5 LÍMITES DE FUNCIONES Y CONTINUIDAD

ACTIVIDADES

1 **Determina, si existe, el límite en $x = 2$ de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 2 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Sol: 1

2 **Calcula, si existe, el límite en $x = 0$ de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sol: $\nexists$

3 **Escribe la ecuación de la asíntota vertical de la función propuesta en el ejercicio anterior.**

Sol: $x = 0$.

4 **Dada la función $f(x) = \dfrac{3-x}{(x-1)^2}$, calcula $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.**

Sol:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3-x}{(x-1)^2} = 3 \qquad \lim_{x \to 1} \frac{3-x}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

5 **Calcula: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + |x|}$**

Sol: 1

6 **Determina los límites laterales de la función $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x+1}$ en $x = -1$.**

Sol:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(-1) = -1$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} 1 = 1$$

7 **Calcula, si las hay, las asíntotas verticales de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ ***c)*** $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ ***d)*** $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

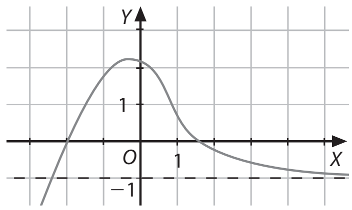
a) $x = 1$ y $x = -1$.

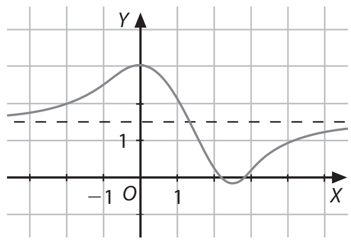
b) No tiene asíntotas verticales.

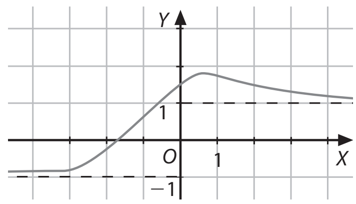
c) $x = 1$.

d) $x = 1$.

8 **Indica las asíntotas horizontales de las funciones de las figuras.**







a) Por la derecha: $y = -1$

b) $y = 1{,}5$

c) Por la izquierda: $y = -1$, por la derecha: $y = 1$

9 **Halla las ecuaciones de las asíntotas horizontales de estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{1 - 2x^2}{x^2 - 1}$ ***d)*** $f(x) = \dfrac{1}{1 - |x|}$

b) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{2x + 1}$ ***e)*** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3}$ ***f)*** $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 2}$

a) $y = -2$.

b) $y = \dfrac{3}{2}$

c) $y = 0$

d) $y = 0$

e) $y = 1$

f) Por la izquierda $y = -1$, por la derecha $y = 1$.

10 **Construye gráficas que cumplan las siguientes condiciones.**

a) **Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = [-1, +\infty)$**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3,\ \lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty,\ f(3) = 3,\ \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2,\ f^{-1}(0) = \{0, 2\}$

b) **Dom $f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$, Rec $f = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (3, +\infty)$**

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3,\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0,$

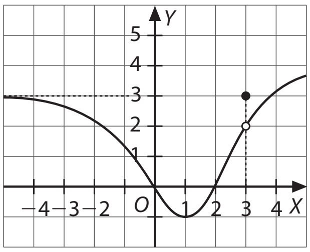
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(Ten en cuenta que $f(x) < 0$ si $x < 0$ y que $f(x) > 0$ si $x > 0$.)

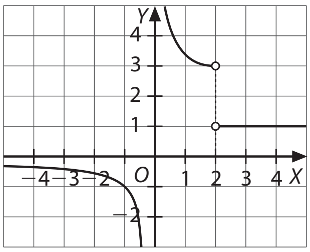
c) **Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = \mathbb{R}$**

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3,\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

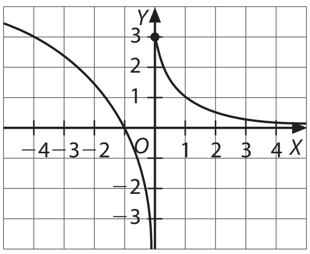
a)



b)



c)



11 **Resuelve cada uno de los límites siguientes por el método que consideres más adecuado.**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{2/x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 2)}{x - 2}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x^2 + 1}{5x^2 - 2}\right)^{\frac{x-1}{2}}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 5x} - x$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 1}{x - 2}\right)^{\sqrt{x^2 + 5x} - x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 - x} - 1}$

g) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$

h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{2}}{x^2 + x - 2}$

j) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x\sqrt{x}}{1 - x^2}$

k) $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{\ln (4x - 1)}{2x - 1}$

l) $\lim\limits_{x \to 0} (2x + 1)^{1/x}$

m) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(2x - 6)^2}{\sqrt{2x} - \sqrt{6}}$

n) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x - 6}{\sqrt{2x} - \sqrt{6}}$

ñ) $\lim\limits_{x \to 1/2} e^{\frac{1}{2x - 1}}$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x} + 3x}{2^x}$

p) $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{x^2 - 1}{3}\right)^{\frac{1}{x + 1}}$

q) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln (2x^2 + 1)}{2x}$

a) 1

b) 0

c) $+\infty$

d) $5\sqrt{2} - 5$

e) 1

f) -2

g) $\dfrac{1}{4}$

h) 3

i) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\dfrac{3}{4}$

k) 2

l) e^2

m) 0

n) $2\sqrt{6}$

ñ) $\nexists$

o) $+\infty$

p) $e^{-\frac{1}{3}}$

q) 0

12 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican.**

a) **$f(x) = E(x)$, en $x = \dfrac{2}{3}$ y en $x = 1$.**

b) **$f(x) = \dfrac{2 - x}{x^2 - 2x}$, en $x = 0$ y en $x = 2$.**

c) **$f(x) = 4 - \ln x$, en $x = 0$ y en $x = 4$.**

d) **$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$, en $x = 1$.**

a) En $x = \dfrac{2}{3}$ es continua; en $x = 1$ no es continua.

b) En $x = 0$ y en $x = 2$ no existe imagen.

c) En $x = 0$ no es continua, en $x = 4$ es continua.

d) No es continua, puesto que no está definida en $x = 1$.

13 **Indica en qué casos es posible salvar la discontinuidad en las funciones de la actividad anterior.**

Sol: En ***b)*** se puede salvar la discontinuidad en el punto $x = 2$ y en ***d)***

14 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x}{x^3 - 1}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x + 2} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{2 - x}}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

f) $f(x) = \dfrac{\ln (1 - x^2)}{(x - 2)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$. Es continua en su dominio.

b) Es continua en $\mathbb{R}$.

c) Es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

d) Dom $f = (-\infty, 0) \cup (0, 2)$. La función es continua en su dominio.

e) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$. La función es continua en su dominio.

f) Dom $f = (-1, -1/2) \cup (-1/2, 1)$. La función es continua en su dominio.

15 **Estudia para qué valores de a son continuas en $\mathbb{R}$ estas funciones.**

a) $f(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 + ax + 2 & \text{si } x < -1 \\ (1-a)x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+|x|}{1-x} & \text{si } x < -1 \\ a & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{-2+2\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

c) $f(x) \begin{cases} 1 + a^x & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(x^2 + a) & \text{si } x > 0 \ (a > 0) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2 - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) $a = -3$.

b) $a = 1$

c) $a = e^2$.

d) $a = 2$.

16 **Clasifica las discontinuidades de la función.**

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$$

Sol: Discontinuidad evitable en $x = 0$.

Discontinuidad asintótica en $x = -1$.

Discontinuidad asintótica en $x = 1$.

17 **Clasifica las discontinuidades de las funciones de la actividad 14. Cuando la discontinuidad sea evitable, calcula el valor que debe asignarse a la función para salvar la discontinuidad.**

a) En $x = 1$, discontinuidad asintótica.

b) No hay discontinuidades.

c) En $x = -1$, discontinuidad de salto.

d) En $x = 0$, discontinuidad evitable: si $f(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, f es continua en $(-\infty, 2)$.

e) En $x = 0$, discontinuidad de salto.

f) En $x = 1$ y $x = -1$, discontinuidad asintótica y esencial. En $x = -1/2$, discontinuid asintótica.

18 **Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - b}{2x^3 - ax - 2x}$ averigua a y b sabiendo que en $x = 2$ la función presenta una discontinuidad evitable. A continuación, calcula y clasifica las demás discontinuidades.**

Sol: $b = 2$; $a = 3$

En $x = 0$, discontinuidad asintótica.

En $x = -\dfrac{1}{2}$ discontinuidad asintótica

Ejercicios y problemas

Cálculo de límites

19 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{x^2 + 5}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{2x^2 - 2x - 4}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 1}{(x-2)^2}$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x + 1}{x + 2}$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-x^2 - x + 6}{(x-2)^2 x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - x}{x^3}$

h) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)^2}{x^2 - 4}$

a) 0

b) 12

c) $\dfrac{2}{3}$

d) $+\infty$

e) ∞

f) ∞

g) ∞

h) 0

20 **Halla los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{6x+4}{x^2-4} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x+3}{x-1} \cdot \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to 1/2} \left(\dfrac{2x+1}{2x+2} \right)^{\frac{2x-1}{\sqrt{2x-1}}}$

d) $\lim\limits_{x \to 1/3} \left(\dfrac{2}{1-x} \right)^{\frac{x}{3x-1}}$

a) $\dfrac{1}{2}$

b) -6

c) 1

d) $\nexists$

21 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1 - \sqrt{x+1}}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{2x}$

c) $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{3x + 3}{\sqrt{5x^2 + x}}$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 4x - 6}{3 - \sqrt{6+x}}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x - \sqrt{x}}}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$

a) -2

b) $\dfrac{1}{8}$

c) 0

d) -48

e) 0

f) $\dfrac{1}{4}$

22 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + x^2 - x + 1)$ *e)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 + 4x}}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + x^2 - x + 1)$ *f)* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 + 4x}}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4 - x^2}$ *g)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{2x^4 + 3}}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x^4 - x^2}$

a) $-\infty$ *e)* $\sqrt{2}$

b) $+\infty$ *f)* $-\sqrt{2}$

c) $\nexists$ *g)* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) 0

23 **Calcula los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{4x^2 + 1} - (2x + 1)\right]$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\sqrt{4x^2 + 1} - (2x + 1)\right]$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + x}\right)^{\sqrt{x^2 + 1} - x}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + x}\right)^{\sqrt{x^2 + 1} - x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 1} - x\right)$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 1} - x\right)$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{x}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{x}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{2 + x} - \sqrt{x}\right)$

j) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + \sqrt{2 + x}}{x + 1}$

a) -1 *f)* $+\infty$

b) $+\infty$ *g)* 0

c) 1 *h)* 0

d) $+\infty$ *i)* 1

e) 1 *j)* $\dfrac{3}{2}$

24 **Estudia el comportamiento de la siguiente función en los extremos de su dominio: $f(x) = |2 - 2^x|$**

Sol: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Hay una asíntota horizontal por la izquierda, $y = 2$.

25 **Calcula los límites cuando $x \to -1$ y $x \to 0$ de la siguiente función y encuentra sus asíntotas.**

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{|x^2 + x|}$$

Sol: $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$

Por tanto, $x = -1$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

Por tanto, en $x = 0$ hay una discontinuidad evitable.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$

Por consiguiente, $y = 1$ es una asíntota horizontal.

26 **Calcula los límites siguientes.**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{4x - 5}{x + 1}\right)^{\frac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2}\right)^{\sqrt{2x^2 + 1} - x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 1}{x} - \dfrac{x^3 - x^2 - x + 2}{x^2}\right)^{\frac{3 - x^2}{x}}$

a) $\nexists$

b) 1

c) e^{-2}

27 **Calcula el valor de a para que se verifiquen las siguientes igualdades.**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3ax^3 - 2ax^2 + ax - 1}{x^2 - 6x^3} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + ax} - \sqrt{2x^2 + 1}\right) = \sqrt{2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + ax + 2}{x^2 - 2x}\right)^{\frac{3x^2 - 1}{x}} = \dfrac{1}{e^3}$

a) $a = -2$

b) $a = 4$

c) $a = -3$

Continuidad de una función en un punto

28 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades.**

a) $f(x) = \ln|x + 1|$ *h)* $f(x) = \log(1 - x^2)$

b) $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x^2 + x - 1}$ *i)* $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2(x + 1)}$

c) $f(x) = \dfrac{|2x + 1|}{2x^2 - x - 1}$ *j)* $f(x) = \dfrac{2^{1/x}}{1 + x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{1}{x + 3}$ *k)* $f(x) = \dfrac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$ *l)* $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^x}$ *m)* $f(x) = \dfrac{|x| - 1}{x^2 - |x|}$

g) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$ *n)* $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x^2 + 2}}}{x^2 - 1}$

a) La función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$. La discontinuidad en $x = -1$ es asintótica.

b) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1/2\}$,

En $x = -1$, la discontinuidad es evitable.

En $x = 1/2$, la discontinuidad es asintótica.

c) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-1/2, 1\}$.

En $x = -1/2$, la función presenta una discontinuidad de salto.

En $x = 1$, la función presenta una discontinuidad asintótica.

d) La función es continua en $\mathbb{R} - \{2, -3\}$.

La discontinuidad es asintótica en ambos puntos.

e) La función es continua en $\mathbb{R}$.

f) La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad asintótica.

g) La función es continua en $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

En $x = 0$, la función presenta una disconti-nuidad evitable.

h) La función es continua en el intervalo $(-1, 1)$.
En $x = -1$ se tiene una discontinuidad asintótica y esencial en ese valor. En $x = 1$ la situación es análoga pero simétrica.

i) Es continua en $\mathbb{R} - \{0, -1\}$.
En $x = 0$ y en $x = -1$ la discontinuidad es asintótica.

j) Es una función continua en $\mathbb{R} - \{0, -1\}$.
En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad esencial, asintótica por la derecha.
En $x = -1$, la discontinuidad es asintótica.

k) La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.
En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad asintótica.

l) Escontinua en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.
En $x = 1$, la discontinuidad es asintótica.
No hay asíntota en $x = 0$.

m) Es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$, y en $x = 1$ y $x = -1$ hay discontinuidades evitables.
En $x = 0$, la función presenta una discontinuidad asintótica.

n) La función es continua en $\mathbb{R} - \{-2, -1, 1\}$.
En $x = 1$ y $x = -1$ hay discontinuidades asintóticas.
En $x = -2$ se obtiene también una discontinuidad asintótica, aunque solo por la derecha.

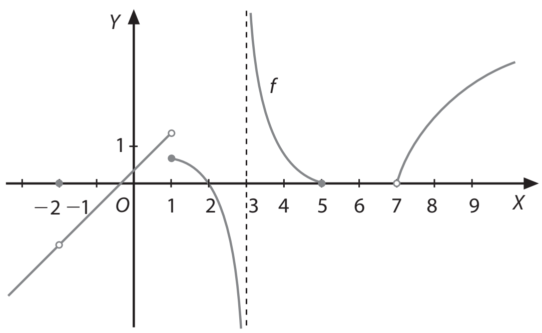
29 **Determina en qué casos es posible salvar la discontinuidad, cuando existan, en cada una de las funciones de la actividad anterior.**

Sol: En la función de la actividad ***b)*** se puede evitar la discontinuidad en $x = -1$, imponiendo que $f(-1) = -1/3$.

En la función de la actividad ***g)*** se puede evitar la discontinuidad en el punto $x = 0$, imponiendo que $f(0) = 1$.

En la función de la actividad ***m)*** se puede evitar la discontinuidad en $x = -1$, tomando $f(-1) = 1$, y también en $x = 1$, tomando $f(1) = 1$.

30 **A partir de su representación gráfica, clasifica las discontinuidades de la función *f*:**



Sol: Dom $f = (-\infty, 3) \cup (3, 5] \cup (7, +\infty)$

Discontinuidad evitable: $x = -2$

Discontinuidad de salto: $x = 1$

Discontinuidad asintótica: $x = 3$

Discontinuidad esencial no asintótica: $x = 5$ y $x = 7$

31 **Averigua, en cada uno de los siguientes casos, el valor que debe tomar la función en el punto indicado para que sea continua en él.**

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{3 - 3x^2}$ **en** $x = -1$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x - 1}$ **en** $x = 1$

c) $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{4 - x}}{3x}$ **en** $x = 0$

d) $f(x) = \left(2 - \dfrac{2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ **en** $x = 0$

e) $f(x) = \dfrac{2 - 2\sqrt{x+2}}{x+1}$ **en** $x = -1$

f) $f(x) = \left(\dfrac{x^2 + x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$ **en** $x = 1$

g) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-1/x^2}}$ **en** $x = 0$

a) $\dfrac{-1}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\dfrac{1}{12}$

d) En $x = 0$ la función presenta una discontinuidad esencial que no es posible evitar.

e) -1

f) $\sqrt[4]{e^3}$

g) 1

32 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades.**

a) $f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{2}{4 - x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ -(x-1)^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 + 2^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ |x^2 - x + 1| & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \ln|x - 1| & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{|x - 2|}{x - 2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{e^x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5 - \sqrt{25 - x}}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x + \ln(x+1)}{20x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Para $x < 2$ la función es continua.

Para $x > 2$, la función es continua.

f tiene en $x = 2$ una discontinuidad esencial, con una asíntota vertical por la derecha.

b) Para $x < 1$, la función es continua.

Para $x > 1$, la función es continua.

La discontinuidad en $x = 1$ es de salto finito.

c) La función es continua en $\mathbb{R}$.

d) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

La discontinuidad en $x = 0$ es de salto.

En $x = 2$ la disconti-nuidad que presenta también es de salto.

e) Para $x < 0$, la función es continua.

Para $x > 0$, la función es continua.

La discontinuidad en $x = 0$ es asintótica.

f) Para $x < 0$, la función es continua.

Para $x > 0$, la función es continua.

La discontinuidad es evitable en $x = 0$.

33 **Estudia para qué valores de *a*, o de *a* y *b*, son continuas estas funciones en los puntos que se indican.**

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ 3 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **en $x = 1$**

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a}{x - 2} & \text{si } x \ne 2 \\ a & \text{si } x = 2 \end{cases}$ **en $x = 2$**

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{x + 2} & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + 2ax + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **en $x = 0$**

d) $f(x) = \begin{cases} E(x^2) + 1 & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{x^2 - a}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **en $x = 2$**

e) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ x - a & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{a}{x} + b & \text{si } 1 \le x \end{cases}$ **en $x = 0$ y en $x = 1$**

a) $a = 1$

b) $a = 4$

c) $a = \dfrac{1}{2}$

d) $a = 4$.

e) $a = 1$, $b = -1$

34 **Halla *a* sabiendo que *f*: $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es continua en $[0, +\infty)$.**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{x^3 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$$

Sol: $a = 8$

35 **Calcula *a* para que $f(x) = \dfrac{-2x^2 + ax + 1}{2x^2 + 5x + 2}$ tenga en $x = -\dfrac{1}{2}$ una discontinuidad evitable. Estudia si presenta otra discontinuidad y clasifícala.**

Sol: $a = 1$

En $x = -2$, la discontinuidad es asintótica.

Continuidad de una función en un intervalo

36 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones en el intervalo que se indica.**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \le 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **en (0, 1) y [0, 1]**

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x - 1} & \text{si } x < 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ **en [0, 3]**

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - 2^{1/x}} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ **en [−1, 0]**

a) f es continua en (0, 1).

Pero no es continua en [0, 1].

b) No es continua en $x = 1$.

c) f no es continua en $x = 0$

Ejercicios de aplicación

37 **Construye gráficas de funciones que cumplan los siguientes requisitos.**

a) **Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ Rec $f = \mathbb{R}$**

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$f(0) = 0$

$f > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$

$f < 0$ en $(-2, 0)$

b) **Dom $f = \mathbb{R} - \{-2\}$ Rec $f = (-\infty, 4)$**

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 4$ $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

Asíntota horizontal por la izquierda: $y = 2$

Asíntota horizontal por la derecha: $y = 0$

Máximo relativo en $x = 0$

c) **Dom $f = \mathbb{R}$**

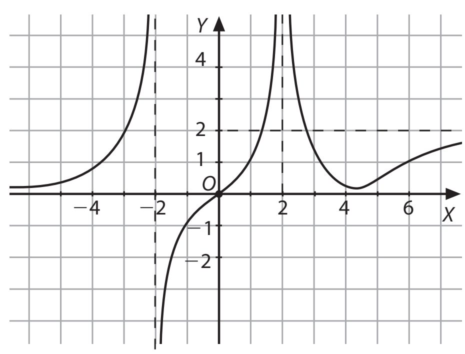
$f^{-1}(0) = \{-3, 1\}$ $f(-2) = -2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = 0$

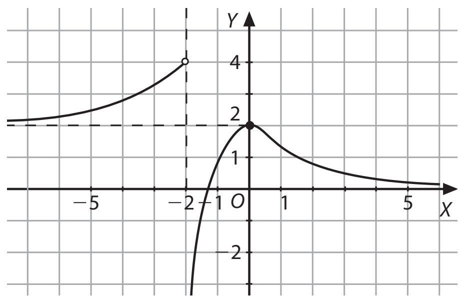
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

Mínimo relativo en $x = -1$

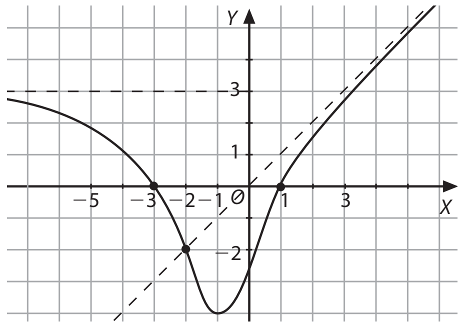
a)



b)



c)



38 **Sea la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Encuentra los valores de *a* y *b* para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

Sol: $a = -3$ y $b = 0$.

39 **Dada la función:** $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x^3 + 2ax^2 + bx + 3}$

a) **Determina *a* y *b* sabiendo que la función presenta una discontinuidad evitable en $x = 1$.**

b) **Define una función $g(x)$ que sea continua en $x = 1$ y que coincida en el dominio de definición de esta. Razona las respuestas.**

a) $a = -4$, $b = 4$

b) $g(x) = \dfrac{-4 - 4x}{x^2 - 7x - 3}$

40 **Di cuál de las siguientes afirmaciones es cierta y razona por qué:**

a) **Si una función *f* está acotada en un intervalo cerrado [*a, b*], entonces es continua en dicho intervalo.**

b) **Si una función *f* no está acotada en un intervalo cerrado [*a, b*], entonces no es continua en dicho intervalo.**

Sol: Es cierta la segunda afirmación.

41 **Sea *f* una función cuyo dominio es $\mathbb{R}$. Si *f* toma todos los valores comprendidos entre *f* (−2) y *f* (2), ¿se puede afirmar que la función *f* es continua en [−2, 2]?**

Sol: No se puede afirmar.

42 **Si una función *f* alcanza en el intervalo [*a, b*] sus extremos absolutos, *m* y *M*, y toma en [*a, b*] todos los valores comprendidos entre *m* y *M*, razona si esta condición es suficiente para asegurar que *f* es continua en [*a, b*].**

Sol: No.

1. Calcula el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2x}{x^2-4}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \left(2-\dfrac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{-3x^2+3x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2+x}{2x-x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+4x-2}}{1+x}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}}$

h) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-2x}}\right)$

i) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(3-\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}\right)^{x-\sqrt{2x^2+1}}$

j) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\ln x^2-8}{x-3}$

a) 0

b) $\dfrac{1}{4}$

c) $e^{-\frac{1}{2}}$

d) -1

e) 0

f) $-\sqrt{3}$

g) $-\infty$

h) 0

i) 1

j) $+\infty$

2. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}$ ***b)*** $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{3-3x^2}$ ***c)*** $f(x)=\dfrac{1}{2-2x^{1/x}}$

a) $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) La función es continua en $\mathbb{R}-\{-1, 1\}$.

c) La función es continua en $(0, 1) \cap (0, +\infty)$.

3. Encuentra los valores de *a* para que *f*(*x*) sea continua en el intervalo [−2, −1].

$$\begin{cases} x^2-2|x|-a & \text{si } x < -1 \\ (x-a)^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Sol: $a_1=-1$ y $a_2=-2$

4. Halla el valor de *a* y de *b* para que la función *f*(*x*) sea continua en *x* = 1.

$$f(x)=\begin{cases} x^3-bx+a & \text{si } x < 1 \\ ax+b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Sol: $b=1/2$, independientemente del valor que tome a.