en: $\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$

Poniendo ahora $t = \text{tg}u$ y $dt = \frac{1}{\cos^2 u}du$, resulta $\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos u}du = \frac{1}{2}\int \frac{\cos u}{1-\text{sen}^2 u}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-y^2}dy$ con $y = \text{sen}u$ y $dy = \cos u du$.

Finalmente como, $\frac{1}{1-y^2} = \frac{A}{1+y} + \frac{B}{1-y} = \frac{A(1-y)+B(1+y)}{1-y^2}$, de la igualdad $1 = A(1-y)+B(1+y)$, se obtiene $A = B = \frac{1}{2}$ por lo que $\int \frac{1}{1-y^2}dy = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\text{sen}u}{1-\text{sen}u}$.

Si $t = \text{tg}u$ se tiene que $1+t^2 = \frac{1}{\cos^2 u}$, $\cos^2 u = \frac{1}{1-t^2}$, sen $u = \sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$\frac{1+\text{sen}u}{1-\text{sen}u} = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} = \frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}-t} = \left(\sqrt{1+t^2}+t\right)^2$, por lo que $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\text{sen}u}{1-\text{sen}u} = \ln\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)$

Así pues, $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x^4}+x^2\right)+C$.

f) $\int \text{sen}^q x\,dx$

Poniendo $\int \text{sen}^q x\,dx = \int \text{sen}^{q-1}\text{sen}\,x\,dx = \int (\text{sen}^2 x)^{\frac{q-1}{2}}\text{sen}\,xdx$.

Haciendo $\cos x = \sqrt{t}$ y $-\text{sen}\,xdx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, se tiene $\int \text{sen}^q x\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-t)^{\frac{q-1}{2}} \cdot t^{-\frac{1}{2}}dt$.

Así pues, como $\int t^p(1-t)^q\,dt$ es elemental solo cuando p, q o $p+q$ son enteros, se tiene que esta integral sería elemental solo si $\frac{q-1}{2} \in \mathbb{Z}$ o $\frac{q-1}{2}-\frac{1}{2}$ sea entero, es decir, $\frac{q-1}{2} \in \mathbb{Z}$ o $\frac{q}{2} \in \mathbb{Z}$, es decir $q \in \mathbb{Z}$.

Nota: Obsérvese que, en cualquier caso, esta integral se reduce al apartado d, $\int \text{sen}^q x \cos^p x\,dx$ con $p = 0$ y allí se vio que era elemental cuando alguno era entero impar, en este caso q, o cuando la suma era entero par, en este caso q, es decir, $\int \text{sen}^q x\,dx$ es elemental solo si $q \in \mathbb{Z}$.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Calcular las primitivas de $f(x)=\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}$ podría no ser muy cómodo si lo intentas hacer directamente, pero si racionalizas previamente te resultará muy fácil. Hazlo así.

Racionalizando se tiene $f(x)=\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x^2-\sqrt{x^2-1}}=x^2+x\sqrt{x^2-1}$.

$$\int\frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}dx=\int x^2\,dx+\int x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{x^3}{3}+\int x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\int(x^2-1)^{\frac{1}{2}}2x\;dx=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C=$$
$$=\frac{1}{3}\left(x^3+\sqrt{(x^2-1)^3}\right)+C$$

2. Si $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ es la función $f(x)=x(1-lnx)$, encuentra la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $A(1,\ 1)$.

Calculamos $\int f(x)\,dx=\dfrac{x^2}{2}-\int x\ln x\,dx$.

Llamando $u(x)=lnx$ y $v'(x)=x$, se tiene que $\int x\ln x\,dx=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\int\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2$

Así que $\int x(1-\ln x)\,dx=\dfrac{x^2}{2}-\left(\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{x^2}{4}\right)=\dfrac{3x^2}{4}-\dfrac{1}{2}x^2\ln x=\dfrac{1}{2}x^2\left(\dfrac{3}{2}-\ln x\right)+C$.

Como la curva pedida pasa por (1, 1) resulta que $1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}+C\Rightarrow C=\dfrac{1}{4}$ y la primitiva buscada es $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2\left(\dfrac{3}{2}-\ln x\right)+\dfrac{1}{4}$.

3. Determina $f(x)$ sabiendo que $f'(x)=e^{2x}$ sen x y que $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

Para calcular $\int e^{2x}\text{sen}\,x\,dx$, se construye la tabla:

f	g'
e^{2x}	sen x
$2e^{2x}$	–cos$x$
$4e^{2x}$	–sen$x$

$\int e^{2x}\,\text{sen}\,x\,dx=-e^{2x}\cos x+\ 2e^{2x}\,\text{sen}\,x-4\int e^{2x}\,\text{sen}\,x\,dx$, por lo que $5\int e^{2x}\,\text{sen}\,x\,dx=e^{2x}(-\cos x+\ 2\ \text{sen}\,x)$ de donde $f(x)=\int e^{2x}\,\text{sen}\,x\,dx=\dfrac{1}{5}e^{2x}(-\cos x+2\ \text{sen}\,x)+C$

Como $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{5}e^{\pi}\cdot 2+C=1\Rightarrow C=1-\dfrac{2}{5}e^{\pi}$

Luego $f(x)=\dfrac{1}{5}e^{2x}(-\cos x+2\ \text{sen}\,x)+1-\dfrac{2}{5}e^{\pi}$

4. Obtén $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,dx$.

Poniendo $x+1=t^2$ y $dx=2tdt$, se tiene que $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{2t\,dt}{1+t}=\int\left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt=2t-2\ln(1+t)$.

Deshaciendo el cambio, nos lleva a $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx=2\sqrt{x+1}-2\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)+C$.

5. Calcula $\int (x^2\ln x - x\ln x^2)\,dx$.

$x^2\ln x - x\ln x^2 = x^2\ln x - 2x\ln x = \ln x(x^2-2x)$

Escribiendo la tabla, se tiene que:

f	g'
$\ln x$	x^2-2x
$\frac{1}{x}$	$\frac{x^3}{3}-x^2$

$$\int \ln x(x^2-2x)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\ln x-\int\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}+C$$

6. Determina la función $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ que verifica que $f(2)=\ln 4$ y cuya derivada sea la función $f'(x)=\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}$.

Efectuando la división dada, tenemos que $f'(x)=x-\frac{x+1}{x^3-x^2}$ así que $f(x)=\frac{x^2}{2}-\int\frac{x+1}{x^2(x-1)}dx$.

Por el teorema de descomposición en fracciones simples, $\frac{x+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$ así que $Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2=x+1$ y haciendo:

$x=0\Rightarrow B=-1$

$x=1\Rightarrow C=2$

$x=-1\Rightarrow 2A-2B+C=0\Rightarrow A=-2$

$$\int\frac{x+1}{x^2(x+1)}dx=\int\frac{-2}{x}dx+\int\frac{-1}{x^2}dx+\int\frac{2}{x-1}dx=-2\ln|x|+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|$$

Luego $f(x)=\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+C=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C$

Como $f(2)=\ln 4$, tenemos que $\ln 4=2-\frac{1}{2}+2\ln 2+C\Rightarrow C=-\frac{3}{2}$ y $f(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{3}{2}$

7. Calcula todas las primitivas de $f(x)=\frac{\text{sen}^3x}{\sqrt{\cos x}}$.

$\int\frac{\text{sen}^3x}{\sqrt{\cos x}}dx=\int\frac{(1-\cos^2x)\,\text{sen}\,x}{\sqrt{\cos x}}dx$. Poniendo $\cos x=t$ y $-\text{sen}\,x\,dx=dt$, se tiene que:

$$-\int\frac{(1-t^2)}{\sqrt{t}}dt=\int t^{\frac{3}{2}}\,dt-\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}$$

Deshaciendo el cambio nos lleva a $\int\frac{\text{sen}^3x}{\sqrt{\cos x}}dx=\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5x}-2\sqrt{\cos x}+C$.

8. Observa estas dos integrales:

a) $\int \frac{2x}{x^2-5}\,dx = \ln|x^2-5| + C$ **b)** $\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \ln(x^2+5) + C$

¿Por qué en la primera integral es preciso tomar el valor absoluto y en la segunda no?

Porque x^2-5 puede tomar valores negativos (por ejemplo si $x=0$) mientras que x^2+5 es siempre positivo.

9. Calcula $\int x^2e^{2x}dx$.

Escribiendo la tabla:

f	*g'*
x^2	e^{2x}
$2x$	$\frac{1}{2}e^{2x}$
2	$\frac{1}{4}e^{2x}$
0	$\frac{1}{8}e^{2x}$

$$\int x^2e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Si $F(x)$ es la primitiva de $f(x)=\frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}$ que pasa por el origen, entonces:

A. $F(x)=\frac{1}{3}\text{arcsen}\frac{3x}{2}$

B. $F\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$

C. $F(x)=\text{arcsen}\frac{2x}{3}$

D. $F(1)=\frac{1}{2}\text{arcsen}\frac{2}{3}$

$$F(x)=\int\frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{9-(2x)^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}}dx=\frac{1}{2}\text{arcsen}\frac{2x}{3}+C$$

Como pasa por el origen, $F(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$$F(1)=\frac{1}{2}\text{arcsen}\frac{2}{3}$$

La respuesta correcta es la D.

2. Sea f una función derivable, definida en $[1,+\infty)$ que cumple la condición $f(x)f'(x)=1$, siendo $f(8)=4$. Entonces:

A. $(f(x))^2+f(x)=2x$

B. $f(2)=2$

C. $\lim_{x\to\infty}\frac{f^2(x)}{x}=0$

D. $f(x)=\sqrt{x}$

Integrando por ambas partes $\int f(x)f'(x)dx=\int 1dx$ se tiene que $\frac{1}{2}(f(x))^2=x+C$

Como $f(8)=4\Rightarrow C=0$ y $f(x)=\sqrt{2x}$

La respuesta correcta es la B.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

3. Sea $f(x)=\frac{5(x+1)}{2x^2+x-3}$ e I el intervalo $(1,+\infty)$:

A. Para todo $x\in I$, $f(x)=\frac{1}{x+\frac{3}{2}}+\frac{1}{x-1}$.

B. La función $F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x+3|+2\ln|x-1|$ es primitiva de f en I.

C. Existe una primitiva F de f en I tal que $F(2)=5$.

D. Existe una primitiva F de f en I tal que $F(2)=\pi$.

$$\int\frac{5(x+1)}{2x^2+x-3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{5x+5}{(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}dx$$

Aplicando el teorema de descomposición en fracciones simples:

$$\frac{5x+5}{(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\frac{A\left(x+\frac{3}{2}\right)+B(x-1)}{(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}$$ e igualando se tiene:

$5x+5=A\left(x+\frac{3}{2}\right)+B(x-1)$ y haciendo:

$x=1\Rightarrow 10=\frac{5}{2}A\Rightarrow A=4$

$x=-\frac{3}{2}\Rightarrow -\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}B\Rightarrow B=1$

$$F(x)=\int\frac{5(x+1)}{2x^2+x-3}dx=2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$$

La respuesta correcta es la B.

4. Sea f la función definida en $\mathbb{R}$ por la fórmula $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y F la primitiva de f tal que $F(0)=0$:

A. $F(1)=\dfrac{\pi}{4}$.

B. Si $G:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\rightarrow\mathbb{R}$ con $G(x)=F(\text{tg}x)$, entonces $G(x)G'(x)=x$.

C. Sea $H:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ con $H(x)=F\left(\dfrac{1}{x+1}\right)+F\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$. Entonces $H(0)=\dfrac{\pi}{4}$.

D. Para todo x positivo, $H'(x)=0$.

$F(x)=\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}dx=\text{arctg}\,x+C$. Como $F(0) = 0 \Rightarrow F(x) = \text{arctg}\ x$.

Si $F(1)=\dfrac{\pi}{4}$ entonces $F(1)=\text{arctg}1=\dfrac{\pi}{4}$

$\begin{cases}G(x)=\text{arctg}(\text{tg}\,x)\\ G'(x)=1\end{cases}\Rightarrow G(x)G'(x)=x$

Las respuestas correctas son la A y B.

5. Las funciones primitivas de $f(x)=6\,\text{sen}\,x\cos x$ son:

A. $F(x)=3\,\text{sen}^2x+C$

B. $F(x)=3\cos^2x+C$

C. $F(x)=-\dfrac{3}{2}\cos 2x+C$

D. $F(x)=3\cos 2x+C$

$F(x)=\displaystyle\int 6\,\text{sen}\,x\cos x\,dx=6\int\text{sen}\,x\cos x\,dx=3\,\text{sen}^2x\,dx+C$

Aplicando la fórmula del ángulo mitad $\text{sen}\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$ se llega a $F(x)=-\dfrac{3}{2}\cos 2x+C$.

Las respuestas correctas son la A y la C.

Señala el dato innecesario para contestar

6. La aceleración de cierta partícula viene dada por la expresión $\dfrac{dv}{dt}=a+bt+c\cos(2\pi t)$. Se pide la velocidad, v, en t = 2 y se dispone de los siguientes datos:

1. $v(0)$

2. $v\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

3. $v\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

4. $v(-1)$

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse el dato 4.

$v(t)=at+\dfrac{1}{2}bt^2+\dfrac{c}{2\pi}\text{sen}2\pi t+C\Rightarrow v(0)=C$

Con $v\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ y $v(-1)$ se pueden hallar a y b. Por tanto el dato innecesario es 2.

6 Integral definida

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Obtén, con el método visto, el área del trapecio limitado por la recta $y = 2x + 1$, el eje X y las verticales $x = 0$ y $x = 4$. Calcula el área geométricamente y compara los resultados.

Se divide el intervalo $[0, 4]$ en $4n$ subintervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{n}$. Se calcula la suma de las áreas de los rectángulos obtenidos tomando como base la longitud de cada subintervalo y como altura la ordenada del extremo derecho.

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(2\frac{1}{n}+1\right)+\left(2\frac{2}{n}+1\right)+...+\left(2\frac{4n-1}{n}+1\right)+\left(2\frac{4n}{n}+1\right)\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{2+4+6+\cdots+2(4n-1)+8n}{n}+4n\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{\frac{2+8n}{2}4n}{n}+4n\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{(1+4n)4n}{n}+4n\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{4n+16n^2+4n^2}{n}\right] = \frac{4n+20n^2}{n^2} = \frac{4+20n}{n} = \frac{4}{n}+20 .$$

Se toma, como área del recinto, el número $A = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, es decir, $A = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{n}+20\right) = 20$ u^2. Geométricamente, el trapecio tiene altura 4 y bases 1 y 9. Su área es $A = \frac{9+1}{2}\cdot 4 = 20$ u^2, que coincide con la obtenida con el método anterior.

3. Obtén una fórmula para $1^3 + 2^3 + ... + n^3$, procediendo como el ejemplo y desarrollando las potencias cuartas de $(n+1)$.

$$1^4 = 1$$
$$2^4 = (1+1)^4 = 1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1$$
$$\vdots$$
$$(n+1)^4 = n^4 + 4\cdot n^3 + 6\cdot n^2 + 4\cdot n + 1$$

Sumando los primeros miembros y los segundos miembros, se obtiene:

$$1^4 + 2^4 + \cdots + (n+1)^4 = \left(1^4 + 2^4 + \cdots + n^4\right) + 4\left(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3\right) + 6\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + 4(1 + 2 + \cdots + n) + n + 1$$

Luego $(n+1)^4 = 4\left(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3\right) + 6\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + 4(1 + 2 + \cdots + n) + n + 1$

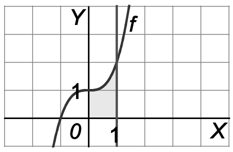
Se despeja la suma de los n primeros cubos y se aplican las fórmulas ya conocidas:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{(n+1)^4 - 6(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) - 4(1 + 2 + \cdots + n) - (n+1)}{4} = \frac{(n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2(n+1)n - (n+1)}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1)}{4} = \frac{(n+1)(n^3 + n^2)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Así pues, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

4. Usa el resultado del ejercicio anterior para calcular el área limitada por la gráfica de $f(x) = x^3 + 1$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 1$. Toma en cada subintervalo como c_i el extremo derecho.



Se divide el intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{n}$. Se calcula la suma de las áreas de los rectángulos obtenidos tomando como base la longitud de cada subintervalo y como altura la ordenada del extremo derecho.

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + 1 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + 1 + ... + \left(\frac{n}{n}\right)^3 + 1\right] = \frac{1}{n}\left[n + \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^3}\right]$$

Aplicando la fórmula encontrada en el ejercicio anterior:

$$S_n = \frac{1}{n}\left[n + \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^3}\right] = \frac{1}{n}\left[n + \frac{n^2(n+1)^2}{4n^3}\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{4n^2 + n^2 + 2n + 1}{4n}\right] = \frac{5n^2 + 2n + 1}{4n^2} = \frac{5}{4} + \frac{2n+1}{4n^2}$$

El área del recinto es el número $A = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, es decir, $A = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4} + \frac{2n+1}{4n^2}\right) = \frac{5}{4}$ u^2.

5. Ejercicio resuelto.

6. Sea f continúa en $[-1, 4]$ y $g(x) = f(x) + 2$. Si $\int_{-1}^{4} f(x)dx = 5$, calcula $\int_{-1}^{4} g(t)dt$.

$$\int_{-1}^{4} g(t)dt = \int_{-1}^{4} (f(t) + 2)dt = \int_{-1}^{4} f(t)dt + \int_{-1}^{4} 2dt = 5 + 2(4 - (-1)) = 5 + 2 \cdot 5 = 15$$

7. Si $\int_0^1 f(x)dx = \frac{4}{3}$, $\int_1^2 f(x)dx = \frac{8}{3}$ y $\int_0^3 f(x)dx = \frac{11}{3}$, halla:

a) $\int_0^2 f(x)dx$ **b)** $\int_1^3 f(x)dx$ **c)** $\int_2^3 f(x)dx$

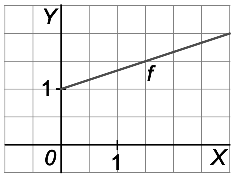
a) $\int_0^2 f = \int_0^1 f + \int_1^2 f = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$

b) $\int_1^3 f = \int_0^3 f - \int_0^1 f = \frac{11}{3} - \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$

c) $\int_2^3 f = \int_1^3 f - \int_1^2 f = \frac{7}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{1}{3}$

8 y 9. Ejercicios resueltos.

10. Para la función de la gráfica, halla su valor medio y el valor $c \in [0, 3]$ cuya existencia asegura el teorema del valor medio.



Se debe encontrar el valor $f(c)$, siendo c el número del intervalo $[0, 3]$, que cumpla $\int_0^3 \left(\frac{x}{3}+1\right)dx = f(c)(3-0)$.

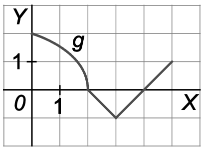
Como $\int_0^3 \left(\frac{x}{3}+1\right)dx$ es el área de un trapecio de altura 3 y bases 2 y 1, su valor es $\int_0^3 \left(\frac{x}{3}+1\right)dx = \frac{2+1}{2}\cdot 3 = \frac{9}{2}$.

Entonces, $f(c)(3-0) = \frac{9}{2} \Rightarrow f(c) = \frac{3}{2}$, es el valor medio de la función en dicho intervalo.

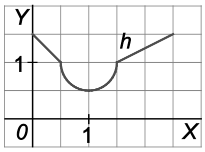
Por tanto, si $f(c) = \frac{c}{3}+1 = \frac{3}{2}$, despejamos y concluimos que $c = \frac{3}{2}$.

11. Halla el valor medio de las funciones *g* y *h*:

a)



b)



a) Se debe encontrar el valor $g(c)$, siendo c el número del intervalo $[0, 5]$ que cumpla $\int_0^5 g(x)dx = g(c)(5-0)$.

Se calcula esta integral hallando el área de las tres regiones (un cuarto de círculo que está por encima del eje *X*; un triángulo que está por debajo del eje *X*; un triángulo que está por encima del eje *X*).

El área del cuarto de círculo es $\frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi$. El área del triángulo que está por debajo del eje *X* es $\frac{2\cdot 1}{2} = 1$. Esto indica que $\int_2^4 f(x)dx = -1$, ya que al estar por debajo del eje *X*, la integral es el opuesto del área. El área del triángulo que está por encima del eje *X* es $\frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.

Con todo esto: $\int_0^5 g(x)dx = \int_0^2 g(x)dx + \int_2^4 g(x)dx + \int_4^5 g(x)dx = \pi - 1 + \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2}$

Por tanto, $g(c)(5-0) = \pi - \frac{1}{2} \Rightarrow g(c) = \frac{2\pi - 1}{10}$ es el valor medio de la función en dicho intervalo. Como $g(c) = \frac{2\pi-1}{10} \simeq 0{,}53$, habrá dos valores de *c*: uno en la circunferencia $x^2 + (g(x))^2 = 2^2$, es decir, $c^2 + \left(\frac{2\pi-1}{10}\right)^2 = 4$, de donde sacamos que $c \simeq 1{,}93$. Y el otro en la recta $y = x - 4$, es decir, $g(c) = c - 4$, $0{,}53 = c - 4$, $c \simeq 4{,}53$. Así pues, hay dos valores de *c*: $c \simeq 1{,}93$ y $c \simeq 4{,}53$.

b) El recinto limitado por la función *h* y el eje *X* en $\left[0, \frac{5}{2}\right]$ se descompone en tres partes:

- Dos trapecios, uno de área $S_1 = \frac{1+\frac{3}{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ y otro de área $S_2 = \frac{1+\frac{3}{2}}{2}\cdot 1 = \frac{5}{4}$.
- Un cuadrado menos un semicírculo: $S_3 = 1 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8-\pi}{8}$

Con todo esto $\int_0^{\frac{5}{2}} h(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} h(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} h(x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} h(x)dx = \frac{5}{8} + \frac{8-\pi}{8} + \frac{5}{4} = \frac{23-\pi}{8}$

Por tanto, $h(c)\left(\frac{5}{2}-0\right) = \frac{23-\pi}{8} \Rightarrow h(c) = \frac{23-\pi}{20} \simeq 0{,}99$. Hay dos valores de *c* en la circunferencia que corresponden a $c_1 \simeq 0{,}5$ y $c_2 \simeq 1{,}5$.

12. Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{-1}^{1} x\left(x^2-1\right)dx$

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t\,dt$

c) $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

d) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(2x-1)\,dx$

a) $\int_{-1}^{1} x\left(x^2-1\right)dx = \left[\frac{1}{2}\frac{\left(x^2-1\right)^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot 0 = 0$ (observa que la función $f(x) = x\left(x^2-1\right) = x^3 - x$ es una función impar y como el intervalo de definición está centrado en el origen, la integral ha de ser cero).

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t\,dt = [\operatorname{sen} t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

c) $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$

d) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(2x-1)\,dx = \left[-\frac{\cos(2x-1)}{2}\right]_0^{\pi} = -\frac{\cos(2\pi-1)}{2} + \frac{\cos(0-1)}{2} = 0$

13. Determina el valor de estas integrales.

a) $\int_{-1}^{1} \frac{3}{x^2+1}\,dx$

b) $\int_{-2}^{2} e^{-x}\,dx$

c) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}\,dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx$

a) $\int_{-1}^{1} \frac{3}{x^2+1}\,dx = [3\operatorname{arctg} x]_{-1}^{1} = 3\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\pi}{2}$

b) $\int_{-2}^{2} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{-2}^{2} = -e^{-2} - \left(-e^{-(-2)}\right) = e^2 - \frac{1}{e^2}$

c) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_e^{e^2} = \frac{\left(\ln e^2\right)^2}{2} - \frac{(\ln e)^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx = \left[-\ln(|\cos x|)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln\sqrt{2} + \ln 2 = -\frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2$

14. Ejercicio resuelto.

15. Calcula las derivadas de las siguientes funciones con estos métodos:

1. Calculando la integral y derivando.

2. Aplicando el teorema fundamental del cálculo.

a) $g(x)=\int_x^0 2t\,dt$ **b)** $g(x)=\int_0^x \text{tg}\,t\,dt$ **c)** $g(x)=\int_x^e ae^a\,da$

a) Integral y derivando: $g(x)=\int_x^0 2t\,dt=-\int_0^x 2t\,dt=-\left[t^2\right]_0^x=-x^2 \Rightarrow g'(x)=-2x$

Teorema fundamental del cálculo: $g(x)=\int_x^0 2t\,dt=-\int_0^x 2t\,dt \Rightarrow g'(x)=-2x$

b) Integral y derivando: $g(x)=\int_0^x \text{tg}\,t\,dt=\left[-\ln(\cos t)\right]_0^x \Rightarrow g(x)=-\ln(\cos x) \Rightarrow g'(x)=-\frac{(-\text{sen}\,x)}{\cos x}=\text{tg}\,x$

Teorema fundamental del cálculo: $g(x)=\int_0^x \text{tg}\,t\,dt \Rightarrow g'(x)=\text{tg}\,x$

c) Integral y derivando:

$$g(x)=\int_x^e ae^a\,da=-\int_e^x ae^a da \Rightarrow g(x)=-\left[e^a(a-1)\right]_e^x=-e^x(x-1)+e^e(e-1) \Rightarrow g'(x)=-xe^x$$

Teorema fundamental del cálculo: $g(x)=\int_x^e ae^a\,da=-\int_e^x ae^a \Rightarrow g'(x)=-xe^x$

16. Halla las derivadas de las siguientes funciones.

a) $g(x)=\int_{-x^2}^{x^3} \text{sen}\,2t\,dt$ **b)** $g(x)=\int_{3x-2}^{x^2+x} e^{-t^2}\,dt$

a) $f(x)=\left[\frac{-\cos 2t}{2}\right]_{-x^2}^{x^3}=\frac{1}{2}\left(-\cos\left(2x^3\right)+\cos\left(-2x^2\right)\right)$, su derivada es: $f'(x)=3x^2\text{sen}\left(2x^3\right)+2x\text{sen}\left(-2x^2\right)$

También se puede calcular observando que $g(t)=\text{sen}\,2t$ es continua y por ello:

$$f(x)=\left[G(t)\right]_{-x^2}^{x^3}=G\left(x^3\right)-G\left(-x^2\right),\text{ donde } G'(t)=\text{sen}\,2t$$

Por tanto, $f'(x)=G'\left(x^3\right)3x^2-G'\left(-x^2\right)(-2x)=3x^2\text{sen}\left(2x^3\right)+2x\text{sen}\left(-2x^2\right)$

b) La función $h(t)=e^{-t^2}$ es continua $\Rightarrow g(x)=[H(t)]_{3x-2}^{x^2+x}=H\left(x^2+x\right)-H(3x-2)$, con $H'(x)=e^{-x^2}$, por tanto:

$$g'(x)=(2x+1)H'\left(x^2+x\right)-3H'(3x-2)=(2x+1)e^{-\left(x^2+x\right)^2}-3e^{-(3x-2)^2}$$

17. Ejercicio interactivo.

18 a 20. Ejercicios resueltos.

21. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $y = \dfrac{x}{1+x^2}$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

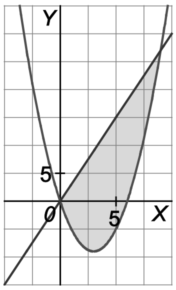
La función es positiva en $[1,2] \Rightarrow A = \int_1^2 \dfrac{x}{1+x^2}dx = \dfrac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_1^2 = \dfrac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)$ u^2.

22. Calcula el área de la región finita limitada por el eje horizontal y la gráfica de $y = x^2 - 2x - 3$.

La función es una parábola cóncava hacia arriba que corta al eje X en los puntos de abscisas –1 y 3.

La región queda por debajo del eje $X \Rightarrow A = -\int_{-1}^3 \left(x^2 - 2x - 3\right)dx = -\left[\dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-1}^3 = -\left(-\dfrac{32}{3}\right) = \dfrac{32}{3}$ u^2.

23. Dibuja el recinto encerrado entre las gráficas de las funciones $y = x^2 - 6x$ e $y = 3x$ y calcula su área.



La gráfica de $f(x) = x^2 - 6x = x(x-6)$ es una parábola cóncava hacia arriba que corta al eje X en los puntos $A(0,0)$ y $B(6,0)$. La gráfica de $y = 3x$ es una recta creciente que pasa por el origen. Los puntos de corte entre ambas gráficas se encuentran resolviendo la ecuación $x^2 - 6x = 3x$, es decir, son los puntos $A(0,0)$ y $C(9,27)$.

El recinto está limitado superiormente por la recta e inferiormente por la parábola y su área es:

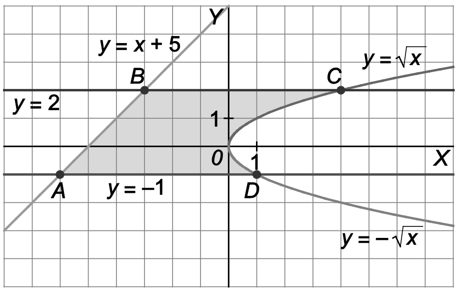
$$A = \int_0^9 \left[3x - \left(x^2 - 6x\right)\right]dx = \int_0^9 \left(-x^2 + 9x\right)dx = \left[-\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{9x^2}{2}\right]_0^9 = \dfrac{243}{2} = 121{,}50 \text{ u}^2$$

24. Calcula el área de la región limitada por estas cuatro curvas: $y = x + 5$, $y = 2$, $y = -1$, $y^2 = x$

La gráfica de la curva $y^2 = x$, que no es una función, se puede obtener dibujando estas dos gráficas:

$$y = \sqrt{x} \qquad\qquad y = -\sqrt{x}$$

Por tanto, la región es la que se muestra.



Los vértices de la región son los puntos de intersección de las curvas que se cortan:

$A(-6,-1)$ $\quad$ $B(-3,2)$

$C(4,2)$ $\quad$ $D(1,-1)$

La región que está a la izquierda del eje Y es un trapecio de altura 3 y bases 6 y 3.

Su área es $A_1 = \dfrac{6+3}{2} \cdot 3 = \dfrac{27}{2}$ u^2.

Otra región está limitada superiormente por $y = 2$ e inferiormente por $y = \sqrt{x}$, su área la da la integral:

$$A_2 = \int_0^4 (2 - \sqrt{x})dx = \left[2x - \dfrac{2}{3}\sqrt[2]{x^3}\right]_0^4 = 8 - \dfrac{16}{3} = \dfrac{8}{3} \text{ u}^2$$

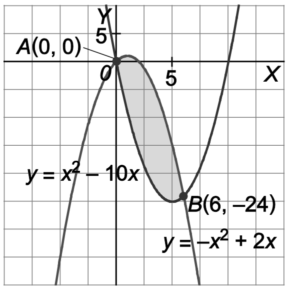
La otra región está limitada superiormente por $y = -\sqrt{x}$ e inferiormente por $y = -1$, su área:

$$A_3 = \int_0^1 (-\sqrt{x} - (-1))dx = \int_0^1 (1 - \sqrt{x})dx = \left[x - \dfrac{2}{3}\sqrt[2]{x^3}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3} \text{ u}^2 \Rightarrow A = A_1 + A_2 + A_3 = \dfrac{27}{2} + \dfrac{8}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{33}{2} \text{ u}^2$$

25. Se considera el recinto del plano limitado por la curva $y = -x^2 + 2x$ y por la curva $y = x^2 - 10x$.

a) Dibuja el recinto. **b)** Calcula el área del recinto.

a) La función $y = -x^2 + 2x$ es una parábola cóncava hacia abajo que corta al eje X en los puntos $A(0,0)$ y $C(2,0)$.



La función $y = x^2 - 10x$ es una parábola cóncava hacia arriba que corta al eje X en los puntos $A(0,0)$ y $D(10,0)$.

Los puntos de corte entre ambas se encuentran resolviendo el sistema formado por sus expresiones y son $A(0,0)$ y $B(6,-24)$.

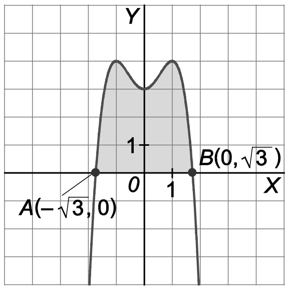
b) El área del recinto es:

$$A = \int_0^6 \left[-x^2 + 2x - \left(x^2 - 10x\right)\right]dx = \int_0^6 \left(-2x^2 + 12x\right)dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 6x^2\right]_0^6 = 72 \text{ u}^2.$$

26. Dada la función $f(x) = 3 + 2x^2 - x^4$, halla los puntos de corte con el eje X y calcula el área de la región del plano encerrada entre esa curva y el eje X.

Los puntos de corte con el eje X se encuentran resolviendo la ecuación bicuadrada $3 + 2x^2 - x^4 = 0$ y obtenemos únicamente dos puntos: $A\left(-\sqrt{3},0\right)$ y $B\left(\sqrt{3},0\right)$. Como la función es par y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$,

ya podemos realizar un esbozo de la gráfica y la región de la que se habla.



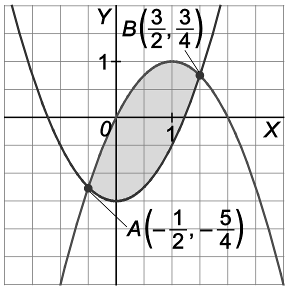
Como la función es par el área pedida será:

$$A = 2\int_0^{\sqrt{3}} \left(3 + 2x^2 - x^4\right)dx = 2\left[3x + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{32\sqrt{3}}{5} \simeq 11{,}09 \text{ u}^2.$$

27. Calcula el área de la región encerrada entre las gráficas de $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = x^2 - \frac{3}{2}$.

Primero hay que calcular los puntos de corte de ambas funciones:

$$x^2 - \frac{3}{2} = 2x - x^2 \Rightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, x = \frac{3}{2}$$



La región está limitada entre dos curvas: $f(x) = 2x - x^2$ por arriba y $g(x) = x^2 - \frac{3}{2}$ por debajo; así pues, el área pedida es:

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left[2x - x^2 - \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)\right]dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-2x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right)dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 + \frac{3x}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} \text{ u}^2.$$

28 y 29. Ejercicios resueltos.

30. Halla la longitud de la catenaria $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ entre $x=-1$ y $x=1$.

$$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\Rightarrow L_0^1=\int_0^1\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx=\int_0^1\sqrt{\frac{4+e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}+2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^x+e^{-x}\right)dx=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)\text{ u.}$$

Por ser una función par $L_{-1}^1=2L_0^1=e-\dfrac{1}{e}$.

31. Calcula la longitud de la llamada parábola semicúbica (aunque no lo es su gráfica se parece a una parábola) $y=x^{\frac{3}{2}}$ entre $x=0$ y $x=4$.

La derivada de la función $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ es $f'(x)=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

La longitud pedida es:

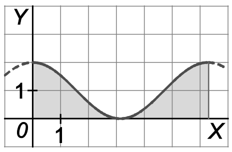
$$L_0^4=\int_0^4\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx=\int_0^4\sqrt{1+\left[\frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^2}\,dx=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx=\frac{4}{9}\int_0^4\frac{9}{4}\sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx=\frac{4}{9}\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4\simeq 9{,}07\text{ u.}$$

32. Sobre una partícula a x metros del origen, actúa una fuerza $F(x)=3x^2+2x$ (N). ¿Qué trabajo realiza F al moverla desde $x=1$ hasta $x=5$ m? (El trabajo se calcula como $W=\int_1^5 F\,dx$).

$$W=\int_1^5F(x)dx=\int_1^5(3x^2+2x)dx=\left[x^3+x^2\right]_1^5=148\text{ J}$$

33. * Halla el volumen del sólido que se forma al girar la región bajo la gráfica de $y=1+\cos x$ en $[0,2\pi]$.

$$V=\int_0^{2\pi}\pi(1+\cos x)^2\,dx=\pi\int_0^{2\pi}(1+\cos x)^2\,dx$$



$$\int(1+\cos x)^2\,dx=\int 1+2\cos x+\cos^2 x\,dx=x+2\operatorname{sen}x+\int\cos^2 x\,dx$$

y, por partes:

$$f(x)=\cos x \qquad f'(x)=-\operatorname{sen}x\,dx$$

$$g'(x)=\cos x\,dx \qquad g(x)=\operatorname{sen}x$$

$$\int\cos^2 x\,dx=\operatorname{sen}x\cos x+\int\operatorname{sen}^2x\,dx=\operatorname{sen}x\cos x+\int(1-\cos^2x)\,dx=\operatorname{sen}x\cos x+x-\int\cos^2x\,dx$$

Despejando se obtiene: $\displaystyle\int\cos^2x\,dx=\frac{x+\operatorname{sen}x\cos x}{2}+C$

Por tanto, $\displaystyle V=\pi\int_0^{2\pi}(1+\cos x)^2\,dx=\pi\left[x+2\operatorname{sen}x+\frac{x+\operatorname{sen}x\cos x}{2}\right]_0^{2\pi}=3\pi^2\text{ u}^3$

34. La población de Circulandia, una típica ciudad, decrece conforme nos alejamos de su centro. En efecto, su densidad de población es $10\,000(3-r)$ habitantes/km^2 siendo *r* la distancia al centro en km.

a) ¿Cuál es el radio de la zona habitada de la ciudad?

b) ¿Cuál es la población de la ciudad?

a) Como la densidad en los confines de la ciudad es 0, entonces $10\,000(3-r)=0$, es decir, $r=3$ km.

b) $P \simeq \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} 2\pi r_i \Delta r f(c_i) = \int_0^3 2\pi r 10\,000(3-r)\,dr$. Se calcula esta integral:

$$\int_0^3 2\pi r 10\,000(3-r)\,dr = 20\,000\pi\int_0^3 (3r-r^2)\,dr = 20\,000\pi\left[\frac{3r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right]_0^3 = 90\,000\pi \simeq 282\,743 \text{ habitantes.}$$

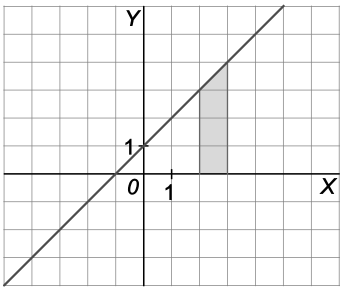
35. Ejercicio interactivo.

36 a 44. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Área bajo una curva

45. Halla el área de la región sombreada utilizando los diferentes métodos propuestos en los distintos apartados. Comprueba que siempre obtienes el mismo resultado.



a) Dividiendo el intervalo $[2,3]$ en n subintervalos de longitud $\frac{1}{n}$, tomando como altura de cada rectángulo la ordenada de su extremo derecho y calculando, finalmente, el límite de la suma de las áreas de los rectángulos cuando $n \to +\infty$.

b) Procediendo como en a, pero tomando como altura de cada rectángulo la ordenada de su extremo izquierdo.

c) Hallando una primitiva F de la función cuya gráfica es la recta oblicua que limita la región y hallando $F(3) - F(2)$.

d) Utilizando la fórmula que nos da el área de un trapecio.

a) La ecuación de la recta que limita superiormente el trapecio es $y = x + 1$.

$$S_n = \frac{1}{n}\left[2+\frac{1}{n}+1+2+\frac{2}{n}+1+...+2+\frac{n}{n}+1\right] = \frac{1}{n}\left[3n+\frac{1+2+\cdots+n}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\left[3n^2+\frac{1+n}{2}n\right] = \frac{1}{n^2}\left[\frac{6n^2+n+n^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{7n^2+n}{2}\right] = \frac{7n+1}{2n} = \frac{7}{2}+\frac{1}{n}.$$

El área del recinto es: $A = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{n}\right) = \frac{7}{2}$ u^2.

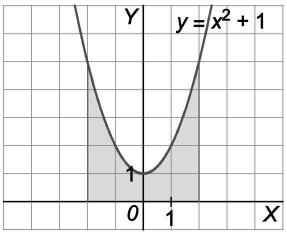
b) $S_n = \frac{1}{n}\left[2+1+2+\frac{1}{n}+1+...+2+\frac{n-1}{n}+1\right] = \frac{1}{n}\left[3n+\frac{1+2+\cdots+n-1}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\left[3n^2+\frac{1+n-1}{2}(n-1)\right] =$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{6n^2+n^2-n}{2}\right] = \frac{1}{n^2}\left[\frac{7n^2-n}{2}\right] = \frac{7n-1}{2n} = \frac{7}{2}-\frac{1}{2n} \Rightarrow A = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2n}\right) = \frac{7}{2} \text{ u}^2$$

c) Una primitiva de $y = x + 1$ es $F(x) = \frac{x^2}{2} + x \Rightarrow A = F(3) - F(2) = \frac{3^2}{2} + 3 - \left(\frac{2^2}{2}+2\right) = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$ u^2

d) La región sombreada es un trapecio de altura 1 y bases 4 y 3. Su área es $A = \frac{4+3}{2}\cdot 1 = \frac{7}{2}$ u^2.

46. Calcula el área limitada por la curva $y = x^2 + 1$, el eje horizontal y las rectas verticales $x = -2$ y $x = 2$.



Se divide el intervalo $[-2,2]$ en $4n$ subintervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{n}$.

Se calcula la suma de las áreas de los rectángulos obtenidos tomando como base la longitud de cada subintervalo y como altura la ordenada del extremo derecho.

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(-2+\frac{1}{n}\right)^2 + 1 + \left(-2+\frac{2}{n}\right)^2 + 1 + ... + \left(-2+\frac{4n}{n}\right)^2 + 1\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[4 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{4}{n} + 1 + 4 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 - \frac{8}{n} + 1 + \cdots + 4 + \left(\frac{4n}{n}\right)^2 - \frac{16n}{n} + 1\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[20n + \frac{1^2 + 2^2 + \cdots (4n)^2}{n^2} - \frac{4 + 8 + \cdots + 16n}{n}\right]$$

Aplicando las fórmulas ya conocidas:

$$S_n = \frac{1}{n}\left[20n + \frac{4n(4n+1)(8n+1)}{6n^2} - \frac{2n(4+16n)}{n}\right] = \frac{1}{n}\left[20n + \frac{2(4n+1)(8n+1)}{3n} - 8(1+4n)\right] =$$

$$= \frac{1}{3n^2}\left[60n^2 + 2(4n+1)(8n+1) - 24n(1+4n)\right] = \frac{28n^2+2}{3n^2} = \frac{28}{3} + \frac{2}{3n^2}$$

El área del recinto es: $A = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{28}{3} + \frac{2}{3n^2}\right) = \frac{28}{3}$ u^2

(Como la función $y = x^2 + 1$ es simétrica respecto del eje Y y el intervalo $[-2,2]$ está centrado en el cero, podríamos haber calculado el área entre 0 y 2 y luego hallar su doble).

47. Determina el área de la región limitada por la función $f(x) = x^3$, el eje X y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$.

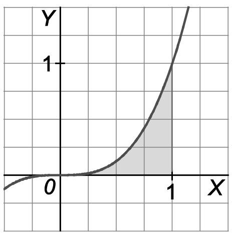
Para ello, usa la expresión $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Se divide el intervalo $[0,1]$ en n subintervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{n}$.

Se calcula la suma de las áreas de los rectángulos obtenidos tomando como base la longitud de cada subintervalo y como altura la ordenada del extremo derecho.

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + ... + \left(\frac{n}{n}\right)^3\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^3}\right] = \frac{1}{n}\left[\frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{n^3}\right] = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4n^4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4n} + \frac{1}{4n^2}$$

El área del recinto es: $A = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4n} + \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{1}{4}$ u^2

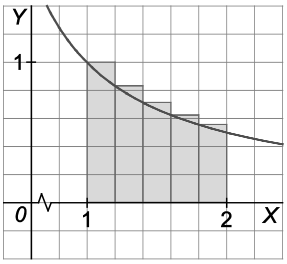


Integral definida. Propiedades

48. Esboza la gráfica de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en $[1,2]$ y divide este intervalo en 5 subintervalos para probar que:

$$0,2\left(\frac{1}{1,2}+\frac{1}{1,4}+\frac{1}{1,6}+\frac{1}{1,8}+\frac{1}{2}\right)<\int_1^2\frac{1}{x}dx<0,2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1,2}+\frac{1}{1,4}+\frac{1}{1,6}+\frac{1}{1,8}\right)$$

Observando el dibujo se aprecia que el área bajo la curva es mayor que la suma de las áreas de los rectángulos inferiores y menor que la suma de las áreas de los rectángulos superiores.



Teorema del valor medio. Regla de Barrow

49. Comprueba si se cumplen las condiciones para aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x)=(x-2)^2$ en el intervalo $[0,2]$. Si es así calcula el valor medio de *f* en dicho intervalo y la abscisa del punto en el que se alcanza dicho valor.

Como *f* es una función polinómica, entonces es continua en $\mathbb{R}$, en particular, en $[0,2]$. Aplicando el teorema del valor medio, se busca $c\in[0,2]$ tal que $\int_0^2(x-2)^2\,dx=f(c)(2-0)$.

$\int_0^2(x-2)^2\,dx=\left[\dfrac{(x-2)^3}{3}\right]_0^2=\dfrac{8}{3}$, por tanto, $\dfrac{8}{3}=f(c)2\Rightarrow f(c)=\dfrac{4}{3}\Rightarrow(c-2)^2=\dfrac{4}{3}\Rightarrow c=2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, c=2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

pero solo la segunda pertenece al intervalo $[0,2]$.

50. Calcula una aproximación por exceso y otra por defecto de ln 2 utilizando una partición en cinco subintervalos para calcular la integral definida $\int_1^2\dfrac{dx}{x}$.

Por defecto: Se toman 5 rectángulos de base 0,2 y altura el extremo derecho.

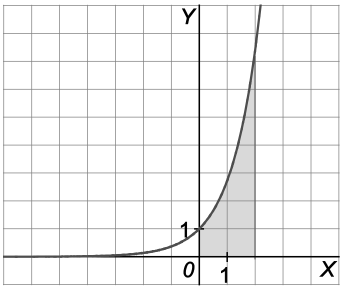
Por exceso: Se toman 5 rectángulos de base 0,2 y altura el extremo izquierdo.

$$0,2\left(\frac{1}{1,2}+\frac{1}{1,4}+\frac{1}{1,6}+\frac{1}{1,8}+\frac{1}{2}\right)<\int_1^2\frac{1}{x}dx<0,2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1,2}+\frac{1}{1,4}+\frac{1}{1,6}+\frac{1}{1,8}\right)$$

Operando: $0,6456<\int_1^2\frac{1}{x}dx=\ln2-\ln1=\ln2<0,7456$.

Por tanto, 0,645 6 < ln 2 < 0,745 6.

51. La siguiente región está limitada superiormente por la gráfica de la función $y = e^x$.



Halla la altura que debe tener un rectángulo de base 2 para que su área sea igual a la de la región sombreada.

El área de la región sombreada es $\int_0^2 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^2 = e^2 - 1$.

El teorema del valor medio nos asegura que existe un número c del intervalo $[0,2]$ que cumple $\int_0^2 e^x\,dx = f(c)(2-0)$.

Así pues, $e^2 - 1 = f(c)2 \Rightarrow f(c) = \dfrac{e^2-1}{2}$.

Por tanto, el rectángulo de base 2 y altura $\dfrac{e^2-1}{2}$ tiene igual área que el de la región.

52. Determina el valor de las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{-3}^{1}\left(x^3 - 2x^2 + 5\right)dx$ **d)** $\int_{-2}^{0} 2^x\,dx$ **g)** $\int_{-1}^{1}\dfrac{5}{1+x^2}dx$

b) $\int_{-\pi}^{2\pi}\cos(3x-2)\,dx$ **e)** $\int_{0}^{3}\dfrac{x}{3x^2+1}dx$ **h)** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx$

c) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}(2x-1)\,dx$ **f)** $\int_{0}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **i)** $\int_{-2}^{2} xe^{-x^2}\,dx$

a) $\int_{-3}^{1}\left(x^3 - 2x^2 + 5\right)dx = \left[\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} + 5x\right]_{-3}^{1} = -\dfrac{56}{3}$

b) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(3x-2)\,dx = \left[\dfrac{\operatorname{sen}(3x-2)}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

c) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}(2x-1)\,dx = \left[\dfrac{-\cos(2x-1)}{2}\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \simeq 0{,}54$

d) $\int_{-2}^{0} 2^x\,dx = \left[\dfrac{2^x}{\ln 2}\right]_{-2}^{0} = \dfrac{3}{\ln 16} \simeq 1{,}08$

e) $\int_{0}^{3}\dfrac{x}{3x^2+1}dx = \left[\dfrac{\ln\left(3x^2+1\right)}{6}\right]_{0}^{3} = \dfrac{\ln 28}{6} \simeq 0{,}56$

f) $\int_{0}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\operatorname{arcsen} x\right]_0^1 = \dfrac{\pi}{2}$

g) $\int_{-1}^{1}\dfrac{5}{1+x^2}dx = \left[5\operatorname{arctg} x\right]_{-1}^{1} = 5\dfrac{\pi}{2} \simeq 7{,}85$

h) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx = \left[\dfrac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$

i) $\int_{-2}^{2} xe^{-x^2}\,dx = \left[-\dfrac{e^{-x^2}}{2}\right]_{-2}^{2} = 0$

53. Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_0^1 x\,\text{arctg}\,x\,dx$ **d)** $\int_{-1}^1 xe^x dx$ **g)** $\int_0^2 \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$ **j)** $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \text{sen}\,x\,dx$ **e)** $\int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} \frac{x+1}{x^2-2x}dx$ **h)** $\int_0^3 \frac{1}{1+2e^x}dx$

c) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$ **f)** $\int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}dx$ **i)** $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$

a) $\int x\,\text{arctg}\,x\,dx$. Integración por partes: $f(x)=\text{arctg}\,x$, $dg(x)=x$, $df(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $g(x)=\frac{x^2}{2}$. Por tanto,

$$\int x\,\text{arctg}\,x\,dx = \text{arctg}\,x\frac{x^2}{2}-\int\frac{1}{1+x^2}\frac{x^2}{2}dx = \text{arctg}\,x\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\left[x-\int\frac{1}{1+x^2}dx\right] = \text{arctg}\,x\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\text{arctg}\,x + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x\,\text{arctg}\,x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\text{arctg}\,x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\text{arctg}\,x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

b) $\int x^2\text{sen}\,x\,dx$. Integración por partes: $f(x)=x^2$, $dg(x)=\text{sen}\,x$, $df(x)=2x$, $g(x)=-\cos x$, por lo que $\int x^2\text{sen}\,x\,dx = -x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx$. Para obtener ahora $\int 2x\cos x\,dx$, se procede de la misma forma: $f(x)=2x$, $dg(x)=\cos x$, $df(x)=2$ $g(x)=\text{sen}\,x$, Por tanto:

$$\int x^2\text{sen}\,x\,dx = -x^2\cos x+\left[2x\,\text{sen}\,x-\int 2\,\text{sen}\,x\,dx\right] = -x^2\cos x+2x\,\text{sen}\,x+2\cos x + C.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\text{sen}\,x\,dx = \left[-x^2\cos x+2x\,\text{sen}\,x+2\cos x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

c) $$\int\frac{dx}{x^2+2x} = \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}(\ln x-\ln(x+2))+C \Rightarrow \int_1^2\frac{dx}{x^2+2x} = \frac{1}{2}\left[\ln x-\ln(x+2)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

d) $\int xe^x dx$. Integración por partes: $f(x)=x$, $dg(x)=e^x$, $df(x)=1$, $g(x)=e^x$, luego $\int xe^x dx = xe^x-\int e^x dx = xe^x-e^x+C=(x-1)e^x+C$. Por tanto, $\int_{-1}^1 xe^x\,dx = \left[(x-1)e^x\right]_{-1}^1 = \frac{2}{e}$

e) $$\int\left(\frac{-1/2}{x}+\frac{3/2}{x-2}\right)dx = -\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-2|+C \Rightarrow \int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}}\frac{x+1}{x^2-2x}dx = \left[-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-2|\right]_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} \simeq 1{,}49$$

f) $$\int\frac{4x^2+1-4x}{4x^2+1}dx = \int\left(1-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx = x-\frac{1}{2}\ln\left(4x^2+1\right)+C \Rightarrow \int_0^1\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}dx = \left[x-\frac{1}{2}\ln\left(4x^2+1\right)\right]_0^1 = 1-\frac{\ln 5}{2}$$

g) $$\int_0^2\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx = \left[-\frac{1}{x^2+x+1}\right]_0^2 = -\frac{1}{7}+1=\frac{6}{7}$$

h) $$\int_0^3\frac{1}{1+2e^x}dx = \int_0^3\left(1-\frac{2e^x}{1+2e^x}\right)dx = \left[x-\ln(1+e^x)\right]_0^3 \simeq 0{,}38$$

i) $$\int\frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+\left(x^2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\text{arctg}\left(x^2\right)+C \Rightarrow \int_0^1\frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\left[\text{arctg}\left(x^2\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

j) $$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx = \int\frac{x}{\sqrt{1+\left(x^2\right)^2}}dx = -\frac{1}{2}\ln\left(\left|\sqrt{x^4+1}-x^2\right|\right)+C \Rightarrow \int_{-1}^1\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx = \left[-\frac{1}{2}\ln\left(\left|\sqrt{x^4+1}-x^2\right|\right)\right]_{-1}^1 = 0.$$

54. Un profesor apresurado pidió a sus alumnos que calcularan la integral definida $\int_{-3}^{2}\frac{dx}{x^2}$. Laila trabajó así:

$$\int_{-3}^{2}\frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-3}^{2}=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{-3}\right)=-\frac{5}{6}$$

Y después razonó: "estoy segura de que hay algo mal porque sé que la función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ es positiva en todo su dominio y por tanto, la integral pedida, $\int_{-3}^{2}\frac{dx}{x^2}$, no puede ser negativa". ¿Dónde está el error?

La función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ no está definida para $x=0$, por lo que no es continua en el intervalo $(-3,2)$, así, que no existe la integral definida $\int_{-3}^{2}\frac{1}{x^2}dx$.

55. Sabiendo que $\sqrt[5]{2}\simeq 1{,}1487$; puedes encontrar otra aproximación de $\ln 2$ haciendo una partición en cinco subintervalos para calcular $\int_0^1 2^x dx$.

Utiliza la integral anterior y la regla de Barrow para demostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\right]=\ln 2$.

Se divide el intervalo $[0,1]$ en 5 subintervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{5}$.

$$S_5=\frac{1}{5}\left[2^{\frac{1}{5}}+2^{\frac{2}{5}}+2^{\frac{3}{5}}+2^{\frac{4}{5}}+2^{\frac{5}{5}}\right]=\frac{1}{5}\left[1{,}1487+1{,}1487^2+1{,}1487^3+1{,}1487^4+1{,}1487^5\right]\simeq 1{,}545$$

Por otra parte, $\int_0^1 2^x dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1=\frac{1}{\ln 2}\Rightarrow\frac{1}{\ln 2}\simeq 1{,}545\Rightarrow \ln 2\simeq 0{,}64724$

Análogamente, se divide el intervalo $[0,1]$ en n subintervalos, cada uno de longitud: $\frac{1}{n}$

$$S_n=\frac{1}{n}\left[2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right]=\frac{1}{n}\left[2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2\right]=\frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 2^{\frac{1}{n}}-2^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}}-1}\right)=\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n}\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{n}}-1}\right)=\frac{\sqrt[n]{2}}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_0^1 2^x dx=\frac{1}{\ln 2}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{2}}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}}{\lim\limits_{n\to+\infty}n(\sqrt[n]{2}-1)}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)}=\frac{1}{\ln 2}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)=\ln 2$$

Teorema fundamental del cálculo

56. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$

b) $f(x)=\int_x^{x^2} \frac{dt}{2t}$

c) $f(x)=\int_1^{\cos x} \frac{dt}{t}$

d) $f(x)=\int_x^{x^2+1} e^{-t^2}\,dt$

a) La integral $\int \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$ no es elemental, así que no se puede calcular dicha integral para después derivarla, pero $g(t)=\frac{\operatorname{sen} t}{t}$ es continua para $t>0$ y el teorema fundamental del cálculo nos asegura que la derivada de $f(x)=\int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$ es $f'(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

b) $f(x)=\int_x^{x^2} \frac{dt}{2t}=\frac{1}{2}[\ln t]_x^{x^2}=\frac{1}{2}\left(\ln x^2-\ln x\right)=\frac{1}{2}\left(2\ln x-\ln x\right)=\frac{\ln x}{2}$, su derivada es $f'(x)=\frac{1}{2x}$.

c) $f(x)=\int_1^{\cos x} \frac{dt}{t}=[\ln t]_1^{\cos x}=\ln(\cos x)$, su derivada $f'(x)=\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}=-\operatorname{tg} x$.

d) La integral $\int e^{-t^2}dt$ no es elemental, así que no se puede emplear el método de los dos apartados anteriores.

La función $g(t)=e^{-t^2}$ es continua, así pues, $f(x)=\left[G(t)\right]_x^{x^2+1}=G\left(x^2+1\right)-G(x)$, siendo $G'(x)=e^{-x^2}$, por tanto: $f'(x)=G'\left(x^2+1\right)2x-G'(x)=2xe^{-\left(x^2+1\right)^2}-e^{-x^2}$

57. Calcula $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\int_1^{1+h}\sqrt{x^2+8}\,dx}{h}$.

Si se llama $f(x)=\sqrt{x^2+8}$ y $F(x)$ a una primitiva suya, $F'(x)=f(x)$, entonces,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_1^{1+h}\sqrt{x^2+8}\,dx}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(h)}{h}=F'(1)=f(1)=\sqrt{1^2+8}=3.$$

58. Halla los puntos de inflexión de la función $g(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

Por el teorema fundamental del cálculo se sabe que la derivada de $g(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ es $g'(x)=e^{-x^2}$ y la segunda derivada es $g''(x)=-2xe^{-x^2}$, que se anula si $x=0$.

Además, la segunda derivada es positiva a la izquierda de $x=0$ (g es cóncava hacia arriba) y es negativa a la derecha de $x=0$ (g es cóncava hacia abajo).

Así pues en $x=0$ se produce un cambio de curvatura, por tanto, el punto $A(0,g(0))=A(0,0)$ es un punto de inflexión de $g(x)$.

59. Calcula la derivada de la función $f(x)=\int_0^x \cos t^2\, dt$.

Por el teorema fundamental del cálculo se sabe que $f'(x)=\cos x^2$.

60. Halla la derivada de estas funciones.

a) $f(x)=\int_3^x t^2\, dt$

b) $f(x)=\int_3^{\operatorname{sen} x} t^2\, dt$

c) $f(x)=\int_x^3 t^2\, dt$

d) $f(x)=\int_{x^2}^{1+x^3} t^2\, dt$

a) Por el teorema fundamental del cálculo se sabe que $f'(x)=x^2$.

b) $f(x)=\int_3^{\operatorname{sen} x} t^2\, dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_3^{\operatorname{sen} x}=\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}-9$. Su derivada es $f'(x)=\operatorname{sen}^2 x$.

c) Por las propiedades de la integral definida se sabe que $f(x)=\int_x^3 t^2\, dt=-\int_3^x t^2\, dt$. Por tanto, $f'(x)=-x^2$.

d) $f(x)=\int_{x^2}^{1+x^3} t^2\, dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_{x^2}^{1+x^3}=\frac{\left(1+x^3\right)^3}{3}-\frac{x^6}{3}\Rightarrow f'(x)=\frac{3\left(1+x^3\right)^2 3x^2}{3}-\frac{6x^5}{3}=3x^2\left(1+x^3\right)^2-2x^5$.

61. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x)=\int_3^x \frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)} dt$

b) $f(x)=\int_x^3 \frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)} dt$

c) $f(x)=\int_3^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)} dt$

d) $f(x)=\int_{x^2}^{1+x^3} \frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)} dt$

La integral $\int \frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)} dt$ no es elemental pero sí se sabe que la función $g(t)=\frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)}$ es continua.

a) Por el teorema fundamental del cálculo se sabe que $f'(x)=\frac{1}{\ln\left(x^2+1\right)}$.

b) $f(x)=\int_x^3 \frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)} dt=-\int_3^x \frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)} dt$, así pues, $f'(x)=-\frac{1}{\ln\left(x^2+1\right)}$.

c) $f(x)=\left[G(t)\right]_3^{\operatorname{sen} x}=G(\operatorname{sen} x)-G(3)$, siendo $G'(t)=\frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)}$.

Por tanto: $f'(x)=G'(\operatorname{sen} x)\cos x=\frac{\cos x}{\ln\left(\operatorname{sen}^2 x+1\right)}$

d) $f(x)=\left[G(t)\right]_{x^2}^{1+x^3}=G\left(1+x^3\right)-G\left(x^2\right)$, siendo

$$G'(t)=\frac{1}{\ln\left(t^2+1\right)}\Rightarrow f'(x)=G'\left(1+x^3\right)3x^2-G'\left(x^2\right)2x=\frac{3x^2}{\ln\left(\left(1+x^3\right)^2+1\right)}-\frac{2x}{\ln\left(x^4+1\right)}$$

62. Sea $F(x)=\int_1^{x^2} \ln t\, dt$ con $x \geq 1$.

a) Calcula $F'(e)$.

b) ¿Es $F''(x)$ una función constante? Justifica tu respuesta.

a) $F(x)=\int_1^{x^2} \ln t\, dt = [t\ln t - t]_1^{x^2} = x^2\ln x^2 - x^2 + 1 \Rightarrow F'(x) = 2x\ln x^2 + x^2\dfrac{2x}{x^2} - 2x = 2x\ln x^2 = 4x\ln x$.

Por tanto, $F'(e) = 4e\ln e = 4e$.

b) $F''(x) = 4\ln x + 4x\dfrac{1}{x} = 4\ln x + 4$. No es una función constante porque su derivada no es nula.

63. Sea la función $F(x)=\int_1^{x} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ definida para $x \geq 1$. Halla los valores de x en los que alcanza sus máximos y mínimos relativos.

$F'(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Esta derivada se anula si $\operatorname{sen} x = 0$, es decir, si $x = \pi + k\pi$ con $k = 0, 1, 2,\ldots$ Máximo si $k = 0, 2, 4,\ldots$, y mínimo si $k = 1, 3, 5,\ldots$

64. La función $F(x)$ está definida por $F(x)=\int_1^{e^x - x - 1} e^{-t^2} dt$. Halla los puntos en los que se anula $F'(x)$.

La integral $\int e^{-t^2} dt$ no es elemental, así que no se puede calcular dicha integral para después derivarla. La función $g(t) = e^{-t^2}$ es continua, así pues, $F(x) = [G(t)]_1^{e^x - x - 1} = G(e^x - x - 1) - G(1)$, siendo $G'(x) = e^{-x^2}$, por tanto: $F'(x) = G'(e^x - x - 1)(e^x - 1) - 0 = (e^x - 1)e^{-(e^x - x - 1)^2}$. Dicha derivada se anula si $e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$.

65. Sea $F(x)=\int_0^{2x} e^{t^2} dt$. Calcula $F'(0)$.

La función $g(t) = e^{t^2}$ es continua, así pues, $F(x) = [G(t)]_0^{2x} = G(2x) - G(0)$, siendo $G'(x) = e^{x^2}$, por tanto: $F'(x) = G'(2x)2 - 0 = 2e^{(2x)^2} \Rightarrow F'(0) = 2$.

66. **a)** Calcula los extremos relativos y absolutos de la función $f:[-7,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^3+6x^2+49$.

b) Sea β el punto en el que *f* alcanza su máximo absoluto. Calcula $\int_{-7}^{\beta} f(x)dx$.

a) $f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$ se anula si $x=0$ o si $x=-4$. Aplicando el criterio de la segunda derivada se ve que $A(-4,209)$ es un máximo relativo y $B(0,49)$ es un mínimo relativo. Se comparan los valores:

$f(-4)=209$ $\quad f(0)=49$ $\quad f(-7)=0$ $\quad f(1)=56$

Así pues, $A(-4,209)$ es el máximo absoluto y $C(-7,0)$ es el mínimo absoluto.

b) Ya se ha calculado $\beta=-4 \Rightarrow \int_{-7}^{-4}(x^3+6x^2+49)dx=\left[\frac{x^4}{4}+2x^3+49x\right]_{-7}^{-4}=\frac{675}{4}$

67. **Si $\int_c^x f(t)dt=5x^3+40$, ¿qué función es $f(x)$? ¿Cuánto vale c?**

Sea $g(x)=\int_c^x f(t)dt=5x^3+40$; entonces $g'(x)=f(x)=15x^2$.

Por otra parte, tomando $x=c$, $g(c)=0=5c^3+40$, de donde $c=-2$.

68. **Halla el punto del intervalo $[0,2]$ en el que la función $f(x)=\int_0^x \frac{t-1}{1+t^2}dt$ alcanza su mínimo.**

Como la función $g(t)=\frac{t-1}{1+t^2}$ es continua, se sabe que la derivada de $f(x)$ es $f'(x)=\frac{x-1}{1+x^2}$.

Esta derivada se anula si $x=1$ y como a la izquierda de 1 es negativa y a su derecha es positiva, en el punto de abscisa $x=1$ se encuentra el mínimo de la función $f(x)$.

69. **a)** Si *f* es una función continua, obtén $F'(x)$ siendo: $F(x)=\int_0^x\left(f(t)+t^2+t^3\right)dt$.

b) Si $f(1)=1$ y además $\int_0^1 f(t)dt=1$, halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1,F(1))$.

a) Como la función $g(t)=f(t)+t^2+t^3$ es continua, el teorema fundamental del cálculo asegura que la derivada de $F(x)$ es $F'(x)=f(x)+x^2+x^3$.

b) La ecuación de la recta tangente buscada es $y-F(1)=F'(1)(x-1)$. Se calcula entonces $F(1)$ y $F'(1)$:

$$F(1)=\int_0^1\left(f(t)+t^2+t^3\right)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_0^1 t^2dt+\int_0^1 t^3dt=1+\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{19}{12}$$

$F'(1)=f(1)+1^2+1^3=1+1+1=3$

La recta tangente es $y-\frac{19}{12}=3(x-1)$, es decir, $y=3x-\frac{17}{12}$.

70. Dada $f(x)=\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}$, determina el valor del parámetro $a>0$ para el que $\int_0^a f(x)dx=-1$.

$\int_0^a \frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\left[\frac{2}{1+x^2}\right]_0^a=\frac{2}{1+a^2}-2=-1\Rightarrow \frac{2}{1+a^2}=1\Rightarrow 1+a^2=2\Rightarrow a=1, a=-1$, y como solo vale la solución positiva, concluimos que $a=1$.

71. Sean las funciones $F(x)=\int_1^x \sqrt{5+e^{t^2}}dt$ y $g(x)=x^2$, calcula $\left[F\left(g(x)\right)\right]'$.

Como la función $f(t)=\sqrt{5+e^{t^2}}$ es continua, por el teorema fundamental del cálculo se tiene que $F'(x)=\sqrt{5+e^{x^2}}$. Aplicando la regla de la cadena, $\left[F\left(g(x)\right)\right]'=F'\left(g(x)\right)g'(x)=F'\left(x^2\right)2x=2x\sqrt{5+e^{x^4}}$.

72. Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^{x^3}e^{t^2}dt}{x\int_0^{x^2}e^{t^2}dt}$.

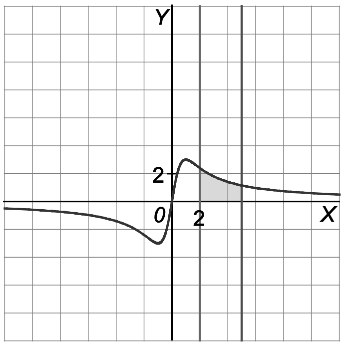
Al presentarse una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ y estar en las hipótesis del teorema de L´Hôpital, se aplica la toma de derivadas en el límite y el teorema fundamental del cálculo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x^3}e^{t^2}dt}{x\int_0^{x^2}e^{t^2}dt}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^6}3x^2}{\int_0^{x^2}e^{t^2}dt+xe^{x^4}2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^5e^{x^6}3x^2+6xe^{x^6}}{2xe^{x^4}+4xe^{x^4}+2x^2e^{x^4}4x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6xe^{x^6}\left[3x^6+1\right]}{2xe^{x^4}\left[3+4x^4\right]}=+\infty$$

Áreas de recintos

73. Calcula el área encerrada entre $f(x)=\dfrac{6x}{x^2+1}$ y el eje de abscisas para $x\in[2,5]$.

$$A=\int_2^5\left(\frac{6x}{x^2+1}\right)dx=\left[3\ln\left(x^2+1\right)\right]_2^5=3\left(\ln 26-\ln 5\right)\ \text{u}^2.$$



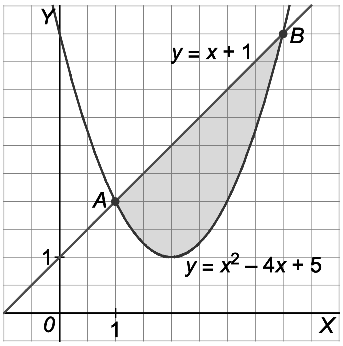
74. Dibuja la superficie limitada por la recta $y = x + 1$ y la parábola $y = x^2 - 4x + 5$. Halla su área.

Los puntos de corte de ambas funciones se obtienen resolviendo la ecuación:

$$x^2 - 4x + 5 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 4$$

Los puntos de corte son $A(1,2)$ y $B(4,5)$.

La región está comprendida entre dos gráficas: la recta $y = x + 1$ por encima y la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ por debajo.



El área de la región es: $A = \int_1^4 \left(x + 1 - \left(x^2 - 4x + 5\right)\right)dx = \int_1^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right)dx = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4 = \frac{9}{2}$ u^2

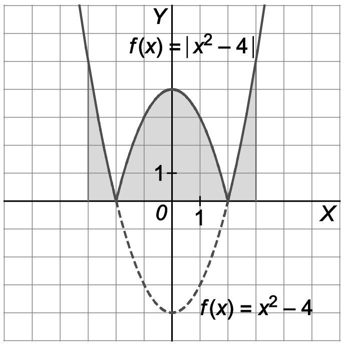
75. Dibuja la gráfica de $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$ en el intervalo $[-3,3]$ y calcula su integral.

La gráfica de $f(x)$ se dibuja muy fácilmente a partir de la de la función $g(x) = x^2 - 4$, sin más que reflejar su parte negativa respecto al eje *X*.

Como la función es positiva y simétrica respecto al eje *Y*, y el intervalo está centrado en el origen, se calcula la integral de esta forma:

$$\int_{-3}^{3} |x^2 - 4|\,dx = 2\int_0^2 \left(-x^2 + 4\right)dx + 2\int_2^3 \left(x^2 - 4\right)dx =$$

$$= 2\left[\frac{-x^3}{3} + 4x\right]_0^2 + 2\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^3 = \frac{46}{3} \text{ u}^2.$$



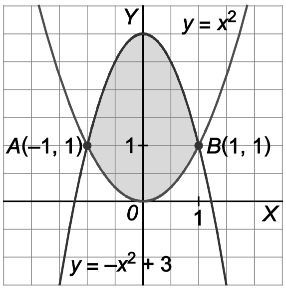
76. Halla el valor de $a > 0$, tal que $\int_0^{a-1} (x + 1)dx = \frac{9}{2}$.

$$\int_0^{a-1} (x+1)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^{a-1} = \frac{(a-1)^2}{2} + a - 1 = \frac{9}{2} \Rightarrow a^2 - 2a + 1 + 2a - 2 = 9 \Rightarrow a^2 = 10 .$$

Descartando la solución que no es positiva, concluimos que $a = \sqrt{10}$.

77. Halla el área de la región comprendida entre las parábolas $y = x^2$ e $y = -2x^2 + 3$.

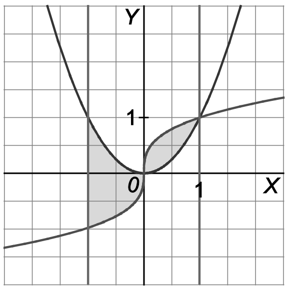
$x^2 = -2x^2 + 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$.



Los puntos de corte son $A(-1,1)$ y $B(1,1)$ .La región está comprendida entre dos gráficas, $y = -2x^2 + 3$ está por arriba e $y = x^2$ está por debajo. Como ambas funciones son simétricas respecto del eje Y, el área de la región es:

$$A = 2\int_0^1 \left(-2x^2 + 3 - x^2\right) dx = 2\int_0^1 \left(-3x^2 + 3\right) dx = 2\left[-x^3 + 3x\right]_0^1 = 4 \text{ u}^2.$$

78. Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$, $y = x^{\frac{1}{3}}$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

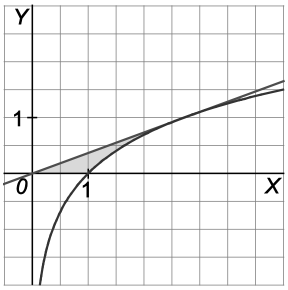


Las gráficas de las funciones se cortan en los puntos $O(0,0)$ y $A(1,1)$.

La región está formada por dos trozos:

$$A = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - x^{\frac{1}{3}}\right) dx + \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - x^2\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{2} \text{ u}^2$$

79. Calcula el área limitada por la gráfica de la función $y = \ln x$, el eje X y la recta tangente a dicha gráfica en el punto $x = e$.



La recta tangente tiene por ecuación $y - f(e) = f'(e)(x - e)$, es decir $y = \frac{1}{e}x$.

El recinto está formado por dos regiones. Una, limitada por la recta tangente y el eje X entre 0 y 1, es un triángulo de base 1 y altura $\frac{1}{e}$, su área es $A_1 = \frac{1}{2e}$.

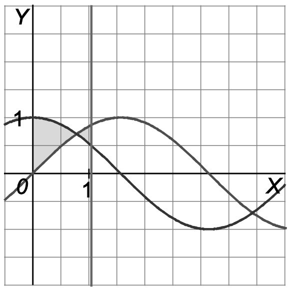
El área de la otra es: $A_2 = \int_1^e \left(\frac{x}{e} - \ln x\right) dx = \left[\frac{x^2}{2e} - x\ln x + x\right]_1^e = \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} - 1$

El área del recinto es $A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2e} + \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} - 1 = \frac{e}{2} - 1 \text{ u}^2$.

80. ***a)** Dibuja el recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{3}$.

b) Calcula el área del recinto del apartado anterior.

a) El punto de corte de ambas funciones se encuentra resolviendo la ecuación $\operatorname{sen} x = \cos x$, cuya única solución en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ es $x = \frac{\pi}{4}$.



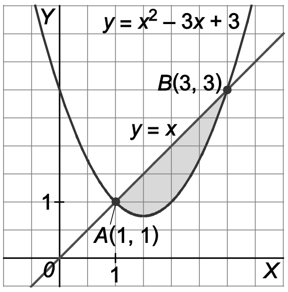
b) $A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x) dx = [\operatorname{sen} x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$

$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{sen} x - \cos x) dx = [-\cos x - \operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}$

$A = A_1 + A_2 = \sqrt{2} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{2} - 3 - \sqrt{3}}{2} \text{ u}^2.$

81. **a)** Representa las curvas de ecuaciones $y = x^2 - 3x + 3$ e $y = x$.

b) Halla el área del recinto limitado por dichas curvas.



a) Los puntos de corte se encuentran resolviendo la ecuación

$$x^2 - 3x + 3 = x \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$$

Los puntos de corte son $A(1,1)$ y $B(3,3)$.

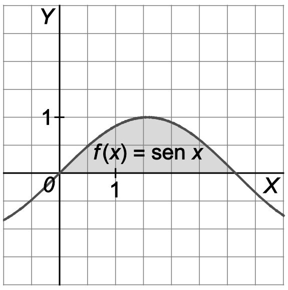
b) El recinto está limitado superiormente por la recta e inferiormente por la parábola.

Su área viene dada por el valor de la integral:

$$A = \int_1^3 \left(x - \left(x^2 - 3x + 3\right)\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3 = \frac{4}{3} \text{ u}^2.$$

82. **Halla el área que encierra una loma de $f(x) = \operatorname{sen} x$.**

Elegimos la una loma que quede por encima del eje *X*, por ejemplo, la que nos encontramos entre 0 y π.



$$A = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2 \text{ u}^2.$$

83. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \mathbf{ax^2+b} & \textbf{si}\ |x|<2 \\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2}} & \textbf{si}\ |x|\ge 2 \end{cases}$.

a) Calcula *a* y *b* para que *f* sea continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) Para los valores de *a* y *b* obtenidos en el apartado anterior, determina el área de la región acotada por la gráfica de *f*, el eje horizontal y las rectas $x = 1$, $x = 3$.

a) Como intervienen valores absolutos, debemos expresar la función desglosando dichos valores absolutos:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\le -2 \\ ax^2+b & \text{si } -2<x<2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

Está claro que la función es continua en el interior de los tres intervalos de definición. Se impone la condición de que sea continua en los extremos de estos intervalos.

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{4},\ \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\left(ax^2+b\right)=4a+b,\ f(-2)=\frac{1}{4}\Rightarrow 4a+b=\frac{1}{4}\Rightarrow 16a+4b=1$$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(ax^2+b\right)=4a+b$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{4}$, $f(2)=\frac{1}{4}\Rightarrow 4a+b=\frac{1}{4}$, que es la misma ecuación que la anterior.

Así pues, si $4a+b=\frac{1}{4}$, es decir, si $16a+4b=1$ la función será continua en todo $\mathbb{R}$.

Se impone ahora la condición de que también sea derivable.

La función derivada para valores de *x* distintos de –2 y 2 es: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2}{x^3} & \text{si } x<-2 \\ 2ax & \text{si } -2<x<2 \\ \dfrac{-2}{x^3} & \text{si } x>2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to -2^-} f'(x)=\lim_{x\to -2^-}\left(\frac{-2}{x^3}\right)=\frac{1}{4},\ \lim_{x\to -2^+} f'(x)=\lim_{x\to -2^+} 2ax=-4a\Rightarrow \frac{1}{4}=-4a\Rightarrow a=-\frac{1}{16}$$

(Muy importante: ahora hay que comprobar que este valor de *a* es el mismo que hace que exista $f'(2)$. Si no fuese el mismo, concluiríamos que *f* no es derivable en todo $\mathbb{R}$).

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x)=\lim_{x\to 2^-} 2ax=4a,\ \lim_{x\to 2^+} f'(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{-2}{x^3}\right)=-\frac{1}{4}\Rightarrow -\frac{1}{4}=4a\Rightarrow a=-\frac{1}{16}.$$

Para este valor de *a*, $b=\frac{1}{4}-4a=\frac{1}{2}$.

Así pues, si $a=-\frac{1}{16}$ y $b=\frac{1}{2}$, la función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\le -2 \\ \dfrac{-x^2}{16}+\dfrac{1}{2} & \text{si } -2<x<2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

b) Como la función $f(x)$ es positiva en todo $\mathbb{R}$, el área pedida coincide con esta integral definida:

$$A=\int_1^2\left(\frac{-x^2}{16}+\frac{1}{2}\right)dx+\int_2^3\left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\frac{-x^3}{48}+\frac{x}{2}\right]_1^2+\left[\frac{-2}{x^3}\right]_2^3=\frac{17}{48}+\frac{1}{6}=\frac{25}{48}\ \text{u}^2.$$

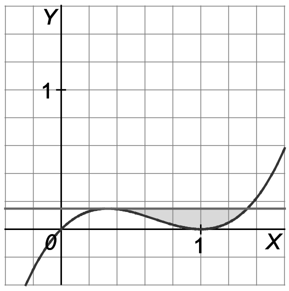
84. **Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, y la recta tangente a dicha gráfica en el máximo relativo.**

Representa gráficamente la función hallando los puntos de corte con los ejes y los extremos relativos.

La función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$ corta al eje Y en el punto $O(0,0)$ y al eje X en los puntos $O(0,0)$ y $A(1,0)$.

La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ y se anula si $x = 1$ o si $x = \frac{1}{3}$.

$B\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ es un máximo y $A(1,0)$ es un mínimo.



La recta tangente en el máximo es $y = \frac{4}{27}$. Para hallar los puntos de corte de dicha tangente con la gráfica de la función, se resuelve la ecuación $x^3 - 2x^2 + x = \frac{4}{27}$, cuyas soluciones son $x = \frac{1}{3}$ y $x = \frac{4}{3}$. El recinto está limitado superiormente por la recta e inferiormente por la cúbica.

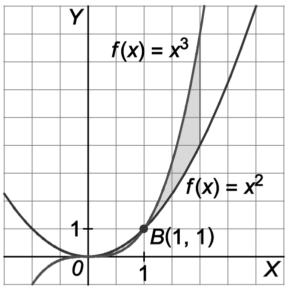
$$A = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} \left(\frac{4}{27} - (x^3 - 2x^2 + x)\right)dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} \left(-x^3 + 2x^2 - x + \frac{4}{27}\right)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{4x}{27}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{12} \text{ u}^2.$$

85. **Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$, halla el área encerrada por las gráficas de *f*, de *g* y de la recta $x = 2$.**

Las dos funciones se cortan en los puntos $A(0,0)$ y $B(1,1)$.

Debemos hallar el área del recinto limitado superiormente por $g(x) = x^3$ e inferiormente por $f(x) = x^2$, entre $x = 1$ y $x = 2$.

El área la da la integral: $A = \int_1^2 (x^3 - x^2)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{17}{12}$ u^2

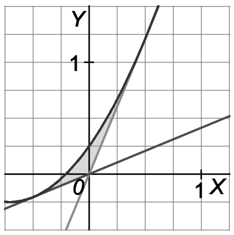


86. **Sea la función definida por $f(x) = x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4}$.**

a) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de *f* y sus tangentes en los puntos de abscisa $x_0 = \frac{1}{2}$ y $x_1 = -\frac{1}{2}$.

b) Prueba que el eje de ordenadas divide el recinto anterior en dos que tienen igual área.

a) La ecuación de la tangente en el punto de abscisa $x_0 = \frac{1}{2}$ es $y = \left(1 + \sqrt{2}\right)x$ y la de la tangente en el punto de abscisa $x_1 = -\frac{1}{2}$ es $y = \left(-1 + \sqrt{2}\right)x$.



b) Si $x < 0$, el área es:

$$A = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4} - (-1 + \sqrt{2})x\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = \frac{1}{24} \text{ u}^2$$

Si $x > 0$, el área es: $A = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4} - (1 + \sqrt{2})x\right)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}$ u^2

87. **a)** Halla el área del triángulo formado por el eje X y las rectas tangente y normal a la curva $y = e^{-x}$ en el punto de abscisa $x = -1$.

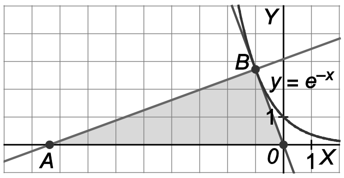
b) Halla el área de la región limitada por la curva de ecuación $y = e^{-x}$ y el eje X para los valores $-1 \le x \le 0$.

a) La derivada de $f(x) = e^{-x}$ es $f'(x) = -e^{-x}$. La recta tangente a $f(x) = e^{-x}$ en el punto de abscisa $x = -1$ es $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$, es decir: $y = -ex$.

La recta normal es $y - f(-1) = \dfrac{-1}{f'(-1)}(x+1)$, es decir: $y = \dfrac{1}{e}x + \dfrac{1}{e} + e$.

Así pues, estas rectas cortan al eje de abscisas en los puntos de abscisas $x = 0$, $x = -e^2 - 1$, respectivamente, con lo que la base del triángulo en cuestión es $e^2 + 1$ y su altura e.

Su área es $\dfrac{e^3 + e}{2}$ u^2.

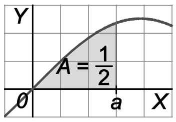


b) La región está situada por encima del eje X.

Su área es el valor de la integral: $A = \displaystyle\int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0} = -1 + e = e - 1$ u^2

88. **Calcular $a > 0$ para que el área encerrada por la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$, el eje $y = 0$, y la recta $x = a$, sea $\frac{1}{2}$.**

$$\int_0^a \operatorname{sen} x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^a = -\cos a + \cos 0 = -\cos a + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{\pi}{3}$$



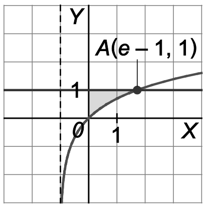
89. **Sea $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \ln(x+1)$.**

a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje Y y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte de las gráficas.

b) Halla el área del recinto anterior.

a) La gráfica de $f(x) = \ln(x+1)$ es la gráfica del $g(x) = \ln x$ desplazada hacia su izquierda una unidad. Su dominio es $D(f) = (-1, +\infty)$, es siempre creciente y tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

Los puntos de corte con $y = 1$, se calculan resolviendo la ecuación $\ln(x+1) = 1$, es decir. $x + 1 = e$, $x = e - 1$. El único punto de corte es $A(e-1, 1)$.



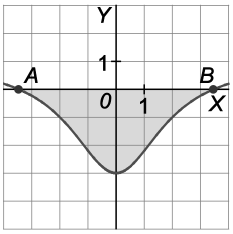
b) El área del recinto pedido nos lo da el valor de la integral $A = \displaystyle\int_0^{e-1} [1 - \ln(x+1)]\,dx$. Calculemos primero $\displaystyle\int \ln(x+1)\,dx$ por partes: $f(x) = \ln(x+1)$, $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g'(x) = 1$, $g(x) = x$

$$\int \ln(x+1)\,dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}\,dx = x\ln(x+1) - \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) =$$

$= (x+1)\ln(x+1) - x + C$ Por tanto, el área es:

$$A = \int_0^{e-1} [1 - \ln(x+1)]\,dx = \left[x - ((x+1)\ln(x+1) - x)\right]_0^{e-1} = \left[2x - (x+1)\ln(x+1)\right]_0^{e-1} = e - 2 \text{ u}^2$$

90. **Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-12}{x^2+4}$, calcula el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje *X*.**



La función corta al eje *X* en los puntos $A\left(-\sqrt{12},0\right)=A\left(-2\sqrt{3},0\right)$ y $B(2\sqrt{3},0)$.

El recinto está por debajo del eje *X*; además la función es simétrica respecto del eje *Y*, así pues, el área de la región viene dada por: $A=2\left(-\int_0^{2\sqrt{3}}\dfrac{x^2-12}{x^2+4}dx\right)$

Se calcula esa integral:

$$\int\frac{x^2-12}{x^2+4}dx=\int\left(1-\frac{16}{x^2+4}\right)dx=\int dx-8\int\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx=x-8\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

$$A=2\left(-\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{x^2-12}{x^2+4}dx\right)=-2\left[x-8\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{2\sqrt{3}}=-2\left(2\sqrt{3}-\frac{8\pi}{3}\right)=\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}\ \text{u}^2$$

91. **a)** Halla la recta tangente a la curva de ecuación $y=x^3-3x$ en el punto de abscisa $x=-1$.

b) Dibuja el recinto limitado por dicha recta tangente y la curva dada y calcula el área.

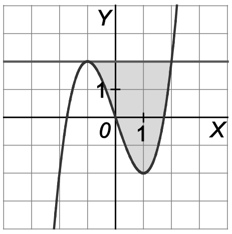
a) La derivada de ecuación $y=x^3-3x$ es $f'(x)=3x^2-3$.

La ecuación de la recta tangente es $y-f(-1)=f'(-1)\left(x-(-1)\right)$, es decir, $y=2$.

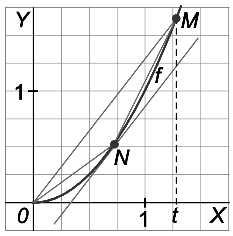
b) Los puntos de corte de la curva $y=x^3-3x$ y la recta $y=2$ se obtienen resolviendo la ecuación $x^3-3x=2\Rightarrow x^3-3x-2=0\Rightarrow(x+1)^2(x-2)=0$:

$A(-1,2)$ y $B(2,2)$ son los puntos de corte.

$$A=\int_{-1}^{2}\left(2-\left(x^3-3x\right)\right)dx=\left[\frac{-x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}=6-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{4}\ \text{u}^2$$



92. Sea $f(x) = x^2$, calcula en función de *t* el área limitada por la parábola y la cuerda *OM*. Sean *N* el punto de la parábola en el que la tangente es paralela a dicha cuerda. Demuestra que sea cual sea el valor de *t*, el área del segmento parabólico es $\frac{4}{3}$ del área del triángulo *OMN*.



El punto *M* tiene por coordenadas $M(t,t^2)$, así pues, la pendiente de *OM* es $\frac{t^2}{t} = t$.

La recta tangente en el punto $N(n,n^2)$ tiene, pues, pendiente *t*, así pues, $f'(n) = t$, es decir, $2n = t$ y, por tanto, $n = \frac{t}{2}$. El punto *N* es $N\left(\frac{t}{2},\frac{t^2}{4}\right)$. La recta que contiene a *OM* tiene por ecuación $y = tx$, así pues, el segmento parabólico tiene un área de:

$$A_1 = \int_0^t (tx - x^2)dx = \left[\frac{tx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^t = \frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{6} \text{ u}^2$$

Hallemos ahora el área del triángulo *OMN*.

Tomamos como base el segmento *OM*, cuya longitud es $\sqrt{(t^2)^2 + t^2} = t\sqrt{t^2+1}$.

La altura, *h*, del triángulo *OMN* mide $h = d(N,OM) = d\left(\left(\frac{t}{2},\frac{t^2}{4}\right), tx - y = 0\right) = \frac{\left|\frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{4}\right|}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{t^2}{4\sqrt{t^2+1}}$.

El área del triángulo es: $A_2 = \dfrac{t\sqrt{t^2+1}\,\frac{t^2}{4\sqrt{t^2+1}}}{2} = \frac{t^3}{8}$ u^2. Así pues, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{4}{3}$, de donde $A_1 = \frac{4}{3}A_2$, como se quería probar.

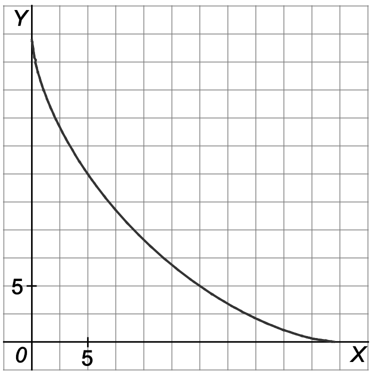
Aplicaciones de la integral

93. Un móvil se desplaza con la ecuación de movimiento $y = \sqrt{(t+1)^3}$, donde *t* representa el tiempo. Calcula el espacio recorrido en el intervalo de tiempo $[0,3]$.

$$S = \int_0^3 \sqrt{(x+1)^3}\,dx = \left[\frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5}\right]_0^3 = \frac{2}{5}\sqrt{4^5} - \frac{2}{5}\sqrt{1^5} = \frac{64}{5} - \frac{2}{5} = \frac{62}{5} \text{ u}$$

94. Esboza la gráfica de la función $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 9$ y halla la longitud de dicha curva entre $x = 1$ y $x = 27$.

Se expresa la función de la curva de manera explícita, es decir, despejando y: $y^{\frac{2}{3}} = 9 - x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y = \left(9 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.



Su derivada es $y' = \frac{3}{2}\left(9 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$.

$(y')^2 = \frac{9 - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$, $1 + (y')^2 = \frac{9}{x^{\frac{2}{3}}}$, $\int \sqrt{1 + (y')^2}dx = \int \frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}dx = \frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2}$.

La longitud del tramo de curva pedido es:

$$L = \int_1^{27} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \left[\frac{9\sqrt[3]{x^2}}{2}\right]_1^{27} = \frac{9}{2}(9 - 1) = 36 \text{ u}$$

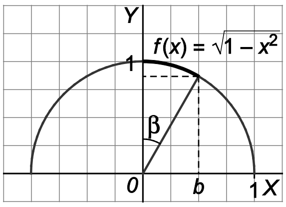
95. Dada $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ calcula la longitud del arco de curva entre $x = 0$ y $x = b$ donde $b < 1$.

Representa gráficamente dicha función, calcula geométricamente la longitud de dicho arco y observa la igualdad de los resultados obtenidos.

La derivada de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

La longitud pedida es:

$$L_0^b = \int_0^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx = \int_0^b \sqrt{1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right]^2}\, dx = \int_0^b \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\, dx = \int_0^b \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}\, dx = \left[\operatorname{arcsen} x\right]_0^b = \operatorname{arcsen} b \text{ u}$$



La gráfica de la función es una semicircunferencia y la longitud del arco pedido es justamente el arco que corresponde al ángulo β que es precisamente el ángulo cuyo seno es b, es decir, el arco seno de b.

96. Calcula la longitud de los siguientes arcos de curva:

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}\,(4x-3)}{6}$ en $[1,9]$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^4}{8}+\dfrac{1}{4x^2}$ en $[1,3]$

a) La derivada de la función $f(x)=\dfrac{1}{6}\sqrt{x}\,(4x-3)$ es $f'(x)=\dfrac{4x-1}{4\sqrt{x}}$.

La longitud pedida es $L_1^9=\int_1^9\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx=\int_1^9\sqrt{1+\left[\dfrac{4x-1}{4\sqrt{x}}\right]^2}\,dx=\int_1^9\sqrt{\dfrac{(4x+1)^2}{16x}}\,dx=\int_1^9\dfrac{4x+1}{4\sqrt{x}}dx$

Esa última integral la calcularemos mediante un cambio de variable:

$g(x)=\sqrt{x}=t\,,\ g'(x)dx=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}=dt\Rightarrow dx=2\sqrt{x}dt=2tdt$

$$\int\frac{4x+1}{4\sqrt{x}}dx=\int\frac{4t^2+1}{4t}2t\,dt=\int\frac{4t^2+1}{2}dt=\int\left(2t^2+\frac{1}{2}\right)dt=\frac{2t^3}{3}+\frac{t}{2}=\frac{2\left(\sqrt{x}\right)^3}{3}+\frac{\sqrt{x}}{2}+C$$

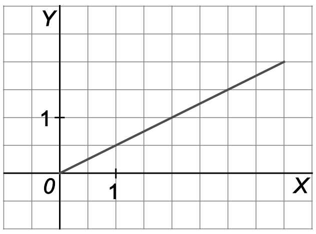
Por tanto, $L_1^9=\int_1^9\dfrac{4x+1}{4\sqrt{x}}dx=\left[\dfrac{2\left(\sqrt{x}\right)^3}{3}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right]_1^9=\dfrac{55}{3}$ u

b) La derivada de la función $f(x)=\dfrac{x^4}{8}+\dfrac{1}{4x^2}$ es $f'(x)=\dfrac{4x^3}{8}+\dfrac{-8x}{16x^4}=\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{1}{2x^3}=\dfrac{x^6-1}{2x^3}$.

La longitud pedida es $L_1^3=\int_1^3\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx=\int_1^3\sqrt{1+\left[\dfrac{x^6-1}{2x^3}\right]^2}\,dx=\int_1^3\sqrt{\dfrac{\left(x^6+1\right)^2}{4x^6}}\,dx=\int_1^3\dfrac{x^6+1}{2x^3}dx=$

$=\int_1^3\left(\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{1}{2x^3}\right)dx=\left[\dfrac{x^4}{8}-\dfrac{1}{4x^2}\right]_1^3=\dfrac{92}{9}$ u.

97. Halla el volumen del cono que se obtiene al girar alrededor del eje *X* la región comprendida entre dicho eje y el segmento de la figura. Comprueba el resultado.



Se trata de hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar $y=\dfrac{x}{2}$ alrededor del eje *X*.

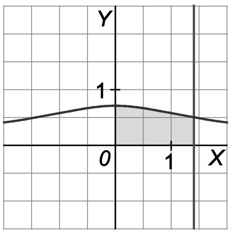
Se sabe que dicho volumen es igual a: $V=\int_0^4\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2dx=\pi\int_0^4\dfrac{x^2}{4}dx=\pi\left[\dfrac{x^3}{12}\right]_0^4=\pi\dfrac{4^3}{12}=\dfrac{16\pi}{3}$ u^3

El sólido que se forma es un cono de radio 2 y altura 4. Su volumen es: $V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 4=\dfrac{16\pi}{3}$ u^3

98. Calcula el volumen del cuerpo que se obtiene al girar la región entre el eje *X* y la gráfica de $y = \dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}$, en torno al eje *X* y entre las rectas $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$.

Se trata de hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar $y = \dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}$ alrededor del eje *X*.

Se sabe que dicho volumen es igual a: $V = \int_0^{\sqrt{2}} \pi\left(\dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right)^2 dx = \pi\int_0^{\sqrt{2}} \dfrac{1}{2+x^2}dx$



Se calcula esta integral que va a dar lugar a una arco tangente.

$$\int \frac{1}{2+x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

El volumen es: $V = \pi\int_0^{\sqrt{2}} \dfrac{1}{2+x^2}dx = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}\left[\text{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}\cdot(\text{arctg}1 - \text{arctg}0) = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{8}$ u^3

99. Halla el volumen engendrado por la región plana definida por el eje *X*, la curva de ecuación $y = e^{-x}$, el eje *Y* y la recta $x = 3$ al girar alrededor del eje *X*.

$$V = \int_0^3 \pi\left(e^{-x}\right)^2 dx = \pi\int_0^3 e^{-2x}dx = \pi\left[\frac{-e^{-2x}}{2}\right]_0^3 = \pi\left(\frac{-e^{-6}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e^6}\right) \text{ u}^3.$$

100. Calcula el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje *X* el recinto limitado por la gráfica de $f(x) = \ln(x)$, y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = e$.

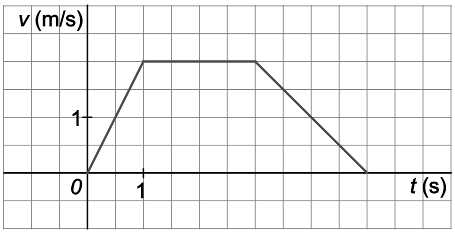
El volumen nos lo da la integral $\int_1^e \pi(\ln x)^2 dx = \pi\int_1^e (\ln x)^2 dx$.

La integral $\int (\ln x)^2 dx$ la calculamos por partes: $f(x) = (\ln x)^2$, $f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$, $g'(x) = 1$, $g(x) = x$

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int \frac{2\ln x}{x}x\,dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx = x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) = x\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right)$$

$$V = \int_1^e \pi(\ln x)^2 dx = \pi\int_1^e (\ln x)^2 dx = \pi\left[x\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right)\right]_1^e = (e-2)\pi \simeq 2{,}26 \text{ u}^3.$$

101. La velocidad de un móvil que parte del origen viene en m/s por la gráfica:



a) Calcula la función que da el espacio recorrido en función del tiempo y esboza su gráfica.

b) Prueba que el área bajo la curva que da la velocidad coincide con el espacio total recorrido.

a) La función espacio recorrido es una primitiva de la velocidad, puesto que la velocidad es la derivada del espacio. Observando la gráfica, la función velocidad es continua y está definida a trozos por la siguiente expresión: $v(t)=\begin{cases} 2t & \text{si } 0\le t<1 \\ 2 & \text{si } 1\le t\le 3 \\ -t+5 & \text{si } 3<t\le 5 \end{cases}$

Por tanto, el espacio recorrido será: $s(t)=\begin{cases} t^2+A & \text{si } 0\le t<1 \\ 2t+B & \text{si } 1\le t\le 3 \\ \dfrac{-t^2}{2}+5t+C & \text{si } 3<t\le 5 \end{cases}$

Falta calcular los valores de los parámetros A, B y C:

Como $s(0)=0$, entonces, $A=0$. Además, por continuidad:

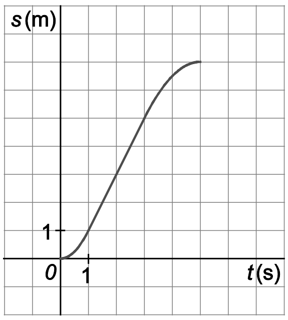
$\lim\limits_{x\to 1^-} s(t)=\lim\limits_{x\to 1^-} t^2=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} s(t)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2t+B)=2+B$, $f(1)=2+B$.

Así pues, $2+B=1$, es decir, $B=-1$.

$\lim\limits_{x\to 3^-} s(t)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2t+B)=6-1=5$, $\lim\limits_{x\to 3^+} s(t)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{-t^2}{2}+5t+C\right)=\dfrac{21}{2}+C$, $f(3)=5$.

Así pues, $\dfrac{21}{2}+C=5\Rightarrow C=-\dfrac{11}{2}$. La función espacio recorrido es: $s(t)=\begin{cases} t^2 & \text{si } 0\le t<1 \\ 2t-1 & \text{si } 1\le t\le 3 \\ \dfrac{-t^2}{2}+5t-\dfrac{11}{2} & \text{si } 3<t\le 5 \end{cases}$

cuya gráfica es:



b) El espacio total recorrido es $s(5)=7$ m.

El área bajo la curva de la velocidad es la de un trapecio de altura 2 y bases 5 y 2, es decir, $A=\dfrac{5+2}{2}\cdot 2=7$ u^2.

102. La densidad de población en miles de habitantes por km^2 en una ciudad depende de la distancia *r* en kilómetros a su centro de acuerdo a $f(r) = 3e^{-\frac{r}{3}}$.

a) ¿Cuántas personas viven a menos de 5 km del centro?

b) ¿Cuántas viven entre 5 y 10 km del centro?

Primero calculamos la integral $\int 2\pi r 3e^{-\frac{r}{3}}dr = 6\pi\int re^{-\frac{r}{3}}dr$ por partes:

$f(r) = r$ $\quad f'(r) = 1$ $\quad g'(r) = e^{-\frac{r}{3}}$ $\quad g(r) = -3e^{-\frac{r}{3}}$

$$6\pi\int re^{-\frac{r}{3}}dr = 6\pi\left(-3re^{-\frac{r}{3}} - \int -3e^{-\frac{r}{3}}dr\right) = 6\pi\left(-3re^{-\frac{r}{3}} - 9e^{-\frac{r}{3}}\right) + C = -18\pi\left(e^{-\frac{r}{3}}(r+3)\right) + C$$

a) $\int_0^5 2\pi r 3e^{-\frac{r}{3}}dr = -18\pi\left[\left(e^{-\frac{r}{3}}(r+3)\right)\right]_0^5 \simeq 84{,}201$ miles de habitantes, es decir, 84 201 habitantes.

b) $\int_5^{10} 2\pi r 3e^{-\frac{r}{3}}dr = -18\pi\left[\left(e^{-\frac{r}{3}}(r+3)\right)\right]_5^{10} \simeq 59{,}220$ miles de habitantes, es decir, 59 220 habitantes.

Síntesis

103. Dada la función $F(x) = \int_0^x (t^2-1)e^{-t^2}dt$, con dominio $\mathbb{R}$:

a) Calcula $F'(x)$, estudia el crecimiento de $F(x)$ y halla las abscisas de sus máximos y mínimos relativos.

b) Calcula $F''(x)$, estudia la concavidad y convexidad de $F(x)$ y halla las abscisas de sus puntos de inflexión.

a) $F'(x) = (x^2-1)e^{-x^2}$. Esta derivada, $F'(x)$, se anula si $x = -1$ o $x = 1$. Se estudia su signo:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Signo de F'	$+$	$-$	$+$
Comportamiento de *F*	Creciente	Decreciente	Creciente

Máximo relativo en $x = -1$. Mínimo relativo en $x = 1$

b) La derivada segunda de *F* es $F''(x) = 2x(2-x^2)e^{-x^2}$, que se anula si $x = 0$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$:

x	$(-\infty,-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},0)$	$(0,\sqrt{2})$	$(0,\sqrt{2})$
Signo de F''	$+$	$-$	$+$	$-$
Comportamiento de *F*	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava Hacia arriba	Cóncava hacia abajo

Puntos de inflexión en $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{2}$.

104. Calcula el valor de la integral $\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \operatorname{sen} x\, dx$.

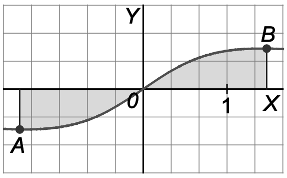
$$\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \operatorname{sen}x dx = \int_{-\pi}^{0} -x\operatorname{sen}x dx + \int_0^{2\pi} x\operatorname{sen}x dx = [x\cos x - \operatorname{sen}x]_{-\pi}^{0} + [-x\cos x + \operatorname{sen}x]_0^{2\pi} = -\pi - 2\pi = -3\pi$$

105. Dada la función $y = \dfrac{x}{x^2+2}$, calcula el área encerrada por la curva, el eje de abscisas y las rectas perpendiculares al eje *X* que pasan por el máximo y el mínimo de la función dada.

La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{2-x^2}{\left(x^2+2\right)^2}$, que se anula si $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$.

Estudiando el signo de la derivada: $A\left(-\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ es mínimo y $B\left(\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ es máximo.

El recinto está comprendido entre $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$.



La función es simétrica respecto del origen. Por tanto, el área pedida es igual a:

$$A = 2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{x^2+2}dx = \left[\ln\left(x^2+2\right)\right]_0^{\sqrt{2}} = \ln 4 - \ln 2 = \ln\frac{4}{2} = \ln 2 \ \text{u}^2.$$

106. Sea $F(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

a) Prueba que *F* es continua en $\mathbb{R}$.

b) Estudia si existe $F'(x)$ si $x \neq 0$ y si *F* es derivable en $x = 0$.

c) Estudia la continuidad de $F'(x)$.

a) El único punto problemático sería $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} F(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{x^2}}{1} = 1$. Finalmente, como $F(0) = 1$, *F* es continua en $x = 0$.

b) Si $x < 0$, $F'(x) = -\operatorname{sen} x$. Si $x > 0$, $F'(x) = \left(\dfrac{\int_0^x e^{t^2}}{x}\right)'$, que existe por tratarse de dos funciones derivables y no anularse el denominador.

Para estudiar si *F* es derivable en $x = 0$ se calculan las derivadas laterales en $x = 0$, $F'\left(0^-\right) = -\operatorname{sen} 0 = 0$ pues si $x < 0$, $F(x) = \cos x$.

$$F'\left(0^+\right) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_0^h e^{t^2}dt - h}{h^2} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{h^2} - 1}{2h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2he^{h^2}}{2} = 0$$

Así pues, *F* es derivable en 0 y $F'(0) = 0$.

c) $F'(x)=\begin{cases}-\operatorname{sen}x & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ \dfrac{xe^{x^2}-\int_0^x e^{t^2}\,dt}{x^2} & \text{si } x>0\end{cases}$. Por un lado, F' es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$. Se estudia la continuidad de F' en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}F'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^{x^2}-\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}-e^{x^2}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}xe^{x^2}=0$$

$\lim\limits_{x\to 0^-}F'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-\operatorname{sen}x)=0$ y $F'(0)=0$, resulta que F' es continua en $x=0$ y, por tanto, es continua en $\mathbb{R}$.

107. a) Encuentra una primitiva de $f(x)=\dfrac{6}{x^2+2x-8}$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)$, el eje X y las rectas $x=-2$ y $x=0$.

a) Debemos descomponer en fracciones simples la función racional dada:

$$\frac{6}{x^2+2x-8}=\frac{6}{(x+4)(x-2)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x+4)}{(x+4)(x-2)}$$

Si $x=-4$, obtenemos que $A=-1$. Si $x=2$, obtenemos que $B=1$. Por tanto:

$$f(x)=\frac{6}{x^2+2x-8}=\frac{-1}{x+4}+\frac{1}{x-2}$$

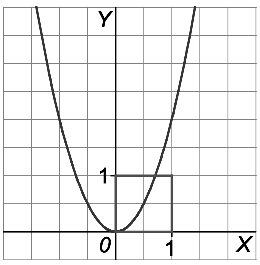
$$\int\frac{6}{x^2+2x-8}dx=\int\left(\frac{-1}{x+4}+\frac{1}{x-2}\right)dx=-\ln|x+4|+\ln|x-2|+C$$

b) Como la función $f(x)$ es negativa en el intervalo $(-4,2)$, el recinto se halla por debajo del eje de abscisas y su área nos la da la integral: $A=\displaystyle\int_{-2}^{0}\left|\frac{6}{x^2+2x-8}\right|dx=\Big[\big|-\ln|x+4|+\ln|x-2|\big|\Big]_{-2}^{0}=2(\ln 4-\ln 2)=2\ln 2\ \text{u}^2$

108. La curva $y=2x^2$ divide al cuadrado de vértices $V_1(0,0)$, $V_2(1,0)$, $V_3(1,1)$ y $V_4(0,1)$ en dos recintos. Dibújalos y halla el área del recinto mayor.

La abscisa del punto de intersección de la parábola y el segmento V_3V_4 es $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Por tanto, el área del recinto de la izquierda viene dada por la integral:



$$A_1=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-2x^2)dx=\left[x-\frac{2x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{3}\simeq 0{,}4714\ \text{u}^2.$$

El área del recinto de la derecha es $A_2=1-A_1\simeq 1-0{,}4714=0{,}5286\ \text{u}^2$.

Con lo cual, el recinto mayor es el de la derecha.

109. Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el área de la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = a$ sea igual a $\frac{4}{3}$ de unidades de superficie.

El área nos la da la integral $A = 2\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)dx = 2\left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} = 2\left[a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3}\right] = 2\frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{4}{3}a\sqrt{a} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = 1$, y como ha de ser igual a $\frac{4}{3}$, concluimos que $a = \sqrt[3]{4}$.

110. Calcula el volumen del paraboloide de revolución que se obtiene al girar la región comprendida entre la parábola $y = x^2$ y el eje horizontal, alrededor del eje X desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

Se sabe que dicho volumen es igual a: $V = \int_0^4 \pi\left(x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^4 x^4\, dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^4 = \frac{1024\pi}{5}$ u^3.

CUESTIONES

111. ¿Cuál es el valor de $\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{\left(x^2+1\right)} dx$?

$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\left(x^2+1\right)^7}$ es una función impar pues $f(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\left((-x)^2+1\right)^7} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\left(x^2+1\right)^7} = -f(x)$, así que $\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{\left(x^2+1\right)^7} dx = 0$.

112. Sea $f:[-2,2] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = \int_{1}^{2} f(t)dt$.

¿Se puede asegurar que existen b y c en $[-2,2]$ tales que $b \le -1$, $c \ge 1$ y $f(b) = f(c)$? Justifica la respuesta.

Por el teorema del valor medio se sabe que:

A) Existe un número c del intervalo $[1,2]$ que cumple $\int_1^2 f(t)dt = f(c)(2-1) = f(c)$.

B) Existe un número b del intervalo $[-2,-1]$ que cumple $\int_{-2}^{-1} f(t)dt = f(b)(-1-(-2)) = f(b)$.

Como ambas integrales son iguales, se concluye que, en efecto, existen b y c en $[-2,2]$ con $b \le -1$, $c \ge 1$ y $f(b) = f(c)$.

113. ¿Qué número es mayor, $\int_1^2 \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} dx$ o $\int_1^2 \frac{\text{sen}\, x}{x} dx$?

En el intervalo $[1,2]$, sen x es positivo y como sen $x \le 1$, tenemos que sen$^2 x \le$ sen x.

Por otra parte, en dicho intervalo, $x \le x^2$, así que $\frac{\text{sen}^2 x}{x^2} \le \frac{\text{sen}\, x}{x}$ por lo que $\int_1^2 \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} dx \le \int_1^2 \frac{\text{sen}\, x}{x} dx$, de hecho es estrictamente menor pues la función $f(x) = \frac{\text{sen}\, x}{x} - \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}$ es continua en $[1, 2]$, $f(x) \ge 0$, y no es idénticamente nula por lo que $\int_1^2 \left(\frac{\text{sen}\, x}{x} - \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} \right) dx > 0$, es decir, $\int_1^2 \frac{\text{sen}\, x}{x} dx > \int_1^2 \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} dx$.

114. Demuestra la igualdad $\int_0^b f(x) dx = \int_0^b f(b - x) dx$. Para ello, realiza el cambio $t = b - x$.

Se utiliza el teorema de sustitución en integrales definidas llamando $g(x) = b - x$ y entonces $g'(x) = -1$.

$$\int_0^b f(b-x)dx = -\int_0^b f(g(x))g'(x))dx = -\int_{g(0)}^{g(b)} f(t)dt = -\int_b^0 f(t)dt = \int_0^b f(t)dt = \int_0^b f(x)dx .$$

115. Razona si son ciertas o no las siguientes afirmaciones.

a) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

b) $\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$

c) Si $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces $a = b$.

d) Si $\int_a^b f(x)dx = 0$ y $f(x) > 0$ para todo x, entonces $a = b$.

e) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

a) Es verdadera. Es la propiedad 6 de la integral definida.

b) Es falsa. Por ejemplo, $\left(\int_0^2 1x\, dx = 2 \right) \ne \left(\int_0^2 1 dx \cdot \int_0^2 x\, dx = 2 \cdot 2 = 4 \right)$.

c) Es falsa. Por ejemplo, $\int_{-1}^{1} x\, dx = 0$.

d) Es verdadera. Si la función es positiva en $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\, dx$ mide el área bajo la curva, así pues, esa área solo puede ser cero si $a = b$.

e) Es verdadera. Es la propiedad 4 de la integral definida.

116. Sea $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ con a > 0, continua y tal que $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

a) ¿Es necesariamente $f(x)=0$ para todo x de $[-a,a]$?

b) ¿Es necesariamente $\int_{-a}^{a}|f(x)|dx = 0$? ¿Y $\int_{-a}^{a}|f(-x)|dx = 0$?

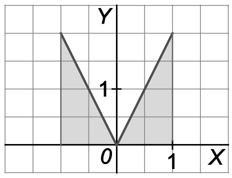
c) Calcula $\int_{-a}^{a}(f(x)+2x)dx$.

Supongamos que f sea una función impar, por ejemplo, $f(x)=2x$ y $a=1$. Así pues $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-1}^{1} 2x\,dx = 0$.

a) Ciertamente no es necesario, que como acabamos de ver, por ejemplo, $f(x)=2x$.

b) Obviamente tampoco pues en nuestro caso

$\int_{-1}^{1}|f(x)|dx$ es el área sombreada que obviamente no es cero.



Tampoco $\int_{-a}^{a}|f(-x)|dx = 0$ En nuestro caso $f(-x)=-2x$,

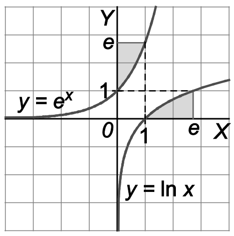
por lo que $\int_{-1}^{1}|-2x|dx$ vuelve a ser el área rayada, obviamente no cero.

c) $\int_{-a}^{a}(f(x)+2x)dx = \int_{-a}^{a} f(x)dx + \int_{-a}^{a} 2x\,dx = 0 + \left[x^2\right]_{-a}^{a} = 0+0=0$.

117. Para calcular $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2-4}dx$, un amigo te sugiere que pongas $x=\frac{2}{\cos t}$. ¿Le harías caso?

Con amigos así no hacen falta enemigos, pues si x está en $[-1,1]$, es imposible que $x=\frac{2}{\cos t}$ ya que $\left|\frac{2}{\cos t}\right|\ge 2$ así que $|x|\ge 2$, o sea, no estaría en $[-1,1]$.

118. Para calcular $\int_{1}^{e}\ln x\,dx$, si no se quiere integrar por partes, se puede utilizar el dibujo de la derecha. Justifica esta afirmación y calcula dicha integral.



Como las funciones $y=e^x$, $y=\ln x$ son inversas la una de la otra, sus gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante por lo que las áreas sombreadas son iguales, así que:

$$\int_{1}^{e}\ln x\,dx = e\cdot 1 - \int_{0}^{1} e^x\,dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = e-(e-1) = 1$$

119. ¿Existe $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\operatorname{sen}\sqrt{t}}{x^3}$?

Dicho límite presenta una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ por lo que, aplicando el teorema de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\operatorname{sen}\sqrt{t}\,dt}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2}\,2x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}x}{x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=\frac{2}{3}.$$

120. Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, integrable y tal que para $x\in[-1,1]$ es $|f(x)|\le 1+x^2$. ¿Cuáles de entre los números –3; –2; –1; 2,5 y 2,75 pueden ser el valor de $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$?

Como $-(1+x^2)\le f(x)\le 1+x^2$, se tiene que $-\int_{-1}^{1}(1+x^2)\,dx\le\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\le\int_{-1}^{1}(1+x^2)\,dx$.

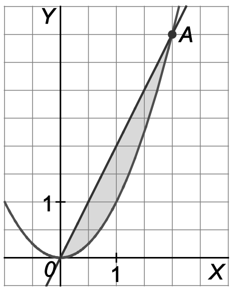
Es decir, $-\dfrac{8}{3}\le\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\le\dfrac{8}{3}$ por lo que solo –2, –1 y 2,5 podrían ser el valor de la integral.

PROBLEMAS

121. Halla el volumen del sólido formado al girar en torno al eje *X* la región bajo la gráfica de $y=\sqrt{\operatorname{sen}x}$ en el intervalo $[0,\pi]$?

$$V=\int_0^{\pi}\pi f^2(x)\,dx=\pi\int_0^{\pi}\operatorname{sen}x\,dx=\pi[-\cos x]_0^{\pi}=2\pi\ \text{u}^3$$

122. Determina el volumen generado al girar respecto al eje de abscisas la región acotada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=2x$.



Ambas gráficas se cortan en los puntos $O(0,0)$ y $A(2,4)$.

La recta va por arriba y la parábola por debajo.

El volumen pedido lo da la integral:

$$V=\int_0^2\pi(2x)^2\,dx-\int_0^2\pi(x^2)^2\,dx=\pi\int_0^2(4x^2-x^4)\,dx=\pi\left[\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{64\pi}{15}\ \text{u}^3.$$

123. Calcula $\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx$ siendo $f(x)=\operatorname{sen}x-\dfrac{1}{2}$.

En el intervalo $[0,\pi]$, $\operatorname{sen}x-\dfrac{1}{2}\ge 0$ si $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$, siendo negativa en el resto.

$$I=\int_0^{\pi}\left|\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\operatorname{sen}x\right)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}\right)dx+\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\operatorname{sen}x\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\operatorname{sen}x\right)dx+\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\operatorname{sen}x\right)dx+\int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\operatorname{sen}x\right)dx=\left[\frac{x}{2}+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\left[\frac{x}{2}+\cos x\right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}+\left[\frac{x}{2}+\cos x\right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi}=$$

$$=\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-1-\frac{5\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}-2.$$

124. La función $\rho(x) = 300\left[2 + \text{sen}\left(4\sqrt{x + 0{,}15}\right)\right]$, da la densidad de coches (en coches por km) en los primeros 20 km de una autovía, siendo *x* la distancia en kilómetros al comienzo de la misma. Calcula el número total de coches en los 20 km.

$$\int_0^{20} \rho(x)dx = \int_0^{20} 300\left(2 + \text{sen}\,4\sqrt{x + 0{,}15}\right)dx = 600\int_0^{20} dx + 300\int_0^{20} \text{sen}\,4\sqrt{x + 0{,}15}\,dx$$

Se cambia de variable: $\sqrt{x + 0{,}15} = t$, $\dfrac{dx}{2\sqrt{x + 0{,}15}} = dt \Rightarrow dx = 2\sqrt{x + 0{,}15}dx = 2t\,dt$

$$\int \text{sen}\ 4\sqrt{x + 0{,}15}\,dx = \int 2t\text{sen}(4t)dt = 2\int t\text{sen}(4t)dt\ ;\ f(t) = t\ ,\ g'(t) = \text{sen}(4t)\ ,\ f'(t) = 1,\ g(t) = -\frac{\cos(4t)}{4}$$

$$2\int t\text{sen}(4t)dt = 2\cdot\left(\frac{-t\cos(4t)}{4} + \frac{1}{4}\int \cos(4t)dt\right) = \frac{-t\cos(4t)}{2} + \frac{\text{sen}(4t)}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \text{sen}\,4\sqrt{x + 0{,}15}\,dx = \frac{-\sqrt{x + 0{,}15}\cos\left(4\sqrt{x + 0{,}15}\right)}{2} + \frac{\text{sen}\left(4\sqrt{x + 0{,}15}\right)}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{20} 300\left(2 + \text{sen}\,4\sqrt{x + 0{,}15}\right)dx = 600\cdot 20 + 300\left[\frac{-\sqrt{x + 0{,}15}\cos\left(4\sqrt{x + 0{,}15}\right)}{2} + \frac{\text{sen}\left(4\sqrt{x + 0{,}15}\right)}{8}\right]_0^{20} \simeq$$

$\simeq 11513$ coches

125. La aceleración en m/s^2 de un móvil con movimiento rectilíneo viene dada en función del tiempo *t* por la expresión $a(t) = 3\cos(2t + 1)$. Si la posición y la velocidad de la partícula en *t* = 0 eran $x(0) = 5$ m y $v(0) = 1$ m/s, respectivamente, determina:

a) La función que da la velocidad del móvil en función de *t*.

b) La función que da la posición del móvil en función de *t*.

a) La velocidad es la integral de la aceleración, así pues:

$$v(t) = \int a(t)dt = \int 3\cos(2t + 1)dt = \frac{3}{2}\int 2\cos(2t + 1)dt = \frac{3}{2}sen(2t + 1) + C$$

Como sabemos que $v(0) = 1$, ya podemos calcular la constante *C*:

$$v(0) = \frac{3}{2}\text{sen}(2\cdot 0 + 1) + C = 1 \Rightarrow C = 1 - \frac{3}{2}\text{sen}1$$

La función velocidad es $v(t) = \frac{3}{2}\text{sen}(2t + 1) + 1 - \frac{3}{2}\text{sen}1$.

b) La posición es la integral de la velocidad, así pues:

$$x(t) = \int v(t)dt = \int\left[\frac{3}{2}\text{sen}(2t + 1) + 1 - \frac{3}{2}\text{sen}1\right]dt = -\frac{3}{4}\cos(2t + 1) + \left(1 - \frac{3}{2}\text{sen}1\right)t + C$$

Como sabemos que $x(0) = 5$, ya podemos calcular la constante *C*:

$$x(0) = -\frac{3}{4}\cos(2\cdot 0 + 1) + \left(1 - \frac{3}{2}\text{sen}1\right)\cdot 0 + C = 5 \Rightarrow C = 5 + \frac{3}{4}\cos 1$$

La función posición es $x(t) = -\frac{3}{4}\cos(2t + 1) + \left(1 - \frac{3}{2}\text{sen}1\right)t + 5 + \frac{3}{4}\cos 1$.

126. Un objeto se mueve sobre una recta debido a la acción de una fuerza F que depende de su posición x a lo largo de dicha recta en la forma, $F(x)=\frac{2}{(x-1)^2}$. El trabajo realizado por F al mover el objeto desde $x=a$ hasta $x=b$ es $W=\int_a^b F(x)dx$.

a) Calcula el trabajo para ir desde $x=3$ hasta $x=5$.

b) Determina si la fuerza $G(x)=\frac{2}{(x^2+1)^2}$ realiza más o menos trabajo que $F(x)$ para el mismo desplazamiento.

a) El trabajo es $W=\int_3^5 \frac{2}{(x-1)^2}dx=\left[\frac{2}{1-x}\right]_3^5=\frac{1}{2}$ J.

b) Al ser ambas fuerzas positivas en $[3,5]$, se pueden identificar los trabajos con las áreas que encierran las fuerzas bajo ellas.

Como $G(x)=\frac{2}{(x^2+1)^2}<\frac{2}{(x-1)^2}=F(x)$ en $[3,5]$, ya que el denominador de $G(x)$ es mayor que el de $F(x)$, se concluye que el trabajo de la fuerza $G(x)$ es menor que el de $F(x)$.

127. Para estudiar la capacidad de memorizar de un niño se usa el siguiente modelo: si x es su edad en años, entonces dicha capacidad viene dada por: $f(x)=1+2x\ln x$ con $0\le x\le 5$.

Calcula el valor medio de la capacidad de memorizar de un niño entre su primer y su tercer cumpleaños.

El teorema del valor medio nos asegura que existe un número c del intervalo $[1,3]$ que cumple $\int_1^3 (1+2x\cdot\ln x)dx=f(c)(3-1)$. El valor $f(c)$ será el valor medio pedido.

Se calcula, pues, el valor de la integral y luego se halla $f(c)$: $\int(1+2x\ln x)dx=\int dx+2\int x\ln x\,dx=x+2\int x\ln x\,dx$.

Esta última integral se calcula por partes:

$$f(x)=\ln x,\ f'(x)=\frac{1}{x},\ g'(x)=x,\ g(x)=\frac{x^2}{2}$$

$$\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{1}{x}\frac{x^2}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)$$

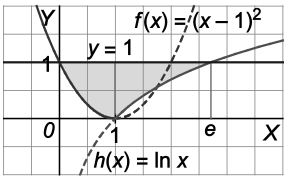
Entonces:

$$\int(1+2x\ln x)dx=x+x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\int_1^3(1+2x\cdot\ln x)\,dx=\left[x+x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]_1^3=7,89\Rightarrow f(c)\cdot 2=7,89\Rightarrow f(c)=3,95$$

es el valor medio de la capacidad de memorizar de un niño entre su primer y tercer cumpleaños.

128. Sea $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{si } x\le 1\\ \ln x & \text{si } x>1\end{cases}$. Dibuja el recinto acotado por la gráfica de $f(x)$ y la recta $y=1$, y determina su área.

La parábola $g(x)=(x-1)^2$ y el logaritmo $h(x)=\ln x$ se cortan en el punto $A(1,0)$ y el recinto, como se aprecia, está formado por dos recintos.



Calculemos sus áreas: $A_1=\int_0^1\left[1-(x-1)^2\right]dx=\int_0^1\left(-x^2+2x\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^1=\frac{2}{3}$ u^2.

$A_2=\int_1^e(1-\ln x)\,dx=\left[x-(x\ln x-x)\right]_1^e=\left[2x-x\ln x\right]_1^e=e-2$ u^2.

El área del recinto es $\frac{2}{3}+e-2=e-\frac{4}{3}$ u^2.

Recuerda que la integral del logaritmo neperiano se calcula por partes: $I=\int\ln x\,dx$.

$$\left.\begin{aligned}u=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx\\ dv=dx\Rightarrow v=\int dx=x\end{aligned}\right\}\Rightarrow I=x\ln x-\int\frac{1}{x}x\,dx=x\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C$$

129. Si $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$, ¿será entonces $\int_{-a}^{a}xf(x)dx=0$? Si es cierto, pruébalo, si es falso confírmalo con un ejemplo.

Es falso: basta que *f* sea impar para que $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$.

Por ejemplo $f(x)=x$, por lo que $\int_{-a}^{a}x\,f(x)dx=\int_{-a}^{a}x^2\,dx\ne 0$.

130. a) Sea g una función derivable que cumple $g(6)=\int_5^6 g(x)dx$. Calcula $\int_5^6 (x-5)g'(x)dx$.

b) Sea f continua y tal que $\int_1^e f(u)du=\frac{1}{2}$. Calcula $\int e^{\frac{x}{2}}f\left(e^{\frac{x}{2}}\right)dx$.

a) Calculamos la integral $\int (x-5)g'(x)dx$ por partes:

$$f(x)=x-5,\ f'(x)=1,\ g'(x)=g'(x),\ g(x)=g(x)$$

$$\int (x-5)g'(x)\,dx=(x-5)g(x)-\int g(x)dx$$

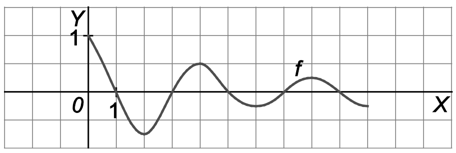
Por tanto, la integral definida pedida es: $\int_5^6 (x-5)g'(x)\,dx=\left[(x-5)g(x)\right]_5^6-\int_5^6 g(x)dx=g(6)-0-g(6)=0$

b) Para calcular $\int_0^2 e^{\frac{x}{2}}f\left(e^{\frac{x}{2}}\right)dx$ empleamos el teorema de sustitución en integrales definidas:

Si f y g' son continuas, entonces $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$.

Así pues: $\int_0^2 f\left(e^{\frac{x}{2}}\right)e^{\frac{x}{2}}\,dx=2\int_0^2 f\left(e^{\frac{x}{2}}\right)\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}dx=2\int_{e^{\frac{0}{2}}}^{e^{\frac{2}{2}}} f(t)\,dt=2\int_1^e f(t)\,dt=2\cdot\frac{1}{2}=1$

131. Sea $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ con f, definida en $[0,10]$, dada en la figura.



a) ¿Tiene g algún máximo o mínimos relativos? ¿Dónde están?

b) ¿En qué valores de x alcanza g el máximo y el mínimo absolutos?

c) ¿En qué intervalo es la gráfica de g cóncava hacia arriba?

d) Esboza la gráfica de g.

Al ser $g'(x)=f(x)$, se ve que $g'(x)=0$ si $x=1$, 3, 5, 7, 9.

a) En los puntos de abscisa 1, 5, 9, $g'(x)$ pasa de ser positiva a negativa, luego g pasa de ser creciente a decreciente, es decir, se trata de máximos relativos.

En los puntos de abscisa 3, 7, $g'(x)$ pasa de ser negativa a positiva, así que en ellos $g(x)$ presenta mínimos relativos.

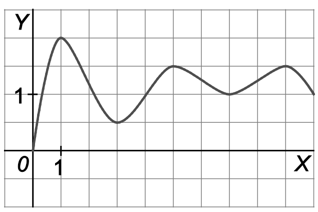
b) Se estudia el valor de g en $x=0$ y $x=10$ y en los puntos del interior en los que se anula la derivada.

$g(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$; $g(1)>0$, $g(3)<g(1)$, $g(5)<g(1)$, $g(7)<g(1)$ pues $g(7)<g(5)$, $g(9)=g(5)$ y $g(10)<g(9)$.

Así pues, el máximo absoluto de g se alcanza en $x=1$. Análogamente, se ve que el mínimo se alcanza en 3.

c) $g''(x)>0$ si $f'(x)>0$ y eso ocurre en $(2,4)\cup(6,8)$.

d)



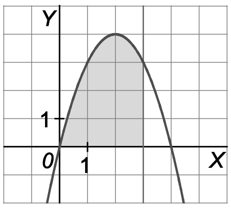
132. Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que $P(0)=P(2)=1$ y que $\int_0^2 P(x)dx=\frac{1}{3}$.

$P(x)=ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$. $P(0)=c=P(2)=4a+2b+c=1$, es decir, $4a+2b=0$ y $c=1$.

Por otra parte, $\int_0^2\left(ax^2+bx+1\right)dx=\frac{1}{3}$, es decir: $a\,\frac{8}{3}+2b+2=\frac{1}{3}$,

Por tanto, si $2a+b=0$ y $\frac{4}{3}a+b=-\frac{5}{6}$, se tiene que $\frac{2}{3}a=\frac{5}{6}$, $a=\frac{5}{4}$, $b=-\frac{5}{2}$, y $P(x)=\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{2}x+1$.

133. En la figura se muestra la parte positiva de la gráfica de $y=4x-x^2$. Encuentra la ecuación de una recta vertical para que el área de la zona sombreada sea de 9 u^2.



$\int_0^a\left(4x-x^2\right)dx=9$, es decir: $\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=9$, $2a^2-\frac{a^3}{3}=9$, $a^3-6a^2+27=0$, $(a-3)\left(a^2-3a-9\right)=0$, $a=3$, pues las otras soluciones no están en $[0,4]$.

La recta buscada es $x=3$.

PARA PROFUNDIZAR

134. Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua tal que si $x\neq 0$, $g(x)=\frac{x}{e^x-1}$ y sea $f(x)=\int_{-x}^{x}g(t)dt$.

Calcula $g(0)$, estudia la continuidad de *f* y obtén $f'(x)$.

Como *g* es continua en 0, se tiene que $g(0)=\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$.

f es continua en $\mathbb{R}$ pues es derivable ya que *g* es continua y, al ser $f(x)=\int_{-x}^{x}g=\int_{-x}^{0}g+\int_0^x g$, se tiene que:

$$f'(x)=\left(-g(-x)\right)(-1)+g(x)=g(-x)+g(x)=\frac{-x}{e^{-x}-1}+\frac{x\left(e^x+1\right)}{e^x-1}$$

135. Sea *f* una función continua y positiva en el intervalo $[0,1]$. Halla razonadamente el número de raíces en $(0,1)$ de la función $F(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_x^1 f(t)dt$.

La función $F(x)$ es continua en $[0,1]$ (pues es derivable), siendo $F(0)=\int_0^0 f-\int_0^1 f=0-\int_0^1 f<0$ pues *f* es positiva en $[0,1]$.

Análogamente, $F(1)=\int_0^1 f-\int_1^1 f=\int_0^1 f-0>0$.

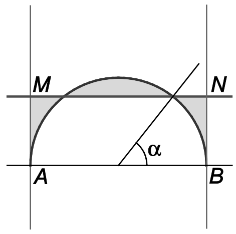
Así pues, *F* tiene al menos una raíz en $(0,1)$.

Se estudia $F'(x)$: $F'(x)=f(x)-f(x)(-1)=2f(x)>0$

Así pues, como $F'(x)$ nunca se hace cero en $(0,1)$, se desprende que *F* no puede tener más de una raíz en dicho intervalo por lo que, junto al argumento anterior, se concluye que solo tiene una raíz.

136. La figura muestra un semicírculo de radio 1, diámetro horizontal *AB* y rectas tangentes en *A* y *B*. ¿A qué distancia del diámetro debe colocarse la recta horizontal *MN* para minimizar el área sombreada?

Hazlo de dos formas: minimizando una función integral y minimizando una función que dependa de α.



Se toma un sistema de ejes perpendiculares con origen en el centro del semicírculo, cuya ecuación sería:

$y=\sqrt{1-x^2}$. Sea $y=k$ la ecuación de la recta *MN* y se escribe el área sombreada en función de *k*.

$$A=2\left[\int_0^{\sqrt{1-k^2}}\sqrt{1-x^2}\,dx-k\sqrt{1-k^2}+k\left(1-\sqrt{1-k^2}\right)-\int_{\sqrt{1-k^2}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\right]=$$

$$=2\left[\int_0^{\sqrt{1-k^2}}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_1^{\sqrt{1-k^2}}\sqrt{1-x^2}\,dx+k-2k\sqrt{1-k^2}\right]=f(k)$$

Para obtener el mínimo valor de $f(x)$, con $k\in[0,1]$, se calcula su derivada respecto de *k*.

$$f'(k)=2\left[k\cdot\frac{(-k)}{\sqrt{1-k^2}}+k\frac{(-k)}{\sqrt{1-k^2}}+1-2\left(\sqrt{1-k^2}-\frac{k^2}{\sqrt{1-k^2}}\right)\right]=2\left[\frac{-2k^2}{\sqrt{1-k^2}}+1-2\sqrt{1-k^2}+\frac{2k^2}{\sqrt{1-k^2}}\right]=$$

$=2\left[1-2\sqrt{1-k^2}\right]$. Así pues, $f'(k)=0$ si $\sqrt{1-k^2}=\frac{1}{2}$, $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Así pues, la recta *MN* se debe situar a una distancia de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ del diámetro *AB.* Se comprueba, posteriormente, que para ese valor de *k*, *f* alcanza el mínimo absoluto.

Se resuelve ahora el problema sin utilizar el cálculo integral, como indica el enunciado. El área sombreada es:

$$2\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\frac{1+1-\cos\alpha}{2}\operatorname{sen}\alpha-\frac{\alpha}{2}\right]=2\left[\frac{\pi}{4}-\alpha+\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]=f(\alpha)\ \text{ con }\ \alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$f'(\alpha)=2[-1+\cos\alpha-\cos 2\alpha]=0$ si $\cos 2\alpha-\cos\alpha+1=0$, es decir, $\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha-\cos\alpha+1=0$, es decir, $2\cos^2\alpha-\cos\alpha=0$. Así pues, $\cos\alpha=0, \cos\alpha=\frac{1}{2}$

Se nota que el valor $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ corresponde al valor de $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$ obtenido por el procedimiento anterior.

Se comprueba que $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ corresponde efectivamente al mínimo absoluto.

Si $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$ y $f(0)=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\simeq 1{,}57$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+1\right]=2\cdot\left[1-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{4-\pi}{2}\simeq 0{,}43$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right]=2\cdot\left[\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}\right]=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\simeq 0{,}34$$

Así pues, el mínimo valor corresponde a $\alpha=\frac{\pi}{3}$ o $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

137. a) Escribe $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ en términos de $\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$.

(Haz $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$ e integra por partes).

b) Utiliza el apartado anterior para demostrar:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$$

c) Si n es un impar positivo, prueba la fórmula de Wallis:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot n}$$

a) $\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + \int (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x\cos^2 x\,dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)dx =$

$= -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx$

$n\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx \Rightarrow \int \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{-1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = \left[-\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x\,\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$, es decir, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx = \frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-4} x\,dx$, es decir: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-4} x\,dx$

Reiterando, si n es un entero positivo impar:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$$

138. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=xe^{1-x}$.

a) Calcula $I_1=\int_0^1 f(x)dx$.

Para cada $n\geq 1$, sea $I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$.

b) Demuestra que si $x\in[0,1]$, entonces $x^n\leq x^n e^{1-x}\leq ex^n$.

c) Calcula $J_n=\int_0^1 x^n\,dx$ y prueba que si $n\geq 1$, entonces $\frac{1}{n+1}\leq I_n\leq\frac{e}{n+1}$. Deduce que I_n no es un número entero.

d) Por integración por partes demuestra que $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$.

e) Sea $k_n=n!e-I_n$, escribe k_{n+1} en función de k_n y prueba que k_n es un número entero para todo *n*.

f) Utilizando c) y d) prueba que $n!e=k_n+I_n$ no es un entero.

g) Demuestra que el número *e* es irracional.

a) $I_1=\int_0^1 xe^{1-x}dx=\left[-xe^{1-x}\right]_0^1+\int_0^1 1\cdot e^{1-x}dx=e-2$

b) Si $x\in[0,1]$, $1\leq e^{1-x}\leq e$, así que $x^n\leq x^n e^{1-x}\leq ex^n$

c) $\frac{1}{n+1}\leq\int_0^1 x^n e^{1-x}\leq e\cdot\frac{1}{n+1}\Rightarrow\frac{1}{n+1}\leq I_n\leq\frac{e}{n+1}$

Por tanto, si $n\geq 2$, es $\frac{1}{3}\leq I_n\leq\frac{e}{3}$, $I_1=e-2$. Luego I_n no es un número entero.

d) $I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}dx=\left[-x^{n+1}\cdot e^{1-x}\right]_0^1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}dx=-1+(n+1)I_n$

e) Por inducción:

Si $n=1$, $k_1=1!e-I_1=e-(e-2)=2$.

Suponiendo que k_n es entero se demuestra para k_{n+1}.

$k_{n+1}=(n+1)!e-I_{n+1}=(n+1)!e-(n+1)I_{n+1}+1=(n+1)[n!e-I_n]+1=(n+1)k_n+1$ es entero.

f) Como, según c), I_n no es entero con $n\geq 1$, sigue que $n!e=k_n+I_n$ no es entero con $n\geq 1$.

g) Si $n!e$ no es entero, *e* es irracional pues, en caso contrario, $e=\frac{a}{b}$, se tomaría $n=b$ y $n!e=b!\frac{a}{b}=(b-1)!a$ sería entero.

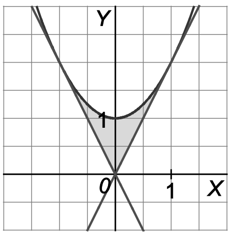
Autoevaluación

Comprueba qué has aprendido

1. En la parábola que corresponde a la función $f(x) = x^2 + a$, siendo *a* un número real, las tangentes en los puntos de abscisas 1 y –1 pasan por el origen de coordenadas.

Obtén *a* y calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y dichas tangentes.

Los puntos de abscisas 1 y -1 tienen ordenada $1 + a$.



Las rectas tangentes en dichos puntos son $y-(1+a)=2(x-1)$ e $y-(1+a)=-2(x+1)$.

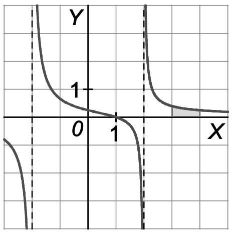
Al pasar por $O(0,0)$, la primera, por ejemplo, es $-(1+a)=-2$, $a=1$.

Así pues, la parábola es $y = x^2 + 1$ y nos piden el área del recinto sombreado.

Área sombreada $= 2\int_0^1 (x^2+1-2x)dx = 2\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$ u^2

2. Calcula el valor del área limitada por la curva $y = \dfrac{x-1}{x^2-4}$, el eje *X* y las rectas $x = 3$ y $x = 4$.

Un esbozo de la región de la que nos piden el área sería la sombreada.



Así que el área pedida es $\int_3^4 \frac{x-1}{x^2-4}dx$.

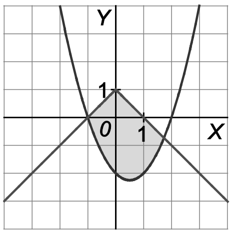
$$\frac{x-1}{x^2-4} = \frac{x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+2)}{x^2-4}$$

Luego $x-1 = A(x-2)+B(x+2)$. Por tanto, si $\begin{cases} x=2 \Rightarrow 1=4B \\ x=-2 \Rightarrow -3=-4A \end{cases}$ por lo que:

$$\int_3^4 \frac{x-1}{x^2-4}dx = \left[\frac{3}{4}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x-2|\right]_3^4 = \frac{3}{4}\ln 6 + \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{3}{4}\ln 5 = \frac{3}{4}\ln\frac{6}{5} + \frac{1}{4}\ln 2 \text{ u}^2$$

3. Obtén el área del recinto acotado limitado por las gráficas de $f(x) = x^2 - x - 2$ y $g(x) = 1 - |x|$.

El recinto del que se pide el área es el sombreado.



Así pues, las coordenadas de los puntos de corte son las soluciones de los sistemas:

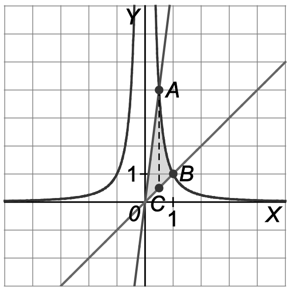
$$\begin{cases} y = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \\ y = x+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = (x+1)(x-2) \\ y = -x+1 \end{cases}$$

que son $x=-1$ y $x=\sqrt{3}$, respectivamente, por lo que el área pedida será:

$$\int_{-1}^0 [x+1-(x+1)(x-2)]dx + \int_0^{\sqrt{3}} [-x+1-(x+1)(x-2)]dx = \int_{-1}^0 (-x^2+2x+3)dx + \int_0^{\sqrt{3}} (-x^2+3)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^3}{3} + 3x\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} - 1 + 3 + \left(-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} + \frac{7}{3} \text{ u}^2$$

4. Dibuja el recinto limitado por las gráficas de las funciones $y=\frac{1}{x^2}$, $y=x$ e $y=8x$ y calcula su área.



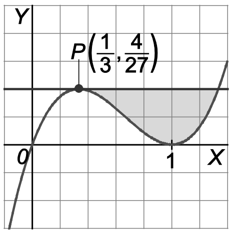
$$A:\begin{cases} y=\frac{1}{x^2} \\ y=8x \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2},4\right);\ B:\begin{cases} y=\frac{1}{x^2} \\ y=x \end{cases} \Rightarrow B(1,1);\ C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Área del triángulo OCA: $\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$ u^2

Área región $ACB=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-x\right)dx=\left[-\frac{1}{x}-\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=-1-\frac{1}{2}+2+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$ u^2

Así que el área del recinto sombreado es $\frac{7}{8}+\frac{5}{8}=\frac{3}{2}$ u^2.

5. Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=x^3-2x^2+x$ y la recta tangente a dicha gráfica en el máximo relativo.



$f'(x)=3x^2-4x+1=0$ si $x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}\Rightarrow x=1, x=\frac{1}{3}$

$f''(x)=6x-4$, $f''\left(\frac{1}{3}\right)<0$ por lo que el máximo relativo es $P\left(\frac{1}{3},f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

Nos piden el área de la región sombreada.

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}$ $\qquad B:\begin{cases} y=x^3-2x^2+x \\ y=\frac{4}{27} \end{cases}$

Resolvemos la ecuación $x^3-2x^2+x-\frac{4}{27}=0$. Sabemos que una solución es $x=\frac{1}{3}$, así que factorizamos como $x^3-2x^2+x-\frac{4}{27}=\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{4}{9}\right)$.

$x^2-\frac{5}{3}x+\frac{4}{9}=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}, x=\frac{4}{3}$ por lo que $B\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ y el área pedida es:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}}\left[\frac{4}{27}-\left(x^3-2x^2+x\right)\right]dx=\left[\frac{4x}{27}-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{4}{3}}=\frac{1}{12}\text{ u}^2$$

6. Si $I=\int_0^1 e^{1-t}\cos t\,dt$ y $J=\int_0^1 e^{1-t}\operatorname{sen} t\,dt$, comprueba que $\begin{cases} J+I=-\cos 1+e \\ J-I=-\operatorname{sen} 1 \end{cases}$, y calcula después las integrales.

$$I=\int_0^1 \underset{\substack{\downarrow\\ f}}{e^{1-t}}\,\underset{\substack{\downarrow\\ g'}}{\cos t}\,dt=\left[e^{1-t}\operatorname{sen} t\right]_0^1+\int_0^1 e^{1-t}\operatorname{sen} t\,dt=\operatorname{sen}1+J$$

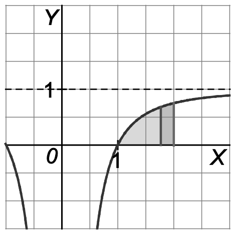
$$J=\int_0^1 \underset{\substack{\downarrow\\ f}}{e^{1-t}}\,\underset{\substack{\downarrow\\ g'}}{\operatorname{sen} t}\,dt=\left[-e^{1-t}\cos t\right]_0^1-\int_0^1 e^{1-t}\cos t\,dt=-\cos 1+e-I$$

$\begin{matrix} I=\operatorname{sen}1+J \\ J=-\cos 1+e-I \end{matrix}$, debemos probar que $\begin{matrix} I+J=-\cos 1+e \\ I-J=\operatorname{sen}1 \end{matrix}$ y efectivamente, $\begin{matrix} I-J=\operatorname{sen}1 & (1^{\text{a}}\text{ ecuación}) \\ I+J=-\cos 1+e & (2^{\text{a}}\text{ ecuación}) \end{matrix}$,

por tanto, $I=\frac{1}{2}(\operatorname{sen}1-\cos 1+e)$, $J=\frac{1}{2}(-\operatorname{sen}1-\cos 1+e)$.

7. Encuentra el valor de c para que la recta $x = c$ divida al área de la región bajo la gráfica de $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ entre 1 y 2 en dos regiones, tales que el área de la de la izquierda sea el doble del área de la de la derecha.

Hay que hallar c para que $\int_1^c \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx = 2\int_c^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx$, es decir:



$\left[x + \frac{1}{x}\right]_1^c = 2\left[x + \frac{1}{x}\right]_c^2$, así que $c + \frac{1}{c} - 2 = 2\left(2 + \frac{1}{2} - c - \frac{1}{c}\right)$,

$c + \frac{1}{c} - 2 = 5 - 2c - \frac{2}{c}$, o sea:

$3\left(c + \frac{1}{c}\right) = 7 \Rightarrow c + \frac{1}{c} = \frac{7}{3} \Rightarrow 3c^2 - 7c + 3 = 0 \Rightarrow c = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{6}$ y como $c > 1$, la solución es $c = \frac{7 + \sqrt{13}}{6}$

8. Calcula los puntos donde se anula la derivada de la función $f(x) = -2x + \int_0^{2x} e^{t^2 - 10t + 24}\,dt$.

$f'(x) = -2 + e^{4x^2 - 20x + 24} \cdot 2 = 0$ si $e^{4x^2 - 20x + 24} = 1$, es decir, $4x^2 - 20x + 24 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = 3$

9. Calcula el volumen del cuerpo generado en la rotación alrededor del eje X de la superficie limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ con $0 \le x \le \pi$ y el eje.

$V = \pi\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\,dx = \pi\int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}\pi = \frac{\pi^2}{2}$ u^3

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Si $f(x) = \int_0^x \operatorname{tg}^4 t\,dt$ y $g(x) = 2x^2$, entonces $(g \circ f)'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ es igual a:

A. $2\pi - 1$ **B.** $3\pi - \frac{1}{4}$ **C.** $2\pi - \frac{2}{3}$ **D.** $\pi - \frac{8}{3}$

La solución es D. $(g \circ f)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$g(x) = 2x^2$, $g'(x) = 4x$, $f(x) = \int_0^x \operatorname{tg}^4 t\,dt$;

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 t\left(1 + \operatorname{tg}^2 t - 1\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 t\left(1 + \operatorname{tg}^2 t\right)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 t\,dt = \left[\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int \left(1 + \operatorname{tg}^2 t - 1\right)dt =$

$= \frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1 + \operatorname{tg}^2 t\right)dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{1}{3} - [\operatorname{tg} t]_0^{\frac{\pi}{4}} + [t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$

Por otra parte, $f'(x) = \operatorname{tg}^4 x$, con lo que $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. $g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right) = \pi - \frac{8}{3}$. Así pues, $(g \circ f)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi - \frac{8}{3}$

2. Sobre la integral $\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx$ podemos afirmar:

A. Vale 0.

B. No existe, pues $y = |\operatorname{sen} x|$ no es integrable.

C. Vale 4.

D. Es $|-\cos 2\pi| + |\cos 0|$.

La solución es C.

$$\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx = \int_0^{\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 1+1+1+1=4$$

3. Sea *f* una función definida en el intervalo abierto $(0,4)$ con derivada segunda continua. Si *f* tiene extremos locales en los puntos 1 y 2, de la integral $I = \int_1^2 xf''(x)dx$, podemos asegurar que:

A. $I = f(2) - f(1)$

B. $I = f(1) - f(2)$

C. $I = f'(1) - f'(2)$

D. $I = 2f'(2) - f'(1)$

La solución es B. $I = \int_1^2 xf''(x)dx = [xf'(x)]_1^2 - \int_1^2 f'(x) = [xf'(x)]_1^2 - [f(x)]_1^2 = 2f'(2) - f'(1) - (f(2) - f(1))$

Al tener *f* extremos locales en 1 y 2, se tiene $f'(2) = f'(1) = 0$ por lo que $I = f(1) - f(2)$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Sean $I = \int_0^1 t\cos^2(\pi t)dt$ y $J = \int_0^1 t\operatorname{sen}^2(\pi t)dt$.

A. $I > 0$

B. $I + J = 1$

C. $I \leq 1$

D. $I - J \leq \int_0^1 t\cos 2\pi t\,dt$

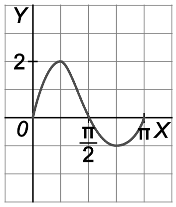
La respuesta A es verdadera pues las funciones continuas $f(t) = t\cos^2(\pi t)$ y $g(t) = t\operatorname{sen}^2(\pi t)$ son no negativas en el intervalo $[0,1]$.

La respuesta B es falsa porque $I + J = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$

La respuesta C es verdadera porque $I = \int_0^1 t\cos^2(\pi t)dt \leq \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$.

La respuesta D es verdadera porque $I - J = \int_0^1 t(\cos^2(\pi t) - \operatorname{sen}^2(\pi t))dt = \int_0^1 t\cos(2\pi t)dt$.

5. **Sea *f* la función definida en $[0,\pi]$ cuya representación gráfica es la de la figura.**



A. $\int_0^{\pi} f(x)dx \geq 0$

C. $\left|\int_0^{\pi} f(x)dx\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$

B. $\int_0^{\pi} |f(x)|dx = \left|\int_0^{\pi} f(x)dx\right|$

D. El valor medio de *f* en $[0,\pi]$ es inferior a 1.

La respuesta A es verdadera pues $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx > -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$.

La respuesta B es falsa, pues $\int_0^{\pi} |f(x)|dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ y $\left|\int_0^{\pi} f(x)dx\right| < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

La respuesta C es falsa pues $\int_0^{\pi} f(x)dx > 0$, por lo que $\left|\int_0^{\pi} f(x)dx\right| = \int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx \neq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$.

La respuesta D es verdadera ya que $\int_0^{\pi} f(x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx < \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$, por lo que el valor medio de *f* en $[0,\pi]$ es menor que $\frac{\pi}{\pi} = 1$.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. ***Sea *f* una función continua en $[a,b]$.**

1. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = 0$

2. $f(x) = 0$ **en** $[a,b]$

A. 1 $\Leftrightarrow$ 2

B. 1 $\Rightarrow$ 2, pero 2 $\not\Rightarrow$ 1

C. 2 $\Rightarrow$ 1 pero 1 $\not\Rightarrow$ 2

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

La solución es C. Si $f(x) = 0$ en $[a,b]$, es $\int_a^b f(x)dx = 0$, por lo que 2 $\Rightarrow$ 1. Obviamente 1 $\not\Rightarrow$ 2, como lo justifica cualquier función cuya gráfica sea como la del ejercicio, es decir, simétrica respecto del punto medio del intervalo $[a,b]$.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Para calcular $\int_0^8 f(x)dx$ nos dan estos datos:**

1. $f(x)$ **es periódica de periodo 4.**

2. $f(x)$ **es una función par.**

3. $f(x) = x$ **para** $0 \leq x < 2$.

A. Puede eliminarse el dato 1.

C. Puede eliminarse el dato 3.

B. Puede eliminarse el dato 2.

D. No puede eliminarse ningún dato.

La solución es D. Los datos 1, 2 y 3 son los tres necesarios para saber cómo es la función en $[0,8]$. Así pues no puede eliminarse ningún dato.

PRUEBA I SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dada la función:

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} & \textbf{si } -\mathbf{2} \le \boldsymbol{x} \le -\mathbf{1} \\ \dfrac{\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{3}}{\mathbf{2}} & \textbf{si } -\mathbf{1} < \boldsymbol{x} \le \mathbf{0} \end{cases}$$

a) Prueba que $f(x)$ es continua en el intervalo [–2, 0] y derivable en el intervalo (2, 0).

b) Estudia si la función es creciente o decreciente en los intervalos (–2, –1) y (–1, 0).

a) Se estudia la continuidad de la función en el intervalo [–2, 0], tan sólo en el punto x =–1, ya que $g(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y $h(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2}$ es continua en $\mathbb{R}$.

Como $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} f(x) = -1$, $f(x)$ es continua en dicho intervalo.

La derivabilidad se estudia en el punto x =–1.

$$f\,'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } -2 < x < -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

Como $\lim\limits_{x \to -1^-} f\,'(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f\,'(x) = \lim\limits_{x \to -1} f\,'(x) = -1$, $f(x)$ es derivable en el intervalo dado.

b) El dominio son todos los reales, ya que el denominador no se anula para ningún valor de x. Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función se iguala la primera derivada a cero:

$$f\,'(x) = 0 \to \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} = 0, \text{ no existe} & \text{si } -2 < x < -1 \\ x = 0 & \text{si } -1 < x \le 0 \end{cases}$$

Luego no tiene máximos o mínimos ya que el único punto en el que pudiera haberlos, x = 0, coincide con el extremo absoluto de la función.

	–2 –1	0
f'	–	–
f	↘	↘

Por tanto, la función es estrictamente decreciente ya que la derivada es siempre negativa en todo el intervalo.

2. Resuelve:

a) Sea f la función definida como $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{a - x}$ para $x \ne a$. Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto (2, 3) y tenga una asíntota oblicua con pendiente –4.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x^2 + x}$

a) La función pasa por el punto (2, 3): $f(2) = \dfrac{4a + b}{a - 2} = 3 \to 4a + b = 3a - 6 \to a + b = -6$

Como m = –4, pendiente de la asíntota oblicua, se tiene que:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + b}{a - x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + b}{ax - x^2} = \frac{a}{-1} = -4 \to a = 4$$

Por lo tanto $a + b = -6 \to 4 + b = -6 \to b = -10$. La función es: $f(x) = \dfrac{4x^2 - 10}{4 - x}$.

b) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x^2 + x}) \cdot (\sqrt{3x^2 + 2x + 2} + \sqrt{3x^2 + x})}{(\sqrt{3x^2 + 2x + 2} + \sqrt{3x^2 + x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 2 - 3x^2 - x}{(\sqrt{3x^2 + 2x + 2} + \sqrt{3x^2 + x})} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2}{(\sqrt{3x^2 + 2x + 2} + \sqrt{3x^2 + x})} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

3. Sea $h(x) = x^4 - 2x^3 - 1$:

a) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) Determina los extremos relativos y estudia la monotonía de *h*.

c) Utiliza el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $h(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones reales.

a) Si *f* es una función real y continua en un intervalo cerrado [*a*, *b*] y, además, signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

b) Se iguala la primera derivada a cero: $h'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 0 \to 2x^2(2x-3) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \quad x = 0$

Estos valores son los candidatos a extremos. Para estudiar la monotonía de la función.

$-\infty \qquad 0 \qquad \frac{3}{2} \qquad \infty$

h'	–	–	+
h	↘	↘	↗

Por lo que es decreciente en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ y creciente en $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

$$h''(x) = 12x^2 - 12x \Rightarrow h''(0) = 0 \quad h''\left(\frac{3}{2}\right) = 12 \cdot \frac{9}{4} - 12 \cdot \frac{3}{2} > 0$$

Para $x = 0$ tenemos un punto de inflexión, y para $x = \frac{3}{2}$ un mínimo.

c) Resolver la ecuación $x^4 - 2x^3 - 1 = 0$ es equivalente a hallar los puntos de corte de $h(x)$ con el eje *X*. Para ello, aplicamos el teorema de Bolzano. Teniendo en cuenta que la función es continua en todos los reales, buscamos valores para los que la función tiene signo distinto y vamos acotando:

$h(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^3 - 1 > 0 \qquad h(0) = -1 < 0 \qquad h(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 1 < 0$

$h(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^3 - 1 > 0 \qquad h(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^3 - 1 < 0 \qquad h(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^3 - 1 > 0$

Por lo tanto podemos resumir:

$\begin{cases} h(-1) > 0 \\ h(0) < 0 \end{cases} \Rightarrow \exists\, c_1 \in (-1, 0)$ tal que $h(c_1) = 0 \qquad \begin{cases} h(2) > 0 \\ h(3) < 0 \end{cases} \Rightarrow \exists\, c_2 \in (2, 3)$ tal que $h(c_2) = 0$.

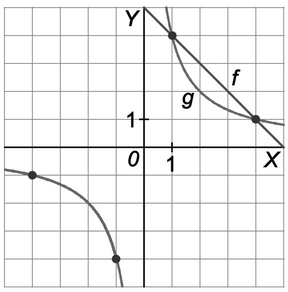
Es imposible que haya más soluciones si atendemos a la monotonía de la función.

4. Dadas las funciones $f(x) = 5 - x$ y $g(x) = \frac{4}{x}$ para $x \neq 0$:

a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de *f* y *g* indicando sus puntos de corte.

b) Calcula el área del recinto.

a) $f(x) = 5 - x$ es una recta y $g(x) = \frac{4}{x}$, es una hipérbola de I y III cuadrante.



Para ver los puntos de corte se iguala $f(x)$ y $g(x)$, es decir,

$5 - x = \frac{4}{x}$, de donde $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Resolviendo la ecuación obtenemos $x = 1$ y $x = 4$.

b) $A = \int_1^4 [f(x) - g(x)]dx = 5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln|x|\Big]_1^4 = \frac{15}{2} - 4\ln 4 \text{ u}^2$

5. Calcula las siguientes integrales, explicando el método de resolución:

a) $\int x\cos(3x)dx$ **b)** $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x^2-x)(x-1)}$

a) Se aplica el método de integración por partes: $\int u(x)dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)du(x)$

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = \cos(3x)dx \rightarrow v = \int \cos(3x)dx = \frac{1}{3}\text{sen}(3x)$

$\int x\cos(3x)dx = \frac{x}{3}\text{sen}(3x) - \frac{1}{3}\int \text{sen}(3x)dx = \frac{x}{3}\text{sen}(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$

b) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x^2-x)(x-1)} = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x(x-1)(x-1)} = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x(x-1)^2}$, que se puede descomponer en fracciones simples:

$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$

$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$

Para $x = 0$ tenemos que $1 = A$.

Para $x = 1$ tenemos que $1 = C$.

Para $x = 2$ tenemos que $1 = A + 2B + 2C$, y sustituyendo los valores $A = 1$ y $C = 1$, $B = -1$.

Por tanto, la integral queda: $\int_{-2}^{-1} (\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2})dx = \left[\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)}\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{6} - 2\ln 2 + \ln 3$

PRUEBA II SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Se quiere obtener el límite $\lim_{x \to -2} \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas. Se dan los siguientes datos:

1. $P(0) = Q(0) = 0$

2. El resto de dividir $P(x)$ entre (x + 2) es 3

3. El resto de dividir $Q(x)$ entre (x + 2) es 0.

4. El resto de dividir $Q(x)$ entre $(x + 2)^2$ es 2.

¿Cuál es el dato innecesario para contestar y, por ello, puede eliminarse?

A. Puede eliminarse el dato 1.

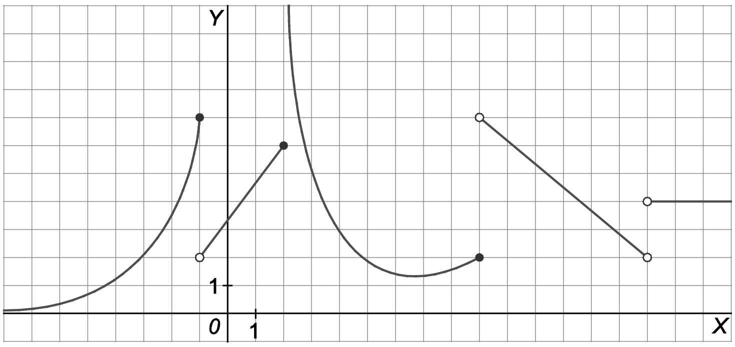
B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. Puede eliminarse el dato 4.

$$\lim_{x \to -2} \frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]_{ind} = \lim_{x \to -2} \frac{P_1(x)(x+2)+3}{Q_1(x)(x+2)+0} = \left[\frac{3}{0}\right] = \infty$$ Solución D

2. A la vista de la gráfica de la siguiente función, ¿cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?:



A. Tiene una discontinuidad evitable en $x = -1$.

B. Tiene una discontinuidad de salto infinito en $x = 2$.

C. Tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 9$.

D. Es continua por la derecha y por la izquierda en $x = 15$.

Solución: (B, C)

3. Se desea construir un paralelepípedo rectangular de 9 L de volumen de tal forma que un lado de la base sea el doble que el otro. Las longitudes de sus lados para que el área total de sus 6 caras sea mínima son:

A. $x = \frac{3}{2}$ dm, $h = 2$ dm

B. $x = 2$ dm, $h = \frac{3}{2}$ dm

C. $x = \frac{3}{2}$ cm, $h = 2$ cm

D $x = 2$ cm, $h = \frac{3}{2}$ cm

Para relacionar las variables se utiliza la fórmula del volumen: $V = A_b \cdot h = 2x \cdot x \cdot h = 2x^2 h = 9 \to h = \frac{9}{2x^2}$

Por tanto, el área queda: $A(\text{x}) = 4x^2 + 6xh = 4x^2 + \frac{27}{x} = \frac{4x^3 + 27}{x}$

E igualando la primera derivada a cero: $A'(\text{x}) = \frac{8x^3 - 27}{x^2} = 0 \to x = \frac{3}{2}$dm

	$\frac{3}{2}$	
A'	–	+
A	$\searrow$	$\nearrow$

Como $x = \frac{3}{2}$ dm $\to h = 2$ dm Solución: A

4. **Para que la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pase por el origen de coordenadas y tenga un mínimo en el punto (1, −1) los valores de *a*, *b* y *c* tienen que ser:**

A. $a = 0,\ b = \frac{1}{2},\ c = 0$

B. $a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{3}{2},\ c = 0$

C. $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2},\ c = 0$

D. Este caso no puede ocurrir.

Si $f(x)$ pasa por el origen de coordenadas entonces $f(0) = c = 0$, entonces $f(x) = ax^3 + bx$

Por otro lado, sabemos que la función pasa por el punto (1, –1) y que además éste es un mínimo:

$$\begin{cases} f(1) = a + b = -1 \\ f'(x) = 3ax^2 + b = 0 \to f'(1) = 3a + b = 0, \end{cases} \text{ entonces } \begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$$

Y resolviendo el sistema: $a = \frac{1}{2},\ b = -3a = \frac{-3}{2}$

Por lo tanto la función será $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ Solución: B

5. **Lorenzo, que no sabe derivar, dice que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son primitivas de una misma función. Señala cuál o cuáles de las siguientes opciones verifican las afirmaciones de Lorenzo.**

A. $f(x) = \frac{x}{x+1},\ g(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

B. $f(x) = \ln(2x^2 + 1),\ g(x) = \ln(24x^2 + 12)$

C. $f(x) = \operatorname{sen}^{\sqrt{2}} x \cdot \cos^8 x - \cos x,\quad g(x) = \cos^5 x \operatorname{sen}^{\sqrt{2}} x + \cos x$

D. $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ g(x) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$

Dos funciones son primitivas de una misma función sólo si difieren en una constante.

A. $g(x) = \frac{2x+1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{x}{x+1} = 1 + f(x)$, luego A es verdadera.

B. $g(x) = \ln\left[12\left(2x^2+1\right)\right] = \ln 12 + \ln(2x^2 + 1) = \ln 12 + f(x)$ y B es verdadera.

C. $g(x) - f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen}^{\sqrt{2}} x \cos^5 x\,(1 - \cos^3 x)$ por lo que C es falsa.

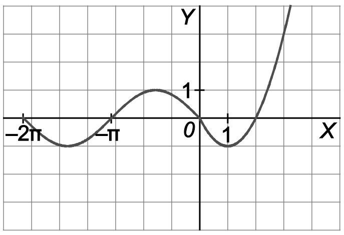
D. $f(x) - g(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, con lo que D es verdadera.

Solución: A, B y D

6. **El área de la región limitada por la gráfica de la función** $f(x)=\begin{cases}\mathbf{sen}(x) & \mathbf{si}\quad x\in[-2\pi,0)\\ x^2-2x & \mathbf{si}\quad x\in[0,3]\end{cases}$ **, el eje de abscisas y las rectas verticales** $x=0$ **y x = 3 es:**

A. 0 **B**. $\frac{\pi}{4}$ **C** .1 **D**. $\frac{8}{3}$

La gráfica de la función es:



Observando la gráfica de la función, el área pedida es:

$$\int_0^2 -(x^2-2x)dx+\int_2^3 (x^2-2x)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg]_0^2+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg]_2^3=\frac{8}{3}\ \text{u}^2$$

7 Matrices

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Dadas las matrices *A* y B indica, si es posible.

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{3} & -4 & \frac{3}{5}\\ 1 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

a) Los elementos a_{34} y b_{14}

b) La dimensión de cada una de ellas

c) La matriz traspuesta de cada una de ellas

a) a_{34} no existe, ya que la matriz *A* solo tiene 2 columnas. $b_{14}=\frac{3}{5}$.

b) La matriz *A* tiene dimensión 3 x 2. La matriz *B* tiene dimensión 2 x 4.

c) $A^t=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B^t=\begin{pmatrix}2 & 1\\ \frac{1}{3} & 0\\ -4 & -2\\ \frac{3}{5} & 1\end{pmatrix}$

4. Escribe la matriz de dimensión 2 x 4 en la que: $a_{ij}=(-1)^i(2i-j)$ para $1\le i\le 2, 1\le j\le 4$

$a_{11}=(-1)^1(2\cdot 1-1)=-1$ $\quad a_{12}=(-1)^1(2\cdot 1-2)=0$ $\quad a_{13}=(-1)^1(2\cdot 1-3)=1$ $\quad a_{14}=(-1)^1(2\cdot 1-4)=2$

$a_{21}=(-1)^2(2\cdot 2-1)=3$ $\quad a_{22}=(-1)^2(2\cdot 2-2)=2$ $\quad a_{23}=(-1)^2(2\cdot 2-3)=1$ $\quad a_{24}=(-1)^2(2\cdot 2-4)=0$

La matriz es $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

5. Escribe:

a) Una matriz triangular inferior tal que los elementos de la diagonal secundaria sean nulos.

b) Una matriz simétrica.

c) Una matriz antisimétrica.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 3\\ 5 & 0 & -4\\ 3 & -4 & 2\end{pmatrix}$ **c)** $C=\begin{pmatrix}0 & -2 & 4\\ 2 & 0 & -3\\ -4 & 3 & 0\end{pmatrix}$

6. **Halla qué condición deben cumplir *i* y *j* para que $a_{ij} = 0$ si *A* es una matriz:**

a) Triangular superior

b) Triangular inferior

c) Diagonal

d) Simétrica

a) En una matriz triangular superior son nulos todos los elementos situados debajo de la diagonal principal, es decir, $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

b) En una matriz triangular inferior son nulos todos los elementos situados encima de la diagonal principal, es decir, $a_{ij} = 0$ si $i < j$.

c) En una matriz diagonal son nulos todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal, es decir, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

d) En una matriz simétrica no es necesario que ningún elemento sea nulo.

7 y 8. **Ejercicios resueltos.**

9. **Dadas las matrices *M*, *N* y *P*:**

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) $M + N$

b) $\dfrac{2}{5}N$

c) $-M$

d) $\dfrac{1}{2}M - 3N$

e) $2M - 3P^t$

f) $3\left(N^t + P\right) - M^t$

a) $M + N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\dfrac{2}{5}N = \dfrac{2}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{6}{5} & -\dfrac{2}{5} & 0 \\ \dfrac{2}{5} & \dfrac{4}{5} & \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}$

c) $-M = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

d) $\dfrac{1}{2}M - 3N = \dfrac{1}{2}M - 3N = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & \dfrac{3}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{17}{2} & \dfrac{5}{2} & 1 \\ -4 & -6 & -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$

e) $2M - 3P^t = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 9 & -6 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -11 & 10 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

f) $3\left(N^t + P\right) - M^t = 3\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 6 & 9 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 7 & 9 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$

10. Halla una matriz X tal que $2A + X = 3B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A + X = 3B \Rightarrow X = 3B - 2A \Rightarrow X = 3\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Justifica las siguientes propiedades.

a) $0 \cdot A_{mxn} = O_{mxn}$ **b)** $\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot O_{mxn} = O_{mxn}$

a) $0 \cdot A_{mxn}$ es la matriz de dimensión m x n que se obtiene multiplicando cada elemento de A por 0, con lo que $0 \cdot A_{mxn}$ es la matriz nula de dimensión m x n como afirma la propiedad.

b) $\lambda \cdot O_{mxn}$ es la matriz de dimensión m x n que se obtiene multiplicando cada elemento de O_{mxn} por λ. Al ser todos los elementos de O_{mxn} nulos se obtiene la propiedad enunciada.

12. Demuestra la propiedad asociativa del producto de números reales por matrices.

Si $A_{mxn} = (a_{ij})$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, el elemento ij de la matriz $\lambda(\mu A)$ es $\lambda(\mu a_{ij}) = \lambda\mu a_{ij} = (\lambda\mu)a_{ij}$, es decir, coincide con el elemento ij de la matriz $(\lambda\mu)A$, por lo que $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

13. Escribe la matriz $M = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$ como suma de una matriz diagonal y otra matriz.

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Calcula a, b y c en la expresión:

$$3\begin{pmatrix} 3 & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 2c \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$$

Realizando las operaciones en ambos miembros de la igualdad tenemos:

$$3\begin{pmatrix} 3 & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3b \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad 4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 2c \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4a & 8c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & 5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 4a-5 & 3c \end{pmatrix}$$

Igualando elemento a elemento obtenemos:

$$\begin{cases} 3 = 4a - 5 \\ 3b = -9 \\ -3 = 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = -1 \end{cases}$$

15. Escribe la matriz A como combinación lineal de B_1, B_2 y B_3, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2B_1 + B_2 + 3B_3$$

16. **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$**, halla las matrices** X **e** Y **que verifican:**

$$\begin{cases} 2X - Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos: $3X = A + B \Rightarrow X = \frac{1}{3}(A+B) \Rightarrow X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos: $X + Y = B \Rightarrow Y = B - X \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

17 a 19. Ejercicios resueltos.

20. **Realiza los productos de dos factores que se pueden hacer con las matrices:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$MN = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ -4 & -6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad NM = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = (-3)$

MP no se puede realizar. $\qquad PM = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$NP = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad PN$ no se puede realizar.

21. **Calcula el valor de** a **y** b **para que las matrices** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$ **conmuten.**

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & a+2b \\ 5 & 2a+b \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 2+a \\ 3+2b & 6+b \end{pmatrix}$

$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & a+2b \\ 5 & 2a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 2+a \\ 3+2b & 6+b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 7 = 1+2a \\ a+2b = 2+a \\ 5 = 3+2b \\ 2a+b = 6+b \end{cases} \Rightarrow a = 3,\ b = 1$

22. **Calcula los valores de** x **e** y **para que se verifique la igualdad:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2+2y & 3 \\ 2x-y & x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2+2y = 6 \\ 2x-y = 6 \Rightarrow x = 4,\ y = 2 \\ x-1 = 3 \end{cases}$

23. **Calcula $2M + I - M^2$ donde $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.**

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, por tanto, $2M + I - M^2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

24. **Demuestra que $I_m \cdot A_{mxn} = A_{mxn}$ y $A_{mxn} \cdot I_n = A_{mxn}$**

Para demostrar que $I_m \cdot A_{mxn} = A_{mxn}$, supongamos que $I_m = (b_{ij})$ y $A_{mxn} = (a_{ij})$.

Observemos que $I_m \cdot A_{mxn}$ es una matriz de dimensión *m* x *n* cuyo elemento de la fila *i* y columna *j* viene dado por $\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}$ y, como $b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$, tenemos $\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj} = b_{ii}a_{ij} = a_{ij}$, es decir, $I_m \cdot A_{mxn}$ coincide con A_{mxn}.

De manera completamente análoga se prueba que $A_{mxn} \cdot I_n = A_{mxn}$.

25. **Ejercicio interactivo.**

26 y 27. **Ejercicios resueltos.**

28. **Calcula el rango de las matrices:**

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 5F_1}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix} \underset{F_3 \leftrightarrow F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 + 3F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(M) = 3$$

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 + 3F_1 \\ F_3 \to F_3 + 4F_1}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & 14 & 4 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - 2F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(N) = 2$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & -9 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 4F_1 \\ F_4 \to F_4 - F_1}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & -9 & -18 \\ 0 & -3 & -12 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3 \to 4F_3 - 9F_2 \\ F_4 \to 4F_4 - 3F_2}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix} \underset{F_4 \to F_4 - 3F_3}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(P) = 3$$

29. **Escribe una matriz de dimensión 3 x 5 que tenga rango 2.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La primera y segunda fila son linealmente independientes, pero la tercera es combinación lineal de ellas, ya que la tercera fila es la suma de la primera y la segunda. Por tanto, el rango de *M* es 2.

30. **Estudia según los valores de *a* el rango de las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & a \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & a+4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & a \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & a-3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \leftrightarrow F_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & a-3 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - F_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

Así, si $a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$ tendremos $\text{rg}(A) = 2$ y si $a \neq 2$ tendremos $\text{rg}(A) = 3$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & a+4 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1 \\ F_4 \to F_4 - 2F_1}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a+2 \end{pmatrix} \underset{F_3 \leftrightarrow F_4}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & a+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to 4F_3 + F_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 4a+5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, si $4a + 5 = 0 \Rightarrow a = -\frac{5}{4}$ tendremos $\text{rg}(B) = 2$ y si $a \neq -\frac{5}{4}$ tendremos $\text{rg}(B) = 3$.

31. **Encuentra una matriz de orden 5 y rango 2.**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

La primera y segunda fila son linealmente independientes, la tercera coincide con la primera, la cuarta es el doble que la segunda y la quinta es la suma de la primera y la segunda. Por tanto, el rango de *M* es 2.

32. **Ejercicio resuelto.**

33. **Comprueba si las matrices *M* y *N* son una la inversa de la otra:**

a) $M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ **b)** $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) $MN = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $NM = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por lo que *M* y *N* son inversas.

b) $MN = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, por lo que *M* y *N* no son inversas.

34. **Calcula el valor que debe tener el parámetro *m* para que las matrices *A* y *B* sean una la inversa de la otra:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & m & m+1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & m & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & m & m+1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & m & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m^2 - m - 2 & m^2 - m - 1 & -m+2 \\ m-2 & m-2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que *A* y *B* sean inversas, *AB* debe ser la identidad, por tanto, obtenemos que $m = 2$.

35. **Calcula A^{-1} utilizando la definición de matriz inversa, siendo $A=\begin{pmatrix}\mathbf{11}&\mathbf{7}\\\mathbf{3}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$.**

Si $A^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ tenemos:

$$AA^{-1}=I\Rightarrow\begin{pmatrix}11&7\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}11a+7c=1\\3a+2c=0\end{cases}\text{ y }\begin{cases}11b+7d=0\\3b+2d=1\end{cases}\Rightarrow a=2,\ b=-7,\ c=-3,\ d=11$$

Por tanto, $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-7\\-3&11\end{pmatrix}$.

36. **Calcula la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices utilizando el método de Gauss-Jordan:**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{5}&\mathbf{6}\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{5}&\mathbf{3}\\\mathbf{3}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{2}\\\mathbf{2}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\5&6&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to F_2-5F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&1&-5&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to F_1-F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&6&-1\\0&1&-5&1\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}6&-1\\-5&1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}5&3&1&0\\3&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to 5F_2-3F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}5&3&1&0\\0&-4&-3&5\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to 4F_1+3F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}20&0&-5&15\\0&-4&-3&5\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to\frac{1}{20}F_1\\F_2\to-\frac{1}{4}F_2}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\0&1&\frac{3}{4}&-\frac{5}{4}\end{array}\right)\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\\frac{3}{4}&-\frac{5}{4}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0&2&1&0\\2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\leftrightarrow F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&0&1\\0&2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to\frac{1}{2}F_1\\F_2\to\frac{1}{2}F_2}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&0\end{array}\right)\Rightarrow C^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

37. **Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices.**

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{5}\\\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{3}\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{3}&\mathbf{2}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\quad\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{4}&\mathbf{-1}&\mathbf{1}\\\mathbf{-1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{3}&\mathbf{-1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&5&0&1&0\\2&0&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to F_3-2F_1]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&5&0&1&0\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to F_1-F_3\\F_2\to F_2-5F_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&0&-1\\0&1&0&10&1&-5\\0&0&1&-2&0&1\end{array}\right)\Rightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&-1\\10&1&-5\\-2&0&1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\3&2&1&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2\to 2F_2-3F_1\\F_3\to 2F_3-F_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\0&1&-1&-3&2&0\\0&1&1&-1&0&2\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to F_1-F_2\\F_3\to F_3-F_2}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&2&4&-2&0\\0&1&-1&-3&2&0\\0&0&2&2&-2&2\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to F_1-F_3\\F_2\to 2F_2+F_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&2&0&-2\\0&2&0&-4&2&2\\0&0&2&2&-2&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1\to\frac{1}{2}F_1\\F_2\to\frac{1}{2}F_2\\F_3\to\frac{1}{2}F_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&1&0&-2&1&1\\0&0&1&1&-1&1\end{array}\right)\Rightarrow N^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&-1&1&1&0&0\\-1&1&0&0&1&0\\3&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2\to 4F_2+F_1\\F_3\to 4F_3-3F_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&-1&1&1&0&0\\0&3&1&1&4&0\\0&-1&1&-3&0&4\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to 3F_1+F_2\\F_3\to 3F_3+F_2}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}12&0&4&4&4&0\\0&3&1&1&4&0\\0&0&4&-8&4&12\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to F_1-F_3\\F_2\to 4F_2-F_3}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}12&0&0&12&0&-12\\0&12&0&12&12&-12\\0&0&4&-8&4&12\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to\frac{1}{12}F_1\\F_2\to\frac{1}{12}F_2\\F_3\to\frac{1}{4}F_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-1\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&-2&1&3\end{array}\right)\Rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\-2&1&3\end{pmatrix}$$

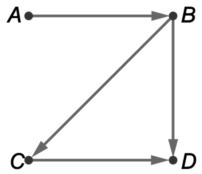
38. Si $A^3 = I$ demuestra que A es invertible y calcula, en función de A, su inversa.

Como $A^3 = A \cdot A \cdot A = (A \cdot A) \cdot A = A \cdot (A \cdot A)$ por la propiedad asociativa, entonces $A^3 = A^2 \cdot A$, es decir, $I = A^2 \cdot A = A \cdot A^2$, lo que implica que $A^{-1} = A^2$.

39. Ejercicio interactivo.

40. Ejercicio resuelto.

41. El grafo siguiente recoge las relaciones de influencia en un grupo de cuatro personas:



a) Halla la matriz G asociada al grafo.

b) Calcula $G + G^2$ e interpreta el resultado.

a) $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $G + G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Los elementos de esta matriz indican el número de posibles relaciones de influencia entre las cuatro personas con un máximo de un intermediario.

Por ejemplo, el elemento de la segunda fila y cuarta columna nos indica que B puede influir sobre D de dos modos distintos, bien directamente, bien a través de un intermediario. De hecho, uno de estos modos es la influencia directa que muestra el grafo y el otro es la influencia a través de C.

42. Al punto $M(-1, 2)$ se le aplica un giro de amplitud 120º y centro el origen y una simetría de eje la recta $y = x$. Halla las coordenadas de su trasformado.

La aplicación del giro y la simetría trasforman el punto $M(-1, 2)$ en el punto

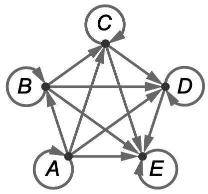
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 120º & \operatorname{sen} 120º \\ -\operatorname{sen} 120º & \cos 120º \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

43. Traza un grafo dirigido para el que la matriz de adyacencia sea una matriz triangular superior de dimensión 5 x 5 cuyos elementos distintos de 0 son $a_{ij} = 1$.

La matriz de adyacencia es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y un posible grafo es:



44 a 53. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Matrices

54. En la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{10} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué valor tiene el elemento de la segunda fila y tercera columna?

b) Escribe los elementos nulos con la notación a_{ij}.

a) $a_{23} = 0$

b) $a_{14} = 0$, $a_{23} = 0$ y $a_{32} = 0$

55. En cada caso, escribe una matriz que cumpla las siguientes condiciones:

a) Que su traspuesta sea una matriz columna.

b) Que sea triangular superior de orden 2.

c) Que sea simétrica de orden 3, tenga tres elementos iguales a 0 y el resto sean iguales a 1.

d) Que sea antisimétrica de orden 2 y uno de sus elementos sea igual a 1.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

56. Identifica con expresiones de la forma a_{ij} los elementos de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 1$, $a_{12} = -2$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = -3$, $a_{22} = 2$ y $a_{23} = -1$

57. Halla *a*, *b*, *c* y *d* para que las matrices siguientes sean iguales:

$$\begin{pmatrix} 3a - b + 2 & c + d + 6 \\ 1 - c - d & 2a + b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b - a & -3c + 3d \\ 2c - 8d & 10a - 2b + 1 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos correspondientes de cada matriz tenemos:

$$\begin{cases} 3a - b + 2 = b - a \\ 2a + b = 10a - 2b + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ -8a + 3b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = 3$$

$$\begin{cases} c + d + 6 = -3c + 3d \\ 1 - c - d = 2c - 8d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4c - 2d = -6 \\ -3c + 7d = -1 \end{cases} \Rightarrow c = -2,\ d = -1$$

58. Escribe la matriz cuadrada de orden 3 cuyos elementos son:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2j - i & \text{si } i \le j \\ (-1)^{i+j} & \text{si } i > j \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

59. Escribe la matriz de dimensión 3 x 4 cuyos elementos son:

$$a_{ij} = \begin{cases} 3i - j & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i = j \\ j - 2i & \text{si } i > j \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

60. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula, cuando sea posible:

a) $A + B$

b) $B - A$

c) $B + C^t$

d) $2A + 3B$

e) $B + C$

f) $3A + 2C^t$

a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

b) $B - A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $B + C^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

d) $2A + 3B = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 1 \\ 17 & 14 & -10 \end{pmatrix}$

e) No se puede realizar.

f) $3A + 2C^t = \begin{pmatrix} 12 & 9 & -5 \\ 1 & 16 & -4 \end{pmatrix}$

61. **Descompón la matriz** $M=\begin{pmatrix}1&2&5\\1&4&-1\\3&-2&3\end{pmatrix}$ **en suma de la matriz identidad, una matriz simétrica y otra triangular superior.**

Una posible solución es:

$$M=\begin{pmatrix}1&2&5\\1&4&-1\\3&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&3\\1&2&-2\\3&-2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Las soluciones son de la forma:

$$M=\begin{pmatrix}1&2&5\\1&4&-1\\3&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z&1&3\\1&x&-2\\3&-2&y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-z&1&2\\0&3-x&1\\0&0&2-y\end{pmatrix},\ \text{con } x,y,z\in\mathbb{R}$$

62. **Dada la matriz** $A=\begin{pmatrix}6&-18&12\\-6&3&9\end{pmatrix}$ **, Halla tres matrices** A_1**,** A_2**, y** A_3 **tales que:**

a) $3A_1=A$ **b)** $2A_2=A$ **c)** $\frac{1}{2}A_3=A$

a) $3A_1=A\Rightarrow A_1=\frac{1}{3}A=\begin{pmatrix}2&-6&4\\-2&1&3\end{pmatrix}$

b) $2A_2=A\Rightarrow A_2=\frac{1}{2}A=\begin{pmatrix}3&-9&6\\-3&\frac{3}{2}&\frac{9}{2}\end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2}A_3=A\Rightarrow A_3=2A=\begin{pmatrix}12&-36&24\\-12&6&18\end{pmatrix}$

63. **Dadas las matrices:**

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-3&2&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&1&4\\-1&-2&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\\2&-3\end{pmatrix}$$

Calcula:

a) AC **c)** $AC-I_2$ **e)** $(BC)^2$

b) CB **d)** CA **f)** B^tA

a) $AC=\begin{pmatrix}7&-8\\-6&2\end{pmatrix}$

d) $CA=\begin{pmatrix}5&-4&3\\-4&3&-1\\11&-8&1\end{pmatrix}$

b) $CB=\begin{pmatrix}5&4&8\\-3&-3&-4\\7&8&8\end{pmatrix}$

e) $(BC)^2=\begin{pmatrix}11&-13\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11&-13\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}121&-130\\0&1\end{pmatrix}$

c) $AC-I_2=\begin{pmatrix}7&-8\\-6&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-8\\-6&1\end{pmatrix}$

f) $B^tA=\begin{pmatrix}5&-4&3\\7&-5&0\\4&-4&8\end{pmatrix}$

64. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) ACB **b)** $B^tC^tA^t$ **c)** $(BC)^2 A$

a) $AC=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow ACB=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 17 & 6 \\ 25 & 37 & 6 \end{pmatrix}$

b) $B^tC^tA^t=(ACB)^t=\begin{pmatrix} 5 & 25 \\ 17 & 37 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

c) $(BC)^2=\begin{pmatrix} -1 & 17 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 17 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 222 & -102 \\ -78 & 246 \end{pmatrix} \Rightarrow (BC)^2 A=\begin{pmatrix} 138 & -852 & 324 \\ 582 & 1140 & -324 \end{pmatrix}$

65. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) AB **b)** BA **c)** $(A^t+B)A$

a) $AB=(-5)$

b) $BA=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & 9 & 3 \\ -4 & 2 & -6 & -2 \\ 4 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

c) $(A^t+B)A=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 & 3 \\ 4 & -2 & 6 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

66. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $C(A+B)=CA+CB$.

b) Comprueba que $(A+B)C^t=AC^t+BC^t$.

a) $C(A+B)=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 15 \\ -4 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $CA+CB=\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 15 \\ -4 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $(A+B)C^t=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ y $AC^t+BC^t=\begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

67. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$, comprueba que se cumple la igualdad $\left(A^2-5I\right)^2=16I$.

$$A^2-5I=\begin{pmatrix}5&0&4\\0&1&0\\4&0&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&-4&0\\4&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(A^2-5I\right)^2=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&-4&0\\4&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&4\\0&-4&0\\4&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&0&0\\0&16&0\\0&0&16\end{pmatrix}=16I$$

68. Calcula $A^{102}-A^{100}$ siendo A la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$.

Calculemos las primeras potencias de A para poder formular una hipótesis sobre el valor de A^n :

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix},\ A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix},\ A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1&0\\8&1\end{pmatrix},\ \ldots,\ A^n=\begin{pmatrix}1&0\\2n&1\end{pmatrix}$$

Demostremos nuestra hipótesis por el método de inducción:

Primero comprobemos que la hipótesis es cierta si $n=1$, lo que es inmediato, ya que A coincide con la expresión de A^n si $n=1$.

Comprobemos ahora que la hipótesis es cierta para $n+1$ suponiendo que lo es para n:

$$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}1&0\\2n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2n+2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2(n+1)&1\end{pmatrix}$$

Demostrada nuestra hipótesis, tenemos $A^{102}-A^{100}=\begin{pmatrix}1&0\\204&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\200&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\4&0\end{pmatrix}$.

69. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ halla una expresión que permita calcular A^n para cualquier n.

Calculemos las primeras potencias de A para poder formular una hipótesis sobre el valor de A^n :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix},\ A^3=A^2A=\begin{pmatrix}9&9&9\\9&9&9\\9&9&9\end{pmatrix},\ A^4=A^3A=\begin{pmatrix}27&27&27\\27&27&27\\27&27&27\end{pmatrix},\ \ldots,\ A^n=\begin{pmatrix}3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\end{pmatrix}$$

Demostremos nuestra hipótesis por el método de inducción:

Primero comprobemos que la hipótesis es cierta si $n=1$, lo que es inmediato, ya que A coincide con la expresión de A^n si $n=1$.

Comprobemos ahora que la hipótesis es cierta para $n+1$ suponiendo que lo es para n:

$$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot3^{n-1}&3\cdot3^{n-1}&3\cdot3^{n-1}\\3\cdot3^{n-1}&3\cdot3^{n-1}&3\cdot3^{n-1}\\3\cdot3^{n-1}&3\cdot3^{n-1}&3\cdot3^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^n&3^n&3^n\\3^n&3^n&3^n\\3^n&3^n&3^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{(n+1)-1}&3^{(n+1)-1}&3^{(n+1)-1}\\3^{(n+1)-1}&3^{(n+1)-1}&3^{(n+1)-1}\\3^{(n+1)-1}&3^{(n+1)-1}&3^{(n+1)-1}\end{pmatrix}$$

70. Calcula A^n para cualquier n, siendo $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$.

Calculemos las primeras potencias de A para poder formular una hipótesis sobre el valor de A^n :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix}2&2&2\\3&3&3\\4&4&4\end{pmatrix},\ A^3=A^2A=\begin{pmatrix}6&6&6\\9&9&9\\12&12&12\end{pmatrix},\ A^4=A^3A=\begin{pmatrix}18&18&18\\27&27&27\\36&36&36\end{pmatrix},\ \ldots$$

Nuestra hipótesis es que $A^n=\begin{pmatrix}2\cdot 3^{n-2}&2\cdot 3^{n-2}&2\cdot 3^{n-2}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\4\cdot 3^{n-2}&4\cdot 3^{n-2}&4\cdot 3^{n-2}\end{pmatrix}$ si $n\geq 2$.

Demostremos nuestra hipótesis por el método de inducción:

Primero comprobemos que la hipótesis es cierta si $n=2$, lo que es inmediato, ya que A^2 coincide con la expresión de A^n si $n=2$.

Comprobemos ahora que la hipótesis es cierta para $n+1$ suponiendo que lo es para $n\geq 2$:

$$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}2\cdot 3^{n-2}&2\cdot 3^{n-2}&2\cdot 3^{n-2}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\4\cdot 3^{n-2}&4\cdot 3^{n-2}&4\cdot 3^{n-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2\cdot 3^{n-2}&3\cdot 2\cdot 3^{n-2}&3\cdot 2\cdot 3^{n-2}\\3\cdot 3^{n-1}&3\cdot 3^{n-1}&3\cdot 3^{n-1}\\3\cdot 4\cdot 3^{n-2}&3\cdot 4\cdot 3^{n-2}&3\cdot 4\cdot 3^{n-2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 3^{n-1}&2\cdot 3^{n-1}&2\cdot 3^{n-1}\\3^{n}&3^{n}&3^{n}\\4\cdot 3^{n-1}&4\cdot 3^{n-1}&4\cdot 3^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 3^{(n+1)-2}&2\cdot 3^{(n+1)-2}&2\cdot 3^{(n+1)-2}\\3^{(n+1)-1}&3^{(n+1)-1}&3^{(n+1)-1}\\4\cdot 3^{(n+1)-2}&4\cdot 3^{(n+1)-2}&4\cdot 3^{(n+1)-2}\end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que $A^n=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$ si $n=1$ y $A^n=\begin{pmatrix}2\cdot 3^{n-2}&2\cdot 3^{n-2}&2\cdot 3^{n-2}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}\\4\cdot 3^{n-2}&4\cdot 3^{n-2}&4\cdot 3^{n-2}\end{pmatrix}$ si $n\geq 2$.

71. Halla C^{200} siendo C la matriz $C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Observemos que $C^2=\begin{pmatrix}0&0&2\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ y $C^3=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2I$, por tanto, tenemos que:

$$C^{200}=C^{198}C^2=\left(C^3\right)^{66}C^2=\left(2I\right)^{66}C^2=2^{66}IC^2=2^{66}C^2=\begin{pmatrix}0&0&2^{67}\\2^{67}&0&0\\0&2^{66}&0\end{pmatrix}$$

72. Demuestra que la matriz $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ verifica una ecuación del tipo $A^2+\alpha A+\beta I=0$, determinando α y β.

$$A^2+\alpha A+\beta I=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\alpha&\alpha\\\alpha&2\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta&0\\0&\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+2\alpha+\beta&4+\alpha\\4+\alpha&5+2\alpha+\beta\end{pmatrix}$$

Si queremos que esta matriz sea la matriz nula, tendremos: $\begin{cases}5+2\alpha+\beta=0\\4+\alpha=0\end{cases}\Rightarrow \alpha=-4,\ \beta=3$

Por tanto, A verifica la ecuación $A^2-4A+3I=0$.

Ecuaciones y sistemas de matrices

73. Halla todas las matrices *X* que satisfacen la ecuación:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, si A tiene inversa tendremos $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

Intentemos calcular por tanto la inversa de A por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to 2F_2 + F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 - F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{F_1 \to \frac{1}{2}F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Así, $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

74. Halla qué valor debe tomar *a* en la matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{-a} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{13} & \mathbf{a} \end{pmatrix}$ para que su inversa coincida con su opuesta.

Sea $A = \begin{pmatrix} -a & -2 \\ 13 & a \end{pmatrix}$, queremos que $A \cdot (-A) = I$, es decir, que $-A^2 = I$, por tanto:

$$-A^2 = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 26 - a^2 & 0 \\ 0 & 26 - a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 26 - a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = \pm 5$$

75. Halla una matriz columna *B* tal que $AB = 3B + C$ siendo *A* y *C* las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

Observemos que $AB = 3B + C \Rightarrow AB - 3B = C \Rightarrow (A - 3I)B = C$, por tanto, si $A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ tiene inversa, tendremos $B = (A - 3I)^{-1} C$.

Intentemos calcular la inversa de $A - 3I$ por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to 5F_1 + 3F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} -10 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to -\frac{1}{10}F_1 \\ F_2 \to -\frac{1}{5}F_2}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A - 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Así, $B = (A - 3I)^{-1} C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

También podríamos haber resuelto el ejercicio observando que B tiene dimensión 2 x 1 y haciendo $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, obteniendo:

$$AB = 3B + C \Rightarrow \begin{pmatrix} a + 3b \\ -2a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 2 \\ 3b - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 3a + 2 \\ -2a + b = 3b - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 3b = 2 \\ -2a - 2b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{5},\ b = \frac{4}{5} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

76. Halla todas las matrices *A*, de dimensión 2 x 2, que cumplen $A^2 = O$, $(1 \quad 1) \cdot A = O$ donde *O* denota la matriz nula de dimensión 2 x 2.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, de la segunda condición concluimos que:

$$(1 \quad 1) \cdot A = O \Rightarrow (a+c \quad b+d) = (0 \quad 0) \Rightarrow c = -a,\ d = -b \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

De la primera condición concluimos que:

$$A^2 = O \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - ab & -b^2 + ab \\ -a^2 + ab & b^2 - ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - ab = 0 \\ b^2 - ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(a-b) = 0 \\ b(b-a) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}$$

Obtenemos, por tanto, que las matrices que verifican las condiciones son de la forma $A = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}$ para algún número real *a*.

77. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Halla las matrices *X* e *Y* de dimensiones 2 x 3 tales que verifican el sistema matricial: $\begin{cases} 3X + Y = A \\ 4X + 2Y = B \end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y restándole la segunda obtenemos:

$$2X = 2A - B \Rightarrow X = \frac{1}{2}(2A - B) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos:

$$Y = A - 3X \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 4 & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

78. Halla la matriz *X* que verifica la ecuación $AX + I = B - X$ donde *I* es la matriz identidad y *A* y *B* son las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observemos que $AX + I = B - X \Rightarrow AX + X = B - I \Rightarrow (A+I)X = B - I$, por tanto, si $A + I = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ tiene inversa tendremos $X = (A+I)^{-1}(B-I)$.

Intentemos calcular la inversa de $A + I$ por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - 3F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 + 2F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to -F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow (A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Así, $X = (A+I)^{-1}(B-I) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

79. Encuentra las matrices *A* y *B* que cumplen las siguientes ecuaciones:

$$8A-5B=\begin{pmatrix}3&2&0\\-2&1&3\\0&3&-3\end{pmatrix}\qquad 2A-B=\begin{pmatrix}1&-4&0\\2&-1&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

Multiplicando la segunda ecuación por 5 y restándole la primera obtenemos:

$$2A=\begin{pmatrix}2&-22&0\\12&-6&12\\0&2&-2\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&-11&0\\6&-3&6\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos:

$$B=\begin{pmatrix}1&-18&0\\10&-5&9\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

80. Considera las matrices siguientes:

$$A=\begin{pmatrix}1&-4\\-2&-1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}4&2\\-2&-3\end{pmatrix}$$

Determina dos matrices *M* y *N* tales que:

$$\begin{cases}AM+BN=C\\AM=N\end{cases}$$

Sustituimos $AM=N$ en la primera ecuación para obtener: $N+BN=C\Rightarrow(I+B)N=C$

Por tanto, si $I+B$ y A tienen inversas obtendremos $N=(I+B)^{-1}C$ y $M=A^{-1}N$.

Intentemos calcular las inversas de $I+B$ y A por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&2&1&0\\-1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to 2F_2+F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}2&2&1&0\\0&4&1&2\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to 2F_1-F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}4&0&1&-2\\0&4&1&2\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to\frac{1}{4}F_1\\ F_2\to\frac{1}{4}F_2}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\Rightarrow(I+B)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&-4&1&0\\-2&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to F_2+2F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&-4&1&0\\0&-9&2&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to 9F_1-4F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}9&0&1&-4\\0&-9&2&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to\frac{1}{9}F_1\\ F_2\to-\frac{1}{9}F_2}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}\\0&1&-\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

Así, $N=(I+B)^{-1}C=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\\-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\0&-1\end{pmatrix}$ y $M=A^{-1}N=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}\\-\frac{2}{9}&-\frac{1}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{9}&\frac{2}{3}\\-\frac{4}{9}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

Rango

81. **Las tres matrices fila F_1, F_2 y F_3 son independientes:**

$$\boldsymbol{F_1} = (\mathbf{1 \quad 3 \quad -1 \quad 4}) \qquad \boldsymbol{F_2} = (\mathbf{-2 \quad 3 \quad 1 \quad 2}) \qquad \boldsymbol{F_3} = (\mathbf{0 \quad 1 \quad 1 \quad 2})$$

a) Escribe tres matrices de dimensión 3 x 4 en las que la primera fila sea F_1 y cuyos rangos sean, respectivamente, 1, 2 y 3.

b) Escribe una matriz de dimensión 4 x 3 cuyo rango sea 3.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = A_3^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

82. **Halla el rango de las siguientes matrices observando la relación entre sus filas o entre sus columnas:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

En la matriz *A* tenemos $F_2 = 2F_1$ y $F_3 = F_1$, por lo que su rango es 1.

En la matriz *B* tenemos $C_3 = C_2 - C_1$ y C_1, C_2 son linealmente independientes, por lo que su rango es 2.

83. **Determinar, sin utilizar el método de Gauss, el rango de las siguientes matrices:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

En la matriz *A* tenemos $F_2 = F_1 + F_3$, $F_4 = F_1 - F_3$ y F_1, F_3 son linealmente independientes, por lo que $\text{rg}(A) = 2$.

En la matriz *B* las filas son linealmente independientes, por lo que $\text{rg}(B) = 4$.

84. **Calcula el rango de las siguientes matrices, utilizando el método de Gauss.**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{11} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{11} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-6} & \mathbf{10} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{10} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{8} \\ \mathbf{2} & \mathbf{10} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 5F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -14 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 11 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 + 2F_1 \\ F_3 \to F_3 + 2F_1}]{} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 15 & 7 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to 3F_3 - F_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 15 & 7 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 3$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & 0 & 11 \\ -4 & -6 & 10 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 + 4F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(M) = 3$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \\ 2 & 10 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 \to 3F_2 - F_1 \\ F_3 \to 3F_3 + F_1 \\ F_4 \to 3F_4 - 2F_1}]{} \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & 23 \\ 0 & 10 & 23 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 \to F_3 + 7F_2 \\ F_4 \to F_4 + 10F_2}]{} \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \to 3F_4 - F_3]{} \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(N) = 3$$

85. **Obtén el valor de *a* para que el rango de la matriz *A* sea igual a 2.**

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & a \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & a \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3-4F_1}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -6 & -1 \\ 0 & 7 & -6 & a \end{pmatrix} \underset{F_3\to F_3-F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

Para que el rango de A sea 2 la última fila debe ser nula, por tanto, $a=-1$.

86. **Halla, según el valor de *a*, el rango de la matriz:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & 4 \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & 4 \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2\to F_2-F_1 \\ F_3\to F_3-F_1}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & a-2 & a^2-4 \end{pmatrix} \underset{F_3\to F_3-F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{pmatrix}$$

Si $a^2-4\neq 0$, es decir, si $a\neq -2$ y $a\neq 2$ tenemos $\text{rg}(A)=\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{pmatrix}=3$.

Si $a=-2$ tenemos $\text{rg}(A)=\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2$ y si $a=2$ tenemos $\text{rg}(A)=\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=1$.

87. **Estudia el rango de la matriz según los valores del parámetro *m*.**

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \end{pmatrix} \underset{F_3\to F_3-F_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$$

Si $m\neq 1$ y $m\neq 0$ tenemos $\text{rg}(M)=\text{rg}\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}=3$.

Si $m=1$ tenemos $\text{rg}(M)=\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2$.

Si $m=0$ tenemos $\text{rg}(M)=\text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2$.

Matriz inversa

88. Determina cuál de las siguientes matrices es inversa de otra:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{5}&\mathbf{4}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{4}&\mathbf{-5}\\\mathbf{-1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{-4}&\mathbf{1}\\\mathbf{5}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{-5}\\\mathbf{-1}&\mathbf{-4}\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}3&-4\\16&-21\end{pmatrix}\qquad AD=\begin{pmatrix}-2&-9\\-9&-41\end{pmatrix}\qquad BD=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad BC=\begin{pmatrix}-41&9\\9&-2\end{pmatrix}\qquad CD=\begin{pmatrix}3&16\\-4&-21\end{pmatrix}$$

Por tanto, A y C son inversas, al igual que B y D.

89. Calcula la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices utilizando la definición.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{11}&\mathbf{8}\\\mathbf{4}&\mathbf{3}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{3}\\\mathbf{1}&\mathbf{3}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Si $F^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ tenemos:

$$FF^{-1}=I\Rightarrow\begin{pmatrix}11&8\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}11a+8c=1\\4a+3c=0\end{cases}\text{ y }\begin{cases}11b+8d=0\\4b+3d=1\end{cases}\Rightarrow a=3,\ b=-8,\ c=-4,\ d=11$$

Por tanto, $F^{-1}=\begin{pmatrix}3&-8\\-4&11\end{pmatrix}$

Si $G^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ tenemos:

$$GG^{-1}=I\Rightarrow\begin{pmatrix}2&3\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a+3c=1\\a+3c=0\end{cases}\text{ y }\begin{cases}2b+3d=0\\b+3d=1\end{cases}\Rightarrow a=1,\ b=-1,\ c=-\frac{1}{3},\ d=\frac{2}{3}$$

Por tanto, $G^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

Si $H^{-1}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ tenemos:

$$HH^{-1}=I\Rightarrow\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a_{11}+a_{31}=1\\a_{21}=0\\a_{11}+a_{31}=0\end{cases},\begin{cases}2a_{12}+a_{32}=0\\a_{22}=1\\a_{12}+a_{32}=0\end{cases}\text{ y }\begin{cases}2a_{13}+a_{13}=0\\a_{23}=0\\a_{13}+a_{33}=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{matrix}a_{11}=1,\ a_{21}=0,\ a_{31}=-1\\a_{12}=0,\ a_{22}=1,\ a_{32}=0\\a_{13}=-1,\ a_{23}=0,\ a_{33}=2\end{matrix}$$

Por tanto, $H^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$

90. Calcula, si es posible, la matriz inversa de cada una de las matrices por el método de Gauss-Jordan:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{7}\\ \mathbf{1} & \mathbf{4}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 7 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to 2F_2-F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 7 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to F_1-7F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & 8 & -14\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to \frac{1}{2}F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 4 & -7\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -7\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2\to F_2+F_1\\ F_3\to F_3+2F_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to F_1-F_2\\ F_3\to F_3-F_2}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1\to -F_1]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2\to F_2-2F_1\\ F_3\to F_3+3F_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -6 & 4 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to 3F_1+2F_2\\ F_3\to F_3+2F_2}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1\end{array}\right)\Rightarrow C \text{ no tiene inversa.}$$

91. Calcula, si es posible, la inversa de la matriz:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2\to F_2-F_1\\ F_3\to F_3+F_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to F_1+2F_2\\ F_3\to F_3+2F_2}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to F_1-2F_3\\ F_3\to F_2-F_3}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2\to -F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1\end{array}\right)\Rightarrow D^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

92. Calcula el valor de *k* para que *B* sea la matriz inversa de *A*, siendo:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \boldsymbol{k}\end{pmatrix}$$

$$AB=I\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -4-k\\ 0 & 1 & 4+k\\ 0 & 0 & -3-k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow k=-4$$

93. Determina razonadamente para qué valores de *k* tienen inversa cada una de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{k} & \mathbf{3}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}-\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Recordemos que una matriz cuadrada de orden n tiene inversa si y solo si su rango es n.

Puesto que $\mathrm{rg}(M)=2$ para cualquier valor de k y $\mathrm{rg}(N)=3\Leftrightarrow k\neq 1$, concluimos que M no tiene inversa para ningún valor de k y N tiene inversa si $k\neq 1$.

94. **Dadas las matrices:**

$$A=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{-1}\\\mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\text{ y } B=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&x&y\\\mathbf{-2}&\mathbf{1}&\mathbf{-2}\\\mathbf{2}&x&y\end{pmatrix}$$

estudia si existen números reales *x* e *y* tales que la matriz *B* es la inversa de la matriz *A*.

Para que *B* sea la inversa de *A* debe ser $AB=I$, es decir:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2x+3&2y-6\\0&x+1&y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+3=1\\x+1=0\\2y-6=0\\y-2=0\end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones concluimos que $x=-1$, pero las dos últimas son contradictorias, por lo que no existen valores para *x* e *y* que hagan que *B* sea la inversa de *A*.

95. **Estudia para qué valores de *m* la matriz siguiente tiene inversa y, si es posible, halla su inversa para $m=-1$.**

$$\begin{pmatrix}m&0&1\\0&1&1\\m&0&m\end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}m&0&1\\0&1&1\\m&0&m\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{}\begin{pmatrix}m&0&1\\0&1&1\\0&0&m-1\end{pmatrix}$$

M tendrá inversa si $\text{rg}(M)=\text{rg}\begin{pmatrix}m&0&1\\0&1&1\\0&0&m-1\end{pmatrix}=3$, es decir, si $m\neq 1$ y $m\neq 0$.

Si $m=-1$, $M=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$ tiene inversa, que calculamos con el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\-1&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&-2&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to 2F_1+F_3\\F_2\to 2F_2+F_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2&0&0&1&0&1\\0&2&0&-1&2&1\\0&0&-2&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to -\frac{1}{2}F_1\\F_2\to \frac{1}{2}F_2\\F_3\to -\frac{1}{2}F_3}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\Rightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Síntesis

96. **Dada la matriz** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{4}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{-5}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$ **se pide:**

a) Comprueba que se verifica la igualdad $A^3+I=O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.

b) Justifica que A tiene inversa y obtén A^{-1}.

c) Calcula A^{100}.

a) $A^2=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}$ y $A^3=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\\ -1 & -3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -4 & -5\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=-I$,

por lo que $A^3+I=O$.

b) La inversa de A es $A^{-1}=-A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -4 & -4\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$, ya que $AA^{-1}=A\left(-A^2\right)=-A^3=I$.

c) $A^{100}=\left(A^3\right)^{33}\cdot A=\left(-I\right)^{33}\cdot A=-I^{33}A=-A=\begin{pmatrix}0 & -3 & -4\\ -1 & 4 & 5\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix}$

97. **Dada la matriz** ***A*** **prueba que la matriz inversa de A es** $\boldsymbol{A^{-1}=-A^2+A+2I}$ **.**

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Basta comprobar que $AA^{-1}=I$, es decir, que $-A^3+A^2+2A=I$, y, en efecto, tenemos:

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix} \text{ y } A^3=\begin{pmatrix}2 & -1 & -4\\ -2 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

con lo que $-A^3+A^2+2A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ -2 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$.

98. **Encuentra dos matrices,** ***A*****,** ***B,*** **cuadradas de orden 2 que sean solución del sistema matricial:**

$$\begin{cases}\boldsymbol{2A+B=C^2}\\ \boldsymbol{A-B=C^{-1}}\end{cases} \textbf{ siendo } \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{3}\\ \mathbf{2} & \mathbf{5}\end{pmatrix}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos $3A=C^2+C^{-1}\Rightarrow A=\dfrac{1}{3}\left(C^2+C^{-1}\right)$, sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos $B=A-C^{-1}$. Calculamos C^{-1} por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_2\to F_2-2F_1}{\rightarrow}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right)\underset{F_1\to F_1+3F_2}{\rightarrow}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right)\underset{F_2\to -F_2}{\rightarrow}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right)\Rightarrow C^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Así, tenemos:

$$A=\frac{1}{3}\left(C^2+C^{-1}\right)=\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}7 & 18\\ 12 & 31\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 7\\ \frac{14}{3} & 10\end{pmatrix} \text{ y } B=A-C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 7\\ \frac{14}{3} & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{17}{3} & 4\\ \frac{8}{3} & 11\end{pmatrix}.$$

99. **Determina *a*, *b* y *c* para que la matriz:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

verifique que su traspuesta A^t coincide con su inversa A^{-1}. Calcula en todos esos casos la matriz A^4.

Queremos que $AA^t = I$, es decir, que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & \frac{b+c}{\sqrt{2}} \\ a & \frac{b+c}{\sqrt{2}} & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b+c = 0 \\ a^2+b^2+c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -b \\ 2b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,\ b = \frac{1}{\sqrt{2}},\ c = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ a = 0, b = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ c = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

En el primer caso, es decir, si $a = 0,\ b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $c = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, observemos que $A^{-1} = A^t = A$, con lo que $A^2 = I$ y, por tanto, $A^4 = A^2A^2 = I$.

En el segundo caso, es decir, si $a = 0,\ b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tenemos $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^4 = A^2A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

100. **Obtén, para todo número natural, el valor de:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix},...$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},\ B^3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix},\ B^4 = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix},...$$

Observando estas potencias podemos concluir que $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}$ y $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & -2^n \\ -2^n & 2^n \end{pmatrix}$, con lo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

101. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$**:**

a) Comprueba que se verifica $A^3 - I = O$, con I la matriz identidad y O la matriz nula.

b) Calcula A^{13}.

c) Basándote en los apartados anteriores, y sin recurrir al cálculo de inversas, halla la matriz X que verifica la igualdad $A^2X + I = A$.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, por lo que $A^3 - I = O$.

b) $A^{13} = \left(A^3\right)^4 \cdot A = \left(I\right)^4 \cdot A = I^4A = A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A^2X + I = A \Rightarrow A^3X + A = A^2 \Rightarrow X + A = A^2 \Rightarrow X = A^2 - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

102. Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} \mathbf{1+m} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1-m} \end{pmatrix}$ **e *I* la matriz Identidad.**

a) Halla para qué valores de m se verifica que $B^2 = 2B + I$.

b) Calcula B^{-1} para los valores m hallados en el apartado anterior.

a) $B^2 = \begin{pmatrix} (1+m)^2 + 1 & 2 \\ 2 & (1-m)^2 + 1 \end{pmatrix}$ y $2B + I = \begin{pmatrix} 2(1+m)+1 & 2 \\ 2 & 2(1-m)+1 \end{pmatrix}$, por tanto,

$$B^2 = 2B + I \Rightarrow \begin{cases} (1+m)^2 + 1 = 2(1+m)+1 \\ (1-m)^2 + 1 = 2(1-m)+1 \end{cases} \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

b) Observemos que $B^2 = 2B + I \Leftrightarrow B^2 - 2B = I \Leftrightarrow B(B - 2I) = I$, por lo que, si $m = \pm 1$ tenemos $B^{-1} = B - 2I$.

Es decir, si $m = -1$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; y si $m = 1$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

CUESTIONES

103. Sea *A* una matriz *m* x *n*.

a) ¿Existe una matriz *B* tal que *BA* sea una matriz fila? Si existe, ¿qué dimensión tiene?

b) ¿Se puede encontrar una matriz *B* tal que *AB* sea una matriz fila? Si existe, ¿qué dimensión tiene?

c) Si *AB* es una matriz cuadrada, ¿qué orden tiene B^tA^t ?

a) *BA* será una matriz fila de dimensión 1 x *n* si *B* es una matriz fila de dimensión 1 x *m*.

b) *AB* será una matriz fila solo si $m=1$ y *B* tiene dimensión *n* x *k*, en cuyo caso *AB* tendrá dimensión 1 x *k*.

c) Si *AB* es una matriz cuadrada, su orden será *m* y *B* tendrá dimensión *n* x *m*. Por tanto A^t tendrá dimensión *n* x *m* y B^t tendrá dimensión *m* x *n*, con lo que B^tA^t tendrá orden *m*. También podríamos observar que $B^tA^t=(AB)^t$ tendrá el mismo orden que *AB*, es decir, orden *m*.

104. *A* es una matriz de dimensión 3 x 4 cuyo rango es 3. Determina qué variaciones puede haber en su rango cuando:

a) Se añade una fila.

b) Se añade una columna.

c) Se elimina una fila.

d) Se elimina una columna.

Observemos que las tres filas de *A* son linealmente independientes y hay tres columnas linealmente independientes.

a) Si la fila que se añade es lineal independiente de las tres filas originales de *A*, el rango de la nueva matriz será 4, si es linealmente dependiente, el rango seguirá siendo 3.

Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ y añadimos la fila $\begin{pmatrix}0&0&0&1\end{pmatrix}$, la nueva matriz tendrá rango 4, pero si añadimos la fila $\begin{pmatrix}0&0&0&0\end{pmatrix}$ tendrá rango 3.

b) Las tres filas de la nueva matriz seguirán siendo linealmente independientes, por lo que el rango de la nueva matriz seguirá siendo 3.

c) Las dos filas no eliminadas serán linealmente independientes, por lo que el rango de la nueva matriz será 2.

d) El rango de la nueva matriz puede seguir siendo 3 o puede ser 2.

Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ y eliminamos una de las tres primeras columnas el rango de la nueva matriz es 2, si eliminamos la cuarta columna el rango será 3.

105. Sean *A*, *B* y *C* tres matrices tales que el producto *ABC* es una matriz 3x2 y el producto AC^t es una matriz cuadrada, siendo C^t la traspuesta de *C*. Calcula, razonando la respuesta, las dimensiones de *A*, *B* y *C*.

Sean m_1 x n_1, m_2 x n_2 y m_3 x n_3 las dimensiones respectivas de *A*, *B* y *C*.

Para poder calcular *ABC* debe ser $n_1=m_2$ y $n_2=m_3$; además, para que *ABC* tenga dimensión 3 x 2 debe ser $m_1=3$ y $n_3=2$.

Por otro lado, para poder calcular AC^t debe ser $n_1=n_3$; además, para que AC^t sea cuadrada debe ser $m_1=m_3$.

Por tanto, obtenemos $n_1=n_3=m_2=2$ y $m_1=m_3=n_2=3$, es decir, *A* tiene dimensión 3 x 2, *B* tiene dimensión 2 x 3 y *C* tiene dimensión 3 x 2.

106. Si *A* y *B* son dos matrices cuadradas de orden *n* demuestra que:

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$$

Observemos que $(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2$, por tanto,

$$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2 \Leftrightarrow \cancel{A^2}-AB-BA+\cancel{B^2}=\cancel{A^2}-2AB+\cancel{B^2} \Leftrightarrow -AB-BA=-2AB \Leftrightarrow 2AB-AB=BA \Leftrightarrow AB=BA$$

107. **La matriz *A* es de dimensión *m* x *n* y la matriz *B* de dimensión *p* x *q*. Determina, en cada caso, qué relación debe haber entre *m*, *n*, *p* y *q* para que:**

a) Exista $(AB)^{-1}$.

b) Se pueda calcular $A^2 - B^2$.

c) Se pueda calcular $AB^t - A$.

a) Para que exista $(AB)^{-1}$ debe existir en primer lugar *AB* y debe ser una matriz cuadrada, es decir, debe ser $n = p$ y $m = q$.

b) Para que se puedan calcular A^2 y B^2, *A* y *B* deben ser matrices cuadradas. Además, deben ser del mismo orden para poder calcular $A^2 - B^2$. Por tanto, la condición buscada es $m = n = p = q$.

c) Para que se pueda calcular AB^t debe ser $n = q$. Además, para poder calcular $AB^t - A$ la dimensión de AB^t, *m* x *p*, debe coincidir con la de *A*, es decir, $n = p$. Por tanto, la condición buscada es $n = p = q$.

108. **Estudia cómo varía el producto de dos matrices *A* y *B* si se hacen en ellas los siguientes cambios:**

a) Se cambian de orden las filas *i* y *k* de la matriz *A*.

b) Se cambian de orden las columnas *j* y *k* de la matriz *B*.

c) Se multiplica por 2 la fila *i* de la matriz *A*.

d) Se suma a la fila *i* de *A* la fila *k* multiplicada por 2.

a) Las filas *i* y *k* del producto cambian de orden.

b) Las columnas *j* y *k* del producto cambian de orden.

c) La fila *i* del producto queda multiplicada por 2.

d) La nueva fila *i* del producto es la suma de la antigua fila *i* con la fila *k* multiplicada por 2.

109. **Se considera la matriz *A*, cuadrada de orden 3, de modo que $\text{rg}(A) = 2$. Determina, si es posible, el efecto que tienen sobre el rango cada una de las siguientes acciones o pon ejemplos en caso contrario.**

a) Multiplicar *A* por 2.

b) Sumarle la matriz identidad.

c) Añadir una fila de unos.

a) El rango de la nueva matriz seguiría siendo 2.

b) Es imposible saber que efecto tiene esta acción sobre el rango, podría tomar cualquier valor entre 1 y 3.

La única posibilidad que podemos descartar es que la nueva matriz tenga rango 0, ya que en este caso debería ser $A + I = O$, es decir, la matriz *A* debería ser –*I*, que no tiene rango 2.

Por ejemplo, las matrices $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tienen rango 2, pero al sumarles la identidad tienen, respectivamente, rango 1, 2 y 3.

c) El rango de la nueva matriz podría ser 2 o 3, pero nunca menor que 2, ya que en *A* hay dos filas linealmente independientes que seguirán siéndolo en la nueva matriz.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, al añadir una fila de unos el rango de la nueva matriz seguiría siendo 2; pero si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, al añadir una fila de unos el rango de la nueva matriz sería 3.

110. **Sea A una matriz cuadrada de orden n de modo que $A^2 = O$, siendo O la matriz nula (la formada completamente por ceros).**

a) Comprueba que $(A+I_n)^2 = 2A+I_n$.

b) Comprueba que las matrices $B = I_n - A$ y $C = A+I_n$ son una inversa de la otra.

a) $(A+I_n)^2 = (A+I_n)(A+I_n) = A^2 + AI_n + I_nA + I_n^2 = O + A + A + I_n = 2A + I_n$

b) $BC = (I_n - A)(A+I_n) = I_nA + I_n^2 - A^2 - AI_n = A + I_n - O - A = I_n \Rightarrow B$ y C son inversas.

111. **Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A + I$, donde I es la matriz unidad. Demuestra que la matriz A es invertible.**

$A^2 = A + I \Rightarrow A^2 - A = I \Rightarrow A(A-I) = I \Rightarrow A$ es invertible y $A^{-1} = A - I$.

112. **a)** Determina qué condición debe cumplir una matriz diagonal para ser invertible.

b) Halla la inversa de cualquier matriz diagonal de orden 3 que cumpla la condición del apartado anterior.

a) La condición es que ningún elemento de la diagonal principal sea nulo.

b) Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal de orden 3 con a, b y c distintos de 0, su inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$.

113. **a)** Si A es una matriz no singular y $(B-C)A = O$, la matriz nula, comprueba que $B = C$.

b) Según el resultado del apartado anterior, cuando $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ la única matriz X que verifica la ecuación $XA = O$ es la matriz nula. ¿Es cierta esta afirmación?

a) Como A tiene inversa, tenemos $(B-C)A = O \Rightarrow B - C = OA^{-1} = O \Rightarrow B = C$.

b) $X = O$ es solución de la ecuación $XA = O$, pero no se puede afirmar que sea la única solución usando el apartado anterior, ya que A no tiene inversa, lo que se puede comprobar intentando calcularla por el método de Gauss-Jordan.

De hecho, la afirmación no es cierta, por ejemplo, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es otra solución de la ecuación $XA = O$.

NOTA: Si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tenemos $XA = O \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ d = 2c \end{cases}$, por lo que las soluciones de la ecuación $XA = O$ son de la forma $X = \begin{pmatrix} a & 2a \\ c & 2c \end{pmatrix}$ con $a, c \in \mathbb{R}$.

114. **Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A + B = AB$. Comprueba que entonces se tiene la fórmula:**

$$(I - B)^{-1} = -B^{-1}A$$

Basta comprobar que $(I-B)(-B^{-1}A) = I$, ahora bien, tenemos:

$$(I-B)(-B^{-1}A) = -B^{-1}A + BB^{-1}A = -B^{-1}A + IA = (-B^{-1} + I)A$$

por tanto, basta comprobar que $(-B^{-1} + I)A = I$, es decir, que $A^{-1} = -B^{-1} + I$, o lo que es lo mismo, que $A^{-1} + B^{-1} = I$. Para ello, observemos que:

$$A + B = AB \Rightarrow A^{-1}(A+B)B^{-1} = A^{-1}ABB^{-1} \Rightarrow A^{-1}AB^{-1} + A^{-1}BB^{-1} = I^2 \Rightarrow IB^{-1} + A^{-1}I = I \Rightarrow B^{-1} + A^{-1} = I \Rightarrow A^{-1} + B^{-1} = I$$

quedando así demostrada la fórmula pedida.

115. Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$$

a) Calcula AA^t, donde A^t es la matriz traspuesta de la matriz A.

b) Razona que siempre existe la matriz inversa de A, independientemente de los valores de $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$.

a) $$AA^t=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}=\left(a^2+b^2\right)I \;.$$

b) Según el apartado anterior, si $B=\frac{1}{a^2+b^2}A^t$ tenemos $AB=I$, es decir, A es invertible y $A^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2}A^t$.

116. Se dice que una matriz cuadrada es ortogonal si su inversa coincide con su traspuesta. Se pide:

a) Demostrar que una matriz de la forma $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ es ortogonal.

b) Calcular x e y de modo que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ sea ortogonal.

a) Si $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ tenemos:

$$AA^t=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I \;,$$

es decir, $A^{-1}=A^t$, por lo que A es ortogonal.

b) Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$ tenemos que A es ortogonal si:

$$AA^t=I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & xy \\ 0 & xy & y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+x^2=1 \\ xy=0 \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow x=0,\ y=\pm 1$$

117. Halla las coordenadas del punto en el que se trasforma el punto *P*(2, 5) al aplicarle, sucesivamente, un giro de centro el origen y amplitud –60º, una simetría de eje el de ordenadas y una traslación de vector (–3, 2).

La aplicación del giro, la simetría y la traslación trasforman el punto $P(2, 5)$ en el punto:

$$(2 \quad 5)\begin{pmatrix} \cos(-60^{o}) & \operatorname{sen}(-60^{o}) \\ -\operatorname{sen}(-60^{o}) & \cos(-60^{o}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+(-3 \quad 2)=(2 \quad 5)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+(-3 \quad 2)=$$

$$=(2 \quad 5)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}+(-3 \quad 2)=\begin{pmatrix} \frac{-2-5\sqrt{3}}{2} & \frac{5-2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}+(-3 \quad 2)=\begin{pmatrix} \frac{-8-5\sqrt{3}}{2} & \frac{9-2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

PROBLEMAS

118. Se dice que una matriz cuadrada es involutiva si cumple que $A^2 = I$, donde *I* denota la matriz identidad.

a) Justifica razonadamente que toda matriz involutiva es regular.

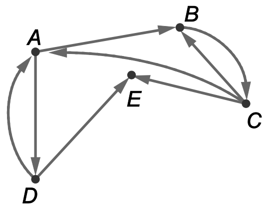
b) Determina para qué valores de los parámetros *a* y *b* la siguiente matriz es involutiva.

$$\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

a) Puesto que una matriz involutiva verifica que $AA = I$, cualquier matriz involutiva es regular y su inversa coincide con ella misma, $A^{-1} = A$.

b) $\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ b = \pm 1$

119. El grafo siguiente contiene la información sobre la capacidad de influencia que tiene cada uno de los miembros de un grupo de personas sobre los demás.



a) Escribe la matriz, *M*, asociada al grafo.

b) Determina las matrices M^2 y M^3.

c) Interpreta la información que proporciona la matriz $M + M^2 + M^3$.

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Los elementos de esta matriz indican el número de posibles relaciones de influencia entre el grupo de personas con un máximo de dos intermediarios.

Por ejemplo, el elemento de la tercera fila y quinta columna nos indica que *C* puede influir sobre *E* de tres modos distintos, bien directamente, bien a través de uno o dos intermediarios.

Estos tres modos son la influencia directa (ningún intermediario), la influencia a través de *A* y *D* (dos intermediarios) y otros modos de influir a través de dos intermediarios que no tienen significancia real pero que aparecen en el grafo, la influencia a través de *B* y *C*. No hay ninguna influencia de *C* sobre E a través de un único intermediario.

120. a) Halla la matriz asociada a una simetría cuyo eje es la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.

b) Determina qué movimiento resulta de la composición de la simetría del apartado anterior y de la que tiene como eje la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

a) $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, que trasforma cada punto $P = (x \quad y)$ en el punto $P' = (x \quad y)S = (-y \quad -x)$, simétrico de P respecto de la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.

b) La composición de ambas simetrías viene dada por la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, que se corresponde con una simetría respecto del origen de coordenadas.

121. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Determina los valores de *c* tales que la matriz $A + cB$ no tenga rango 2.

b) Calcula, para los valores hallados de *c*, la matriz $A(A + cB)$ y su rango.

a) $A + cB = \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4+4c & 2-c \end{pmatrix}$ no tiene rango 2 si sus filas son proporcionales, esto ocurre si $1 + c = 0 \Rightarrow c = -1$ o si $\frac{4+4c}{1+c} = \frac{2-c}{-1} \Rightarrow 2 - c = -4 \Rightarrow c = 6$.

b) Si $c = -1$ tenemos $A(A + cB) = A(A - B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 1, ya que $F_1 = -2F_2$.

Si $c = 6$ tenemos $A(A + cB) = A(A - B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 28 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 3 \\ 84 & -12 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 1, ya que $F_2 = -4F_1$.

122. En una pastelería se elaboran dos tipos de tartas: de limón y de chocolate. De cada tipo hace tres tamaños. Cada semana fabrica las tartas que aparecen en la tabla:

	Limón	Chocolate
Grande	10	5
Mediana	16	20
Pequeña	12	10

De las tartas de chocolate vende en la pastelería el 60 %, y de las tartas de limón, el 50 %. El resto se reparten a domicilio.

a) Escribe la matriz que expresa el número de tartas según el tamaño y el sabor.

b) Escribe las matrices que expresan el número de tartas y el porcentaje según el sabor y el tipo de venta.

c) Calcula la matriz que expresa el número de tartas según el tamaño y el tipo de venta.

a) $A = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 16 & 20 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$

b)

	Pastelería	Domicilio
Limón	50 % de 38	50 % de 38
Chocolate	60 % de 35	40 % de 35

Número de tartas: $B_1 = \begin{pmatrix} 19 & 19 \\ 21 & 14 \end{pmatrix}$ Porcentaje: $B_2 = \begin{pmatrix} 50 & 50 \\ 60 & 40 \end{pmatrix}$

c) La matriz viene dada por $A \cdot \frac{1}{100} B_2 = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 20 & 16 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$.

123. **Dos matrices cuadradas *A* y *B* de igual orden son semejantes si existe una tercera matriz *M* tal que $B = M^{-1}AM$. Comprueba si son semejantes las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Queremos comprobar si existe una matriz invertible $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $B = M^{-1}AM$, es decir, tal que $MB = AM$:

$$MB = AM \Rightarrow \begin{pmatrix} -3a+2b & -6a+3b \\ -3c+2d & -6c+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ a-2c & b-2d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3a+2b = 2a-c \\ -6a+3b = 2b-d \\ -3c+2d = a-2c \\ -6c+3d = b-2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5a+2b+c = 0 \\ -6a+b+d = 0 \\ -a-c+2d = 0 \\ -b-6c+5d = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema por el método de Gauss obtenemos como solución $a = b = c = d = 0$, es decir, *M* debería ser la matriz nula, pero entonces no sería invertible, por tanto, las matrices *A* y *B* no son semejantes.

124. **En una cadena de supermercados hacen tres tipos de lotes de verdura para ensalada, *A*, *B* y *C*, de modo que el lote *A* incluye 400 g de lechuga, 200, de tomate, y 100, de zanahoria; el lote *B* incluye 200 g de lechuga, 300, de tomate, y 150, de zanahoria; y el lote *C* incluye 500 g de lechuga, 300, de tomate, y 50, de zanahoria.**

Se ha recogido la información sobre las ventas de cada tipo de lote en dos supermercados de la cadena. En el supermercado *X* se han vendido 50 lotes de tipo *A*, 30 lotes de tipo *B* y 25 lotes de tipo *C*. En el supermercado *Y* se han vendido 40 lotes de tipo A, 20 de tipo *B* y 25 de tipo C.

a) Escribe la matriz *M* que engloba la información de los tipos de lote y su composición.

b) Escribe la matriz *V* que recoja la información de las ventas por supermercado.

c) Halla la matriz que contenga la información de la cantidad de cada tipo de verdura que ha hecho falta en cada supermercado.

a) $M = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 100 \\ 200 & 300 & 150 \\ 500 & 300 & 50 \end{pmatrix}$

b) $V = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 25 \\ 40 & 20 & 25 \end{pmatrix}$

c) La matriz viene dada por $VM = \begin{pmatrix} 38500 & 26500 & 10750 \\ 32500 & 21500 & 8250 \end{pmatrix}$

125. **Halla todas las matrices triangulares superiores de orden 2 que verifican que su cuadrado es la matriz identidad.**

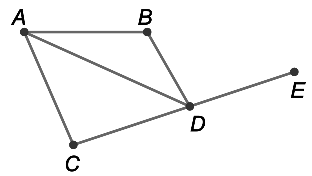
Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ una matriz triangular superior de orden 2 tal que $X^2 = I$, tenemos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b(a+c) = 0 \\ c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1,\ b = 0,\ c = 1 \\ a = -1,\ b = 0,\ c = -1 \\ a = 1,\ b \in \mathbb{R},\ c = -1 \\ a = -1,\ b \in \mathbb{R},\ c = 1 \end{cases}$$

Por tanto, puede ser:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,\ X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I,\ X = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ o } X = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$

126. **La figura representa el tendido de comunicaciones entre cinco lugares.**



a) Escribe la matriz A, de adyacencia del grafo.

b) Halla las matrices A^2, A^3 e interprétalas.

c) Halla la matriz $A+A^2+A^3$ e interprétala.

a) $A=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\1&0&0&1&0\\1&0&0&1&0\\1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$

b) $A^2=\begin{pmatrix}3&1&1&2&1\\1&2&2&1&1\\1&2&2&1&1\\2&1&1&4&0\\1&1&1&0&1\end{pmatrix}$

Sus elementos representan el número de conexiones que hay entre los puntos con una escala, por ejemplo, $a_{32}=a_{23}=2$ significa que hay dos maneras de conectar los puntos B y C con una escala, en concreto $B-A-C$ y $B-D-C$.

$A^3=\begin{pmatrix}4&5&5&6&2\\5&2&2&6&1\\5&2&2&6&1\\6&6&6&4&4\\2&1&1&4&0\end{pmatrix}$

Sus elementos representan el número de conexiones que hay entre los puntos con dos escalas, por ejemplo, $a_{41}=a_{14}=6$ significa que hay seis maneras de conectar los puntos A y D con dos escalas, en concreto $A-B-A-D$, $A-C-A-D$, $A-D-A-D$, $A-D-B-D$, $A-D-C-D$ y $A-D-E-D$.

c) $M+M^2+M^3=\begin{pmatrix}7&7&7&9&3\\7&4&4&8&2\\7&4&4&8&2\\9&8&8&8&5\\3&2&2&5&1\end{pmatrix}$

Sus elementos representan el número de conexiones que hay entre los puntos con un máximo de dos escalas, por ejemplo, $a_{13}=a_{31}=7$ significa que hay siete maneras de conectar los puntos A y C con un máximo de dos escalas, en concreto $A-C$ (conexión directa, sin escalas), $A-D-B$ (conexión con una escala), $A-B-A-C$, $A-D-A-C$, $A-C-A-C$, $A-C-D-C$ y $A-B-D-C$ (conexiones con dos escalas).

127. **En una fábrica se utiliza, para la fabricación de envases, cartón y plástico. Los envases de tipo *A* se fabrican con 20 g de cartón y 5 de plástico. Los envases de tipo *B* se fabrican con 15 g de cartón y 10 de plástico.**

a) Escribe una matriz que recoja la información sobre tipos de envases y cantidad de material de cada tipo necesario.

b) El plástico cuesta 3 céntimos el gramo, y el cartón 2, céntimos el gramo. Escribe la matriz de precios y calcula, operando con matrices, la matriz que da el coste de cada tipo de envase.

c) En una semana se necesitan 200 envases de tipo *A* y 300 de tipo *B*. Calcula, operando con matrices, la cantidad necesaria de cada material.

a) $M = \begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$

b) La matriz de precios es $N = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, la matriz que da el coste de cada tipo de envase es $MN = \begin{pmatrix} 55 \\ 60 \end{pmatrix}$.

c) La matriz de necesidades de material viene dada por $M^t \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8500 \\ 4000 \end{pmatrix}$, es decir, necesitamos 8,5 kg de cartón y 4 kg de plástico.

128. **Halla la matriz inversa de la matriz:**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Aplicando el método de Gauss-Jordan tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 - F_2}{\to} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - F_3}{\to}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - F_4}{\to} \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_4 \to F_4 - F_5}{\to}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

129. Si A es una matriz cuadrada de orden n.

a) Comprueba que $A+A^t$ es una matriz simétrica.

b) Comprueba que $A-A^t$ es una matriz antisimétrica.

c) Demuestra que toda matriz cuadrada se puede expresar como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

d) Descompón la matriz B como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica, siendo:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $(A+A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t \Rightarrow A + A^t$ es simétrica.

b) $(A-A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -A + A^t = -(A-A^t) \Rightarrow A - A^t$ es antisimétrica.

c) $A=\frac{1}{2}(A+A^t)+\frac{1}{2}(A-A^t)$, donde $\frac{1}{2}(A+A^t)$ es simétrica y $\frac{1}{2}(A-A^t)$ es antisimétrica.

d) $B_1=\frac{1}{2}(B+B^t)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ es simétrica, $B_2=\frac{1}{2}(B-B^t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=B_1+B_2$.

130. Para una matriz cuadrada, se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, A y B son matrices cuadradas 2 x 2.

a) Comprueba que se verifica:

$$\text{Traza}(A+B)=\text{Traza}(A)+\text{Traza}(B)$$

$$\text{Traza}(AB)=\text{Traza}(BA)$$

b) Utilizando los resultados anteriores, demuestra que es imposible tener $AB-BA=I$ donde I denota la matriz identidad.

c) Encuentra dos matrices para las que:

$$\text{Traza}(AB)\neq\text{Traza}(A)\cdot\text{Traza}(B)$$

a) Si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ tenemos $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

y $BA=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$, con lo que

$$\text{Traza}(A+B)=(a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22})=(a_{11}+a_{22})+(b_{11}+b_{22})=\text{Traza}(A)+\text{Traza}(B)$$

$$\text{Traza}(AB)=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})=(a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12})+(a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22})=\text{Traza}(BA)$$

b) Según el apartado anterior, $\text{Traza}(AB-BA)=\text{Traza}(AB)-\text{Traza}(BA)=0$, pero $\text{Traza}(I)=2$, por lo que $AB-BA$ nunca puede ser igual a la matriz identidad.

c) Basta tomar $A=B=I$, ya que $\text{Traza}(AB)=\text{Traza}(I^2)=\text{Traza}(I)=2$ y $\text{Traza}(A)\cdot\text{Traza}(B)=2\cdot 2=4$.

131. Considera el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2.

a) Escribe la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ como combinación lineal de las matrices $B_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

b) Halla una matriz que no se pueda escribir como combinación lineal de B_1 y B_2.

c) Encuentra cuatro matrices del espacio vectorial tales que cualquier matriz se pueda expresar como combinación lineal de ellas.

a) $A=\lambda_1 B_1+\lambda_2 B_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_1+\lambda_2\\ \lambda_1+\lambda_2 & 2\lambda_2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=2\\ \lambda_1+\lambda_2=1 \Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=-1 \Rightarrow A=2B_1-B_2\\ 2\lambda_2=-2\end{cases}$

b) Observemos que en cualquier combinación lineal de B_1 y B_2, $\lambda_1 B_1+\lambda_2 B_2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_1+\lambda_2\\ \lambda_1+\lambda_2 & 2\lambda_2\end{pmatrix}$, los elementos de la diagonal secundaria deben coincidir, por lo que, por ejemplo, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ no es combinación lineal de B_1 y B_2.

c) Cualquier matriz de orden 2 se puede escribir como combinación lineal de las matrices:

$$C_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad C_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad C_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad C_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

En efecto, $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=aC_1+bC_2+cC_3+dC_4$.

132. Considera la matriz *M* de dimensión *m* x *n* y los productos M^tM y MM^t. Demuestra que en los dos casos la matriz producto es simétrica.

En efecto, M^tM y MM^t son simétricas, de hecho una es la traspuesta de la otra, ya que $\left(M^tM\right)^t=\left(M^t\right)^t M^t=MM^t$.

133. Se consideran las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{pmatrix}$$

Demuestra que tienen la misma forma:

a) La suma de dos matrices de esa forma.

b) El producto de una matriz de esa forma por un número.

c) El producto de dos matrices de esa forma.

a) $\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a' & 0 & 0\\ b' & a' & 0\\ c' & b' & a'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+a' & 0 & 0\\ b+b' & a+a' & 0\\ c+c' & b+b' & a+a'\end{pmatrix}$

b) $\lambda\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a & 0 & 0\\ \lambda b & \lambda a & 0\\ \lambda c & \lambda b & \lambda a\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a' & 0 & 0\\ b' & a' & 0\\ c' & b' & a'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa' & 0 & 0\\ ab'+ba' & aa' & 0\\ ac'+bb'+ca' & ab'+ba' & aa'\end{pmatrix}$

134. **Dos matrices son anticonmutativas si se verifica que:**

$$\boldsymbol{AB} = -\boldsymbol{BA}$$

a) Comprueba que son anticonmutativas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

b) Determina en qué casos dos matrices cuadradas diagonales de orden 2 no nulas son anticonmutativas.

a) $AB = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}$ y $BA = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que A y B son anticonmutativas.

b) Sean $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$, tenemos:

$$AB = -BA \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 \\ 0 & a_2b_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 \\ 0 & a_2b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1b_1 = 0 \\ a_2b_2 = 0 \end{cases}$$

Para que se cumplan estas condiciones y además A y B no sean nulas, debe ser $a_1 = b_2 = 0$, $a_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ o $a_2 = b_1 = 0$, $a_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$. Es decir, para que dos matrices cuadradas diagonales de orden dos no nulas sean anticonmutativas, tienen que ser de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. **Halla una matriz diagonal de orden 4 con $\boldsymbol{a_{ii} = (-1)^i \cdot i^2}$ para cualquier *i*.**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

2. **Dadas las matrices:**

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) $M\left(N + P^t\right)$ **b)** $N^tM + 3P$ **c)** $\left(M^2 - 2I\right)N$

a) $M\left(N + P^t\right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $N^tM + 3P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -3 & 7 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 16 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\left(M^2 - 2I\right)N = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 10 & 5 & -4 \\ 7 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 5 & -4 \\ 7 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -13 \\ -1 & 2 \\ -13 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Halla una matriz *X* tal que $AX + B = I + X$, siendo *A* y *B* las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que $AX + B = I + X \Rightarrow AX - X = I - B \Rightarrow (A - I)X = I - B$, por tanto, si $A - I$ tiene inversa, tendremos $X = (A - I)^{-1}(I - B)$.

Intentemos calcular la inversa de $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to 2F_1 + F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_1 \to \frac{1}{2}F_1 \\ F_2 \to -\frac{1}{6}F_2}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{array}\right) \Rightarrow (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = (A - I)^{-1}(I - B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4. **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^n para cualquier valor natural de *n*.**

Calculemos las primeras potencias de *A* para poder formular una hipótesis sobre el valor de A^n:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ldots,\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostremos nuestra hipótesis por el método de inducción:

Primero comprobemos que la hipótesis es cierta si $n = 1$, lo que es inmediato, ya que *A* coincide con la expresión de A^n si $n = 1$.

Comprobemos ahora que la hipótesis es cierta para $n + 1$ suponiendo que lo es para *n*:

$$A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 2n + 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 2(n+1) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **Determina el rango de las siguientes matrices, sin utilizar el método de Gauss:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de *A* es 2, ya que sus dos filas no son proporcionales, es decir, son linealmente independientes.

El rango de *B* es 2, ya que F_1 y F_2 no son proporcionales y $F_3 = 2F_1 + F_2$.

El rango de *C* es 2, ya que F_1 y F_4 no son proporcionales, F_2 es una fila nula y $F_3 = -2F_1$.

6. **Calcula el rango de la matriz *M* utilizando el método de Gauss:**

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\2&4&1&0\\-3&-1&6&-5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\2&4&1&0\\-3&-1&6&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2\to F_2-2F_1\\F_3\to F_3+3F_1}]{}\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\0&-2&-3&2\\0&8&12&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3+4F_2]{}\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\0&-2&-3&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{rg}(M)=2$$

7. **Halla el valor de *a* y *b* para que la matriz** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&a&-b\\1&2&0\end{pmatrix}$ **sea la inversa de la matriz** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0&b\\-1&0&-b\\a&1&-a\end{pmatrix}$**.**

Queremos que $AB=I$, por tanto:

$$\begin{pmatrix}a+b&a+2b&0\\-1-b&-1-2b&0\\0&0&-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+b=1\\a+2b=0\\-1-b=0\\-1-2b=1\\-b=1\end{cases}\Rightarrow a=2,\ b=-1$$

8. **Halla la inversa de la matriz *N* utilizando el método de Gauss-Jordan.**

$$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&2&0\\1&3&1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&1&0&0\\-1&2&0&0&1&0\\1&3&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2\to 2F_2+F_1\\F_3\to 2F_3-F_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&1&0&0\\0&4&1&1&2&0\\0&6&1&-1&0&2\end{array}\right)\xrightarrow[F_3\to 2F_3-3F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&1&1&0&0\\0&4&1&1&2&0\\0&0&-1&-5&-6&4\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to F_1+F_3\\F_2\to F_2+F_3}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&-4&-6&4\\0&4&0&-4&-4&4\\0&0&-1&-5&-6&4\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1\to\frac{1}{2}F_1\\F_2\to\frac{1}{4}F_2\\F_3\to -F_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&-3&2\\0&1&0&-1&-1&1\\0&0&1&5&6&-4\end{array}\right)\Rightarrow N^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-3&2\\-1&-1&1\\5&6&-4\end{pmatrix}$$

9. **Dadas las matrices** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\3&0&2\\1&3&5\end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&2\\2&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}$ **resuelve el sistema matricial** $\begin{cases}2X+3Y=A\\X+2Y=B\end{cases}$ **donde *X* e *Y* son matrices cuadradas de orden 3.**

Restándole a la primera ecuación el doble de la segunda obtenemos $-Y=A-2B\Rightarrow Y=2B-A$, sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos $X+2(2B-A)=B\Rightarrow X=2A-3B$, por tanto:

$$X=2A-3B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-3&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\qquad Y=2B-A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. **Con las matrices *A*, *B*, *C* y *D* se pueden hacer las operaciones $(A+D)C^t$, CB^t y B^2. Entonces se puede hacer la operación:**

A. $(CBD)^t$

B. $C(D+A)B$

C. $(BA^tD)^2$

D. $(A^t+D^t)^2C$

Sean, respectivamente, m_1 x n_1, m_2 x n_2, m_3 x n_3 y m_4 x n_4 la dimensión de *A*, *B*, *C* y *D*.

Como se puede calcular B^2, la matriz *B* es cuadrada, es decir, $m_2 = n_2$.

Como se puede calcular $A+D$, *A* y *D* tienen la misma dimensión, es decir, $m_1 = m_4$ y $n_1 = n_4$. Además, como se puede calcular $(A+D)C^t$, el número de columnas de $A+D$ coincide con el número de filas de C^t, es decir, $n_1 = n_3$.

Por último, como se puede calcular CB^t, el número de columnas de *C* coincide con el número de filas de B^t, es decir, $n_3 = n_2$.

En resumen, las dimensiones de *A*, *B*, *C* y *D* son, respectivamente, m_1 x n_1, n_1 x n_1, m_3 x n_1 y m_1 x n_1.

De este modo, $(CBD)^t$ no necesariamente se puede calcular, ya que *BD* solo se podría calcular si $n_1 = m_1$, lo que no tenemos asegurado. Tampoco es seguro que se pueda calcular $C(D+A)B$, ya que, de nuevo, $C(D+A)$ solo se podría calcular si $n_1 = m_1$. Tampoco es seguro que se pueda calcular $(A^t+D^t)^2C$, ya que sería necesario que $m_1 = m_3$, lo que no tenemos asegurado.

En cambio $(BA^tD)^2$ se puede calcular, ya que el número de columnas de *B* coincide con el de filas de A^t y el número de columnas de A^t coincide con el de filas de *D* (con lo que se puede calcular BA^tD), además, BA^tD tendrá dimensión n_1 x n_1, con lo que se puede calcular $(BA^tD)^2$.

Por tanto, la respuesta correcta es C.

2. **Si la matriz *A* tiene una de sus *n* filas nula y se puede hacer el producto *AB*, entonces:**

A. *AB* tiene una fila nula.

B. *AB* tiene una columna nula.

C. *A* es regular.

D. rg(*A*) = *n*

A es obviamente correcta, si la fila *i* de *A* es nula, la fila *i* de *AB* será nula.

En cambio B, C y D son falsas, basta considerar el ejemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = I_2$.

3. **Si la matriz *A*, de orden *n*, es invertible entonces la matriz 3*A*:**

A. Es invertible y su inversa es $3A^{-1}$.

B. Es invertible y su inversa es 3^nA^{-1}.

C. Es invertible y su inversa es $\frac{1}{3}A^{-1}$.

D. No necesariamente es invertible.

La respuesta correcta es C, ya que $(3A)\left(\frac{1}{3}A^{-1}\right) = 3\cdot\frac{1}{3}AA^{-1} = I$.

4. **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}$**:**

A. Si $abc = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) < 2$

B. Si $ab = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) < 2$

C. Si $ac = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) < 2$

D. Si $bc = 0 \Rightarrow \text{rg}(A) < 2$

La respuesta correcta es B, ya que si $ab = 0$, tendremos $a = 0$ o $b = 0$, con lo que bien una fila bien una columna de A será nula.

En cambio A, C y D son falsas, basta considerar $a = 1, b = 1, c = 0$, con $\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

5. ***A* es una matriz triangular de orden 4, no diagonal y no nula, entonces:**

A. $\text{rg}(A) = 4$

B. A tiene inversa.

C. A no es antisimétrica.

D. $A + A^t$ es simétrica.

A no es cierta, basta considerar el ejemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Tampoco es cierta B, ya que es equivalente a A.

C sí es cierta, ya que si A fuera antisimétrica y, por ejemplo, triangular superior, todos los elementos por encima de la diagonal principal serían nulos por ser triangular superior y, por tanto, también los elementos por debajo de la diagonal principal y los de la diagonal principal serían nulos por ser antisimétrica, en contradicción con el hecho de que A es no nula.

También D es cierta, de hecho es cierta para cualquier matriz cuadrada A, ya que:

$$\left(A + A^t\right)^t = A^t + \left(A^t\right)^t = A^t + A = A + A^t$$

Por tanto, las respuestas correctas son C y D.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **Sea *A* una matriz cuadrada de orden 3.**

1. A tiene únicamente cuatro elementos no nulos.

2. $\text{rg}(A) \geq 2$

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. Nada de lo anterior.

1 no implica 2, basta considerar $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que cumple 1 pero no 2, ya que el rango de A es 1.

2 tampoco implica 1, basta considerar $A = I_3$, que cumple 2, ya que su rango es 3, pero no 1.

Por tanto, la respuesta correcta es D.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Se quiere calcular el rango de la matriz no nula *A* de dimensión 3 x 4. Para ello se obtiene una matriz equivalente escalonada por filas *B* de la que se sabe:**

1. El número de filas. **2.** b_{22} **3.** b_{33}

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. No puede eliminarse ningún dato.

El número de filas de *B* coincide con el número de filas de *A*, por lo que el dato 1 es innecesario, la respuesta correcta es A.

El solucionario de **Matemáticas II de 2.º de Bachillerato** forma parte del Proyecto Editorial de Educación de SM. En su realización ha participado el siguiente equipo:

Autoría
Fernando Alcaide, Joaquín Hernández, María Moreno, Esteban Serrano, Vicente Rivière, José Miguel Gómez

Edición
Fernando de Blas, Oiana García, Fernando García, Arturo García

Corrección científica
Juan Jesús Donaire

Corrección
Javier López

Ilustración
Juan Antonio Rocafort, Bartolomé Seguí

Diseño de cubierta e interiores
Estudio SM

Responsable de proyecto
Arturo García

Coordinación editorial de Matemáticas
Josefina Arévalo

Dirección de Arte del proyecto
Mario Dequel

Dirección editorial
Aída Moya

Impreso en la UE / *Printed in EU*

Este libro está impreso en papeles procedentes de bosques gestionados de manera sostenible.