1) Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular A^2 y A^3
b) Halla una ley general para calcular A^n
c) Calcular A^{10}

Aplicamos el método de inducción:

Primer paso: Se calculan las primeras potencias de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Segundo paso: A partir del resultado anterior, suponemos que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tercer paso: Se comprueba el resultado para la siguiente potencia A^{n+1}

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular A^n
b) Calcular $A^{350} - A^{250}$

Aplicamos el método de inducción:

Primer paso: Se calculan las primeras potencias de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Segundo paso: A partir del resultado anterior, suponemos que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$$

Tercer paso: Se comprueba el resultado para la siguiente potencia A^{n+1}

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n+3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3(n+1) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{350} - A^{250} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1050 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 750 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula A^n

b) Halla $A^{22} - 12A^2 + 2A$

Aplicamos el método de inducción:

Primer paso: Se calculan las primeras potencias de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Segundo paso: A partir del resultado anterior, suponemos que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tercer paso: Se comprueba el resultado para la siguiente potencia A^{n+1}

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a + n \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{22} - 12A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 22 \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 12\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 22a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 24a \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

4) Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula A^n

b) Halla $A^{250} + A^{20}$

Aplicamos el método de inducción:

Primer paso: Se calculan las primeras potencias de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Segundo paso: A partir del resultado anterior, suponemos que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

Tercer paso: Se comprueba el resultado para la siguiente potencia A^{n+1}

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{250} + A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 250 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 270 & 2 \end{pmatrix}$$

5) Calcula A^n para todo valor de n entero positivo y A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos el método de inducción:

Primer paso: Se calculan las primeras potencias de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Segundo paso: A partir del resultado anterior, suponemos que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tercer paso: Se comprueba el resultado para la siguiente potencia A^{n+1}

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6) Calcula A^n para todo valor de n entero positivo y A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos el método de inducción:

Primer paso: Se calculan las primeras potencias de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Segundo paso: A partir del resultado anterior, suponemos que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tercer paso: Se comprueba el resultado para la siguiente potencia A^{n+1}

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula A^n

b) Halla A^{35}

Aplicamos el método de inducción:

Primer paso: Se calculan las primeras potencias de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7}+\frac{1}{7} & \frac{1}{7}+\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7}+\frac{1}{7} & \frac{2}{7}+\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Segundo paso: A partir del resultado anterior, suponemos que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{7} & \frac{n}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tercer paso: Se comprueba el resultado para la siguiente potencia A^{n+1}

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{7} & \frac{n}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{7} & \frac{n+1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{7} & \frac{n}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{35} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{35}{7} & \frac{35}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8) Calcula A^n para todo valor de n entero positivo y A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ A^n = \begin{cases} A & \text{si} \quad n = 1 \\ A^2 & \text{si} \quad n = 2 \\ 0 & \text{si} \quad n \geq 3 \end{cases}$$

9) Se considerann las siguientes:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{x} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

a) Determina x e y para que MN = NM

b) Halla M^{1995} y M^{1996}

1) $$M \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

2) $$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = I \cdot M = M$$

$$M^4 = M^3 \cdot M = M \cdot M = M^2 = I$$

$$M^5 = M^4 \cdot M = I \cdot M = M$$

$$\Rightarrow \ M^n = \begin{cases} I & \text{si} \quad n = \text{par} \\ M & \text{si} \quad n = \text{impar} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \begin{cases} M^{1995} = M \\ M^{1996} = I \end{cases}$$

10) Halla todas las matrices X de la siguiente forma

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

tales que:

$$\mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a^2 = b^2 = c^2 = 1 \\ a+b = b+c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \\ c = \pm 1 \end{cases}$$

Para $a = +1 \quad \Rightarrow \quad b = -1 \quad \Rightarrow \quad c = +1$

Para $a = -1 \quad \Rightarrow \quad b = +1 \quad \Rightarrow \quad c = -1$

Por lo tanto, la matriz X puede ser de las dos siguientes formas:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

11) Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calcular B^3 y A^3

(Sugerencia: A=B+I)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el producto con la matriz identidad es conmutativo

aplicamos la fórmula del binomio al cubo:

$$A^3 = (B+I)^3 = B^3 + 3B^2I + 3BI^2 + I^3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12) Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Prueba que $A^n = 2^{n-1} \cdot A$

Aplicamos el método de inducción:

Primer paso: Se calculan las primeras potencias de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = 2A \cdot A = 2A^2 = 2 \cdot 2A = 4A = 2^2 \cdot A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = 4A \cdot A = 4A^2 = 4 \cdot 2A = 8A = 2^3 \cdot A$$

Segundo paso: A partir del resultado anterior, suponemos que:

$$A^n = 2^{n-1} \cdot A$$

Tercer paso: Se comprueba el resultado para la siguiente potencia A^{n+1}

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = 2^{n-1} \cdot A \cdot A = 2^{n-1} \cdot A^2 = 2^{n-1} \cdot 2A = 2^n \cdot A$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$A^n = 2^{n-1} \cdot A$$

13) Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ Calcula A^n

Aplicamos el método de inducción:

Primer paso: Se calculan las primeras potencias de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Segundo paso: A partir del resultado anterior, suponemos que: $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Tercer paso: Se comprueba el resultado para la siguiente potencia A^{n+1}

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que: $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$