FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO

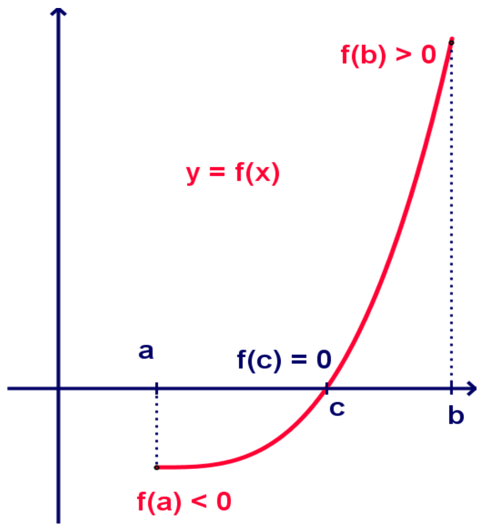
Teorema de Bolzano

Sea f una función que verifica las siguientes hipótesis:

1. Es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
2. Las imágenes en los extremos del intervalo tienen signo distinto: $f(a) \cdot f(b) < 0$

Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

Es decir la función corta al eje OX en el interior del intervalo



Teorema de Bolzano

Hipótesis: f es continua en $[a, b]$
$f(a).f(b) < 0$

Tesis: $\exists c \in (a, b) \,/\, f(c) = 0$

Aplicación del teorema de Bolzano

El Tª de Bolzano es útil para determinar en algunas ocasiones si una ecuación tiene soluciones reales:

Ejemplo 1

Demostrar que la ecuación $4x^3 - 4x + 1 = 0$ tiene una solución real.

1°. Se considera la función $f(x) = 4x^3 - 4x + 1$ continua en $\Re$ luego continua en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del Tª Bolzano:

$f(0) = 1 > 0$ $\qquad$ $f(1) = 1 > 0$

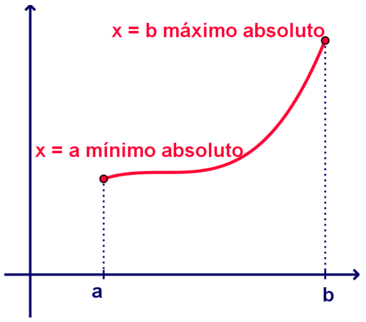
$f(-1) = 1 > 0$ $\qquad$ $f(-2) = -23 < 0$

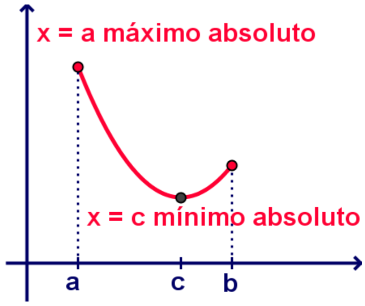
3°. Por tanto en el intervalo $[-2, -1]$ se cumplen las hipótesis del Tª de Bolzano, luego:

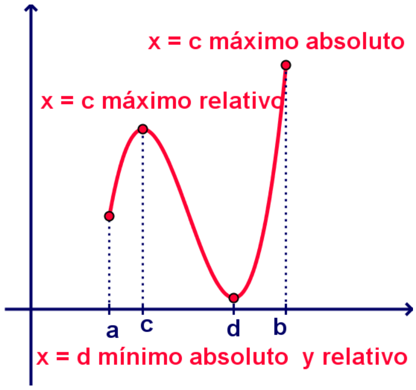
$\exists\, c \in (-2, -1)$ tal que $f(c) = 0$ que equivale a decir que la ecuación $4x^3 - 4x + 1 = 0$ tiene una solución c en el intervalo $(-2, -1)$

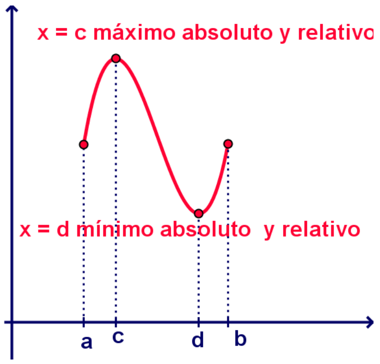
Teorema de Weierstrass

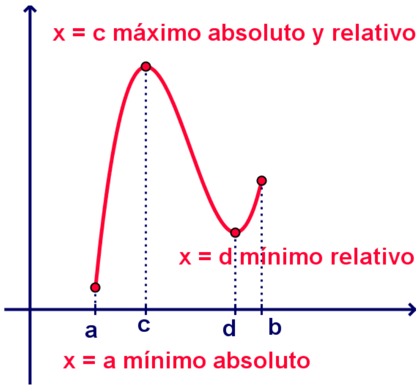
Toda función continua en un intervalo cerrado alcanza su máximo y mínimo absolutos











Como se observa en los dibujos anteriores los máximos y mínimos (extremos) absolutos se encuentran entre los relativos o los extremos del intervalo:

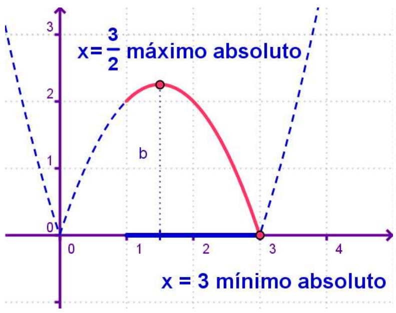
1º.- Se calculan los máximos y mínimos relativos

2º.- Se calculan las imágenes en estos máximos y mínimos relativos y en los extremos del intervalo

3º.- El mayor valor es el máximo absoluto y el menor valor es el mínimo absoluto.

Ejemplo 2

Sea la función $f(x) = |x^2 - 3x|$ Calcula los extremos absolutos de f en el intervalo $[1,3]$, ¿en qué Tª te basas para asegurar su existencia . ?



$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x & si \quad x \in [1,3] \\ x^2 - 3x & si \quad x \notin (1,3) \end{cases}$$

Por tanto $x \in [1,3] \Rightarrow f(x) = -x^2 + 3x$

1º.- $f'(x) = -2x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2} \in [1,3]$ es máximo relativo (parábola)

2º.- $f(1) = 2$, $f(3) = 0$ $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$

3º.- máximo absoluto: $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ mínimo absoluto: $(3,0)$

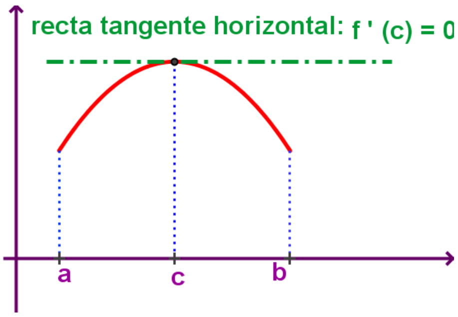
FUNCIONES DERIVABLES EN UN INTERVALO

Teorema de Rolle

Sea f una función que verifica las siguientes hipótesis:

1. Es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
2. Es derivable en el intervalo abierto (a, b)
3. Toma el mismo valor en los extremos del intervalo, es decir $f(a) = f(b)$

Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, es decir, con tangente horizontal.



Teorema de Rolle

Hipótesis : *f es continua en [a, b]*
f es derivable en (a, b)
f(a) = f(b)

Tesis: $\exists c \in (a, b) \,/\, f'(c) = 0$

Ejemplo 3

La función $f: [-2, 1] \to \Re$ definida por $f(x) = x^3 - 3x$ verifica las siguientes hipótesis:

1. Es continua en$[-2, 1]$ por ser polinómica
2. Es derivable en $(-2, 1)$ por se polinómica.
3. $f(-2) = f(1) = -2$

Entonces existe un punto c en el intervalo abierto $(-2, 1)$ con derivada nula en dicho punto. Vamos a comprobarlo:

$$f(x) = x^3 - 3x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3\,x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1 \quad \Rightarrow \boldsymbol{c = -1} \in (\boldsymbol{-2, 1})$$

Ejemplo 4

Determina k para que la función $f(x) = x^3 - kx + 10$ cumpla las hipótesis del Tª de Rolle en el intervalo $[-3, 1]$ y calcula el punto que vaticina el Tª.

➦ La continuidad y derivabilidad se cumplen puesto que es una función polinómica, luego la única condición que hay que imponer es la 3ª:

$$f(-3) = f(1) \quad \Rightarrow \quad (-3)^3 - k(-3) + 10 = 1^3 - k \cdot 1 + 10 \quad \Rightarrow \quad -27 + 3k + 10 = 11 - k$$

$$4k = 28 \quad \Rightarrow \quad k = 7 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^3 - 7x + 10$$

➦ El valor que vaticina el Tª es:

$$f(x) = x^3 - 7x + 10 \;\Rightarrow\; f(x) = 3x^2 - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1'53 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{c = -1'53} \in (\boldsymbol{-2, 1})$$

Ejemplo 5: **Aplicación del teoremas de Rolle**

Sea f una función derivable, demostramos que si $f'(x)=0$ tiene 1 única solución $\Rightarrow$ $f(x)=0$ tiene 2 soluciones como máximo

Solución

La demostración se hace por reducción al absurdo es decir negar "tiene 2 soluciones como máximo"

Se supone que $f(x)=0$ tiene 3 soluciones: $\exists\, c_1 < c_2 < c_3$ *tales que* $f(c_1)=f(c_2)=f(c_3)=0$

Por tanto se puede aplicar el Tª de Rolle a la función f en los intervalos $[c_1,c_2]$ y $[c_2,c_3]$

En ambos intervalos se cumplen las hipótesis del Tª Rolle, luego:

$\exists\, d \in (c_1,c_2)$ *y* $\exists\, d' \in (c_2,c_3)$ *tales que* $f'(d)=f'(d')=0$ en contradicción con "$f'(x)=0$ tiene 1 única solución" por tanto no se puede suponer que $f(x)=0$ tiene 3 soluciones

Por tanto $f(x)=0$ tiene 2 soluciones como máximo

Se demuestra en general que:

Sea f una función derivable, demostramos que si $f'(x)=0$ tiene n única soluciones $\Rightarrow$ $f(x)=0$ tiene $n+1$ soluciones como máximo

Ejemplo 6: **Aplicación conjunta de los teoremas de Bolzano y de Rolle**

Demuestra que la ecuación $x^5+5x+1=0$ sólo admite una solución real

Solución

1°. Se considera la función $f(x)=x^5+5x+1$ continua y derivable en $\Re$ luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del Tª Bolzano:

$f(0)=1>0$ $\qquad$ $f(1)=7>0$

$f(-1)=5>0$ $\qquad$ $f(-2)=-41<0$

3°. Por tanto en el intervalo $[-2,-1]$ se cumplen las hipótesis del Tª de Bolzano, luego:

$\exists\, c \in (-2,-1)$ tal que $f(c)=0$ que equivale a decir que la ecuación $x^5+5x+1=0$ tiene una solución c en el intervalo $(-2,-1)$

4°. Es única:

Se supone que tiene 2 soluciones: $\exists\, c_1 < c_2$ *tales que* $f(c_1)=f(c_2)=0$

En el intervalo $[c_1,c_2]$ se cumple las hipótesis del Tª Rolle, luego:

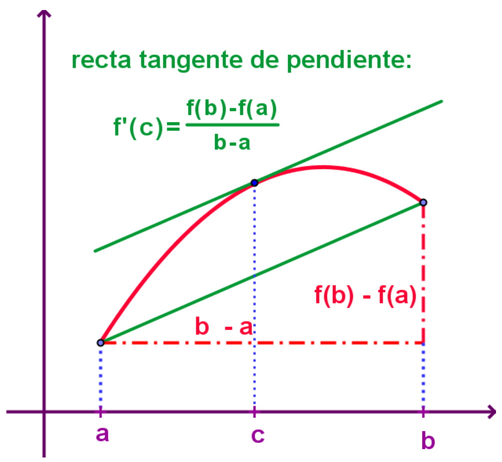
$\exists\, d \in (c_1,c_2)$ *tal que* $f'(d)=0$ pero $f'(x)=5x^4+5 \neq 0\ \forall\, x \in \Re$ por tanto no se puede suponer que $f(x)=0$ tiene 2 soluciones

Teorema del valor medio o de Lagrange

Sea f una función que verifica las siguientes hipótesis:

1. Es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$
2. Es derivable en el intervalo abierto (a,b)

Entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

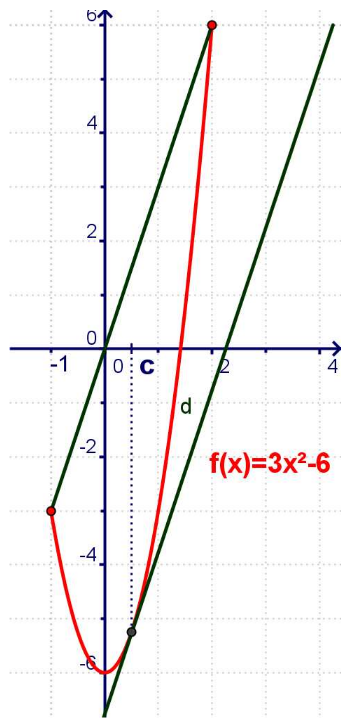


Teorema del Valor Medio

Hipótesis: f es continua en $[a, b]$
f es derivable en (a, b)

Tesis: $\exists c \in (a,b) \ / \ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Interpretación geométrica: Existe un punto en la curva cuya tangente es paralela a la cuerda que une los extremos.



Ejemplo 7

Sea $f: [-1,2] \to \Re$ la función definida por $f(x) = 3x^2 - 6$ que es continua y derivable en su dominio. Por el teorema del valor medio:

$$\exists\, c \in (-1,2) \ / \ f'(c) = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{6-(-3)}{3} = 3$$

$$f(x) = 3x^2 - 6 \Rightarrow f'(x) = 6x \Rightarrow 6x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{c = \frac{1}{2}}$$

Teorema de Cauchy

Si f y g son dos funciones continuas en $[a.b]$ y derivables en (a,b), existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Ejemplo 8

Halla el valor de c del intervalo $(0,3)$ donde se cumple la tesis del teorema de Cauchy, siendo $f(x) = -2x + 4$ y $g(x) = x^2 - 4$

- Las funciones son continuas y derivables en todo $\Re$ por ser funciones polinómicas

- $$\left.\begin{array}{l} f'(x) = -2 \Rightarrow f'(c) = -2 \\ g'(x) = 2x \Rightarrow g'(c) = 2c \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{-2}{2c} = \frac{-1}{c}$$

- Valores de las funciones en los extremos del intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 4 \ \ y \ \ f(3) = -2 \\ g(0) = -4 \ \ y \ \ g(3) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(3)-f(0)}{g(3)-g(0)} = \frac{-2-4}{5+4} = \frac{-2}{3}$$

- Luego $\frac{-2}{3} = \frac{-1}{c} \Rightarrow -2c = -3 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \in (0,3)$

Regla de L´Hôpital

Esta regla permite obtener fácilmente ciertos límites y dice:

$$Si\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\ \ y\ \ \exists\ \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \Rightarrow\ \exists\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

También se puede aplicar para cuando $x\to\infty$ y la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

La regla puede aplicarse una o más veces, mientras se mantenga la indeterminación.

Ejemplo 9

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{0}{0}\ indeterminación\ L'Hôp=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 10

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(1+x)-senx}{x.senx}=\frac{\mathrm{Ln}(1+0)-sen0}{0.sen0}=\frac{0}{0}\ (aplicamos\ la\ regla\ de\ L'Hôpital)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(1+x)-senx}{x.senx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{senx+x.\cos x}=\frac{\frac{1}{1+0}-\cos 0}{sen0+0.\cos 0}=\frac{0}{0}\ (aplicamos\ L'Hôpital)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}+senx}{\cos x+\cos x-x.senx}=\frac{\frac{-1}{(1+0)^2}+sen\,0}{\cos 0+\cos 0-0.sen\,0}=\frac{-1}{2}$$

Ejemplo 11

Se sabe que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{a}{2x}\right)$ es finito. Determina el valor de a y calcula el límite.

Solución

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{a}{2x}\right)\underline{\underline{\infty-\infty}}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x-a(e^x-1)}{(e^x-1).2x}\right)=\frac{0}{0}\ ind\ (L'Hôpital)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-ae^x}{e^x.2x+(e^x-1).2}\right)=\frac{2-a}{0}$$

Como me dicen que el límite existe y es finito el numerador ha de ser cero para poder seguir aplicándole la Regla de L'Hôpital, es decir $2-a=0\ \Rightarrow\ a=2$

Volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital, con $a=2$, tenemos

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-2.e^x}{e^x.2x+(e^x-1).2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2.e^x}{e^x.2x+2.e^x+2.e^x}\right)=\frac{-2}{0+2+2}=\frac{-1}{2}$$

Ejemplo 12

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{e^{2x}-1}=\frac{0}{0}\ L'Hôpital=\lim_{x\to 0}\frac{-2cosx\cdot(-senx)}{2\cdot e^{2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{cosx\cdot senx}{e^{2x}}=\frac{0}{1}=0$$

Ejercicios resueltos

1.- Demostrar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$: $\frac{6}{2+senx}=4$

1°. Se considera la función $f(x)=\frac{6}{2+senx}-4$ continua en $\Re$ luego continua en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del Tª Bolzano:

$$f\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\frac{6}{2-1}-4>0 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{6}{2+1}-4<0$$

3°. Por tanto en el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ se cumplen las hipótesis del Tª de Bolzano, luego:

$\exists\, c\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ tal que $f(c)\ =\ 0$ que equivale a decir que la ecuación $\frac{6}{2+senx}=4$ tiene una solución c en el intervalo $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

2.- Demostrar que la ecuación $x^{18}-5x=-3$ no puede tener más de dos raíces reales.

1°. Se considera la función $f(x)=x^{18}-5x+3$ continua y derivable en $\Re$ luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se buscan los intervalos donde se cumplan las hipótesis del Tª Bolzano:

$$f(0)=3>0 \qquad f(1)=-1<0 \qquad\qquad f(2)>0$$

3°. Por tanto en el intervalo $[0,1]$ y $[1,2]$ se cumplen las hipótesis del Tª de Bolzano, luego:

$\exists\, c\in(0,1)\ y\ \exists\, c'\in(1,2)$ tal que $f(c)=f(c')\ =\ 0$ que equivale a decir que la ecuación $x^{18}-5x=-3$ tiene 2 soluciones en $\Re$

3.- Demuestra que la ecuación $x^3-3x+a=0$ con $a\in\Re$ tiene a lo más una solución en $[-1,1]$. ¿Para que valor de a existe dicha solución ?.

1°. Se considera la función $f(x)=x^3-3x+a$ continua y derivable en $\Re$ luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se supone que hay más de 1 solución:

hay 2 soluciones, $c_1,c_2\in[-1,1]$ $\ tales\ que\ f(c_1)=f(c_2)=0$

Luego en el intervalo $[c_1,c_2]$ se cumplen las hipótesis del Tª Rolle por lo que

$\exists\, d\ \in(c_1,c_2)\subset[-1,1]\ tal\ que\ f'(d)=0$ que equivale a decir $d\ \in(-1,1)$

Veamos que pasa con la función derivada:

$f(x)=x^3-3x+a\ \Rightarrow\ f'(x)=3x^2-3=0\ \Rightarrow\ x=\pm1\notin(-1,1)$ en contradicción con $d\ \in(-1,1)$

Por tanto a lo sumo existe una solución de la ecuación.

3°. ¿Para que valor de a existe dicha solución?. Se tiene que cumplir el Tª Bolzano en $[-1,1]$:

$$\left.\begin{array}{r} f(-1)=-1+3+a=a+2 \\ f(1)=1-3+a=a-2 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ (a+2)\cdot(a-2)<0\ \Rightarrow\ a\in(-2,2)$$

4.- Demostrar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$: $\frac{6}{2+senx}=4$

1°. Se considera la función $f(x)=\frac{6}{2+senx}-4$ continua en $\Re$ luego continua en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del Tª Bolzano:

$$f\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\frac{6}{2-1}-4>0 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{6}{2+1}-4<0$$

3°. Por tanto en el intervalo $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ se cumplen las hipótesis del Tª de Bolzano, luego: $\exists\, c\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ tal que $f(c)=0$ que equivale a decir que la ecuación $\frac{6}{2+senx}=4$ tiene una solución c en el intervalo $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

5.- Demostrar que la ecuación $x^{18}-5x=-3$ no puede tener más de dos raíces reales.

1°. Se considera la función $f(x)=x^{18}-5x+3$ continua y derivable en $\Re$ luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se buscan los intervalos donde se cumplan las hipótesis del Tª Bolzano:

$$f(0)=3>0 \qquad f(1)=-1<0 \qquad\qquad f(2)>0$$

3°. Por tanto en el intervalo $[0,1]$ y $[1,2]$ se cumplen las hipótesis del Tª de Bolzano, luego:

$\exists\, c\in(0,1)\ y\ \exists\, c'\in(1,2)$ tal que $f(c)=f(c')=0$ que equivale a decir que la ecuación $x^{18}-5x=-3$ tiene 2 soluciones en $\Re$

4°. Solo hay 2:

Se supone que hay 3 soluciones: $\exists\, c_1,c_2,c_3\in\Re\ con\ c_1<c_2<c_3\ tales\ que\ \ f(c_1)=f(c_2)=f(c_3)=0$

En los intervalos $[c_1,c_2]$ y $[c_2,c_3]$ se cumplen las hipótesis del Tª Rolle, luego:

$\exists\, d\in(c_1,c_2)\ y\ d'\in(c_2,c_3)\ \ tales\ que\ \ f'(d)=f'(d')=0$ pero $f'(x)=18x^{17}-5=0$ que solo tiene una solución real $x=\sqrt[17]{\frac{5}{18}}$ en contradicción con la suposición, por tanto solo hay 2

6.- La función $f:[-1,1]\to\Re$ definida por $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ toma el mismo valor en los extremos del intervalo: $f(-1)=\sqrt[3]{(-1)^2=1}$ $f(1x)=\sqrt[3]{1^2}=1$
Encontrar su derivada y comprobar que no se anula nunca. ¿Contradice esto el teorema de Rolle?

$f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}} \ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

Si intentamos anular la derivada resulta: $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}=0\ \Rightarrow 2=0$ ¡absurdo!

Esto no contradice el teorema de Rolle porque la segunda hipótesis no se verifica: la función no es derivable en todos los puntos del intervalo, en el punto $x=0$ no existe la derivada como podemos ver calculándola a través del límite:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{1-\frac{2}{3}}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h}}=\infty$$

7.- Calcula b para que la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, b]$. ¿Dónde se cumple la tesis?.

➦ Por ser una función polinómica, es continua y derivable en todo $\Re$ y se cumplen las dos primeras hipótesis.

➦ Tercera hipótesis: $\left.\begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f(b) = b^3 - 9b + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow b^3 - 9b + 2 = 2 \Rightarrow b^3 - 9b = 0 \Rightarrow b(b^2 - 9) = 0$

$b(b^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow$ La única solución válida es $b = 3$

➦ La tesis se cumple: $f'(x) = 3x^2 - 9 \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 9 = 0 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3} \Rightarrow c = \sqrt{3} \in (0,3)$

8.- Prueba que la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \frac{-1}{2} \leq x < 1 \\ 5 - (x - 2)^2 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ Cumple las hipótesis del Tª de Rolle. Averigua dónde cumple la tesis.

En cada uno de los intervalos es una función polinómica que es continua y derivable en $\Re$

El único punto dudoso es $x = 1 \Rightarrow$ estudiamos la continuidad y derivabilidad en dicho punto

✯ f continua en $x = 1 \Rightarrow f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 4 \Rightarrow$

Se cumple la 1ª hipótesis: f es continua en $\left[\frac{-1}{2}, 4\right]$

✯ f derivable en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \frac{-1}{2} \leq x < 1 \\ 5 - (x - 2)^2 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & \frac{-1}{2} < x < 1 \\ -2(x - 2) & 1 < x < 4 \\ ? & x = 1 \end{cases}$$

f derivable en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = \lim_{x\to 1^-} f'(x = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2 \Rightarrow$

Se cumple la 2ª hipótesis: f es continua en $\left(\frac{-1}{2}, 4\right)$

✯ $\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{-1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{-1}{2} + 2 = 1 \\ f(4) = 5 - (4 - 2)^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ se cumple la 3ª hipótesis

✯ Veamos dónde se verifica la tesis: $f'(x) = \begin{cases} 2 & \frac{-1}{2} < x < 1 \\ -2(x - 2) & 1 \leq x < 4 \end{cases}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 = 0 \quad absurdo \\ -2(x - 2) = 0 \quad \Rightarrow x = 2 \quad \in [1,4) \end{cases} \Rightarrow$ ***La tesis se verifica en*** $c = 2$

9.- Sea la función $f(x)=\begin{cases} x & x\le 0 \\ A\cdot e^x+B & x>0\end{cases}$
Calcula "A" y "B" para que f cumpla las hipótesis del Tª de Lagrange en $[-1,1]$

La función es continua y derivable $\forall\, x \in \Re-\{0\}=\Re^*$ puesto que los trozos lo son luego para que se cumplan las hipótesis del Tª se tiene que cumplir la continuidad y derivabilidad en $x=0$

- f continua en $x=0 \;\Rightarrow\; f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x) \;\Rightarrow\; 0=A+B$
- f derivable en $x=0$

$$f(x)=\begin{cases} x & x\le 0 \\ A\cdot e^x+B & x>0\end{cases} \;\Rightarrow\; f'(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ A\cdot e^x & x>0 \\ \exists & x=0\end{cases}$$

f derivable en $x=0 \;\Rightarrow\; f'(0)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} f'(x) \;\Rightarrow\; 1=A \;\overset{A+B=0}{\Rightarrow}\; B=-1$

10.- Prueba que la función $f(x)=\begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & si \quad x<1 \\ \frac{1}{x} & si \quad x\ge 1\end{cases}$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$ y calcula el o los valores vaticinados por el teorema.

- La función es continua en el intervalo $[0,2]$
  - $y=\frac{3-x^2}{2}$ continua en $\Re$ (es polinómica) $\Rightarrow$ f continua en $x<1$
  - $y=\frac{1}{x}$ continua en $\Re^*$ $\Rightarrow$ f continua en $x>1$
  - f continua en $x=1$ porque $f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$

- La función es derivable en el intervalo $(0,2)$ $\Rightarrow$ $f(x)=\begin{cases} -x & si \quad x<1 \\ \frac{-1}{x^2} & si \quad x>1 \\ ? & x=1\end{cases}$
  - $y=\frac{3-x^2}{2}$ derivable en $\Re$ (es polinómica) $\Rightarrow$ f derivable en $x<1$
  - $y=\frac{1}{x}$ derivable en $\Re^*$ $\Rightarrow$ f derivable en $x>1$
  - f derivable en $x=1$ porque $f'(1)=\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^-} f'(x)=-1$

- El valor o valores que vaticina el teorema del valor medio: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2-0}=\frac{-1}{2}=\begin{cases} -c & si \quad x<1 \\ \frac{-1}{c^2} & si \quad x\ge 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1}{2}=-c & si \quad c<1 \\ \frac{-1}{2}=\frac{-1}{c^2} & si \quad c\ge 1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c=\frac{1}{2} & si \quad c<1 \\ c=\pm\sqrt{2} & si \quad c\ge 1\end{cases} \Rightarrow\; c=\frac{1}{2} \;\; y \;\; c=\sqrt{2}$$

11.- Calcula aplicando la regla de L´Hôpital: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot lnx)$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^x)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$

$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{lnx}-\frac{1}{x-1}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-senx}{sen^2x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot senx}{1-cosx}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-senx}$

☆ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\frac{0}{0}$ $indeterminación\ L'Hôpital=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\cdot lna-b^x\cdot lnb}{1}=lna-lnb$ $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$

☆ $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot lnx)=0\cdot\infty\ ind=\lim\limits_{x\to 0}\frac{lnx}{1/x}=\frac{\infty}{\infty}\ indet\ L'Hôp=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0$

Las indeterminaciones $0.\infty$ se transforman en $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ y se pueden resolver por L´Hôpital

☆ $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^x)=[0^0\ indeterminación]=L\ \Rightarrow\ lnL=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot lnx)=0\ \Rightarrow\ L=e^0=1$

☆ $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}=[\infty^0\ ind]=L\ \Rightarrow\ lnL=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot lnx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{lnx}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\ ind\ L'Hôpital\right]=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=\frac{1}{\infty}=0\ \Rightarrow\ L=e^0=1$$

☆ $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=[1^\infty\ indeterminación]=e^{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\frac{1}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

Se ha aplicado la fórmula: $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=[1^\infty\ ind]=e^{\lim\limits_{x\to 1}[(f(x)-1)\cdot g(x)]}$

➦ Otra forma de hacerlo es:

$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=L\ \Rightarrow\ lnL=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}\cdot lnx\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{lnx}{1-x}=\left[\frac{0}{0}\ indeterminación\ L'Hôpital\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1/x}{-1}=-1$

Así: $lnL=-1\ \Rightarrow\ L=e^{-1}=\frac{1}{e}$

☆ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{lnx}-\frac{1}{x-1}\right)=[\infty-\infty\ ind.\ L'Hôpital]=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x-1-lnx}{(x-1)lnx}\right)=\left[\frac{0}{0}\ ind.L'Hôpital\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{lnx+\frac{x-1}{x}}=$

$$=\left[\frac{0}{0}\ ind.L'Hôpital\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{x-(x-1)}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

Las indeterminaciones $\infty-\infty$ se transforman en $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ y se pueden resolver por L´Hôpital

☆ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-senx}{sen^2x}=\left[\frac{0}{0}\ indeterminación\ L'Hôpital\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{2senx\cdot cosx}=\left[\frac{0}{0}\ ind.\ L'Hôpital\right]=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{2(\cos^2x-sen^2x)}=\frac{0}{2}=0$$

☆ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot senx}{1-cosx}=\left[\frac{0}{0}\ indeterminación\ L'Hôpital\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx+x\cdot cosx}{senx}=$

$$=\left[\frac{0}{0}\ indeterminación\ L'Hôpital\right]=\lim_{x\to 0}\frac{cosx+cosx-x\cdot senx}{cosx}=\frac{2}{1}=2$$

☆ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-senx}=\left[\frac{0}{0}\ indeterminación\ L'Hôpital\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-cosx}=\left[\frac{0}{0}\ indeterminación\ L'Hôpital\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{senx}=\left[\frac{0}{0}\ indeterminación\ L'Hôpital\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{cosx}=2$$

Ejercicios propuestos

1.- Determina los extremos absolutos de la función $f:[0,8]\to\mathfrak{R}$ definida por $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}$

2.- Sea $f:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$ dada por $f(x)=\left|x^2-2x-3\right|$.

A. Estudia si f cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[2,4]$
B. Estudia si f cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1,3]$
C. Si f cumple las hipótesis del teorema de Rolle en alguno de los intervalos de los apartados anteriores, determina el punto correspondiente cuya existencia se afirma en dicho teorema

3.- Demostrar que la ecuación $x^2 = x\cdot senx + cosx$ tiene exactamente dos soluciones en $[-\pi,\pi]$

4.-Demuestra que la siguiente función nunca tiene dos raíces en el intervalo cerrado [0,1] :

$$f_m(x) = x^3-3x+m$$

a) Si "n" es par entonces el polinomio p no puede tener más de dos raíces reales .
b) Si "n" es impar entonces el polinomio p no puede tener más de tres raíces reales .

6.- Demuestra que la ecuación $\ln x-\frac{x}{2}=-3$ tiene al menos una solución real

7.- a) Sea $f:[-1,2]\longrightarrow\mathfrak{R}$ la función definida por $f(x)=2x^3-6x^2+x+10$

Determina todos los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(-1,f(-1))$ y $B(2,f(2))$. ¿Cuál de ellos es el predicho por el Tª de Lagrange en el intervalo $[-1,2]$?

b) Considera $f:[0,2\pi]\longrightarrow\mathfrak{R}$ definida por $f(x)=2x+\operatorname{sen}x$. Comprueba si f cumple las hipótesis del Tª y , en caso afirmativo , encuentra dichos valores .

8.- Sea la función: $f(x)=\begin{cases}\frac{(a+1)x}{1-x} & x<0\\ \frac{2x}{1+ax} & x\geq 0\end{cases}$ Sol : a=1

Calcular " a " para que ésta función cumpla las hipótesis del Tª del valor medio de Lagrange en el intervalo $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ *(Sol : valor vaticinado* $c_1=1-\frac{3}{\sqrt{5}}$, $c_2=-1+\frac{3}{\sqrt{5}}$*)*

9.- Sea la función $f(x)=\begin{cases}\frac{x-senx}{x^3} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$.

a) ¿ Para que valor de " a " será continua en $x=0$?
b) ¿ Se puede aplicar el Tª de Lagrange en $[-1,1]$?

10.- ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)=\frac{x^2-4x}{x-2}$ en el intervalo [0, 4]? Razónalo

11.- Calcula a y b para que $f(x)=\begin{cases}ax-3 & si \quad x<4\\ -x^2+10x-b & si \quad x\geq 4\end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [2, 6]. ¿Dónde cumple la tesis? (Solución: a = 2; b = 19; c = $\frac{9}{2}$)

12.- Se considera la función $f(x)=\begin{cases}x^2+nx & si \quad x<-2\\ x^3+m & si \quad x\geq -2\end{cases}$

a. Determina m y n para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en [-4, 2]
b. Halla los puntos del intervalo cuya existencia garantiza el teorema.

13. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-senx}{x^3}$ (Solución 1/6) b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2arctgx-x}{2x-arcsenx}$ (Solución: 1) c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^2\cdot\left(1-cos\frac{1}{x}\right)\right]$ (Solución: $\frac{1}{2}$)