CONTROL ÁLGEBRA

1.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$, aplica las propiedades de los determinantes para calcular, sin desarrollar:

a) $\begin{vmatrix} a & -1 & -x \\ -b & 1 & y \\ -c & 1 & z \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \\ x-1 & y-1 & z-1 \end{vmatrix}$

2.- Resuelve la ecuación $X \cdot A = B + C$

siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3.- Discute, según los valores de m, el rango de las matrices:

$A = \begin{pmatrix} -1 & m & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ m & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & m & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

4.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ siendo a un número real.

a) Calcula el valor de a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

b) Calcula, en función de a, los determinantes de $2A$ y A^t

5.- Discute el siguiente sistema según los valores de a y resuélvelo cuando sea compatible:

$$\left.\begin{aligned} 5x - 11y + 9z &= a \\ x - 3y + 5z &= 2 \\ 3x - 7y + 7z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

SOLUCIONES

1.- $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2 \rightarrow$ a) $\begin{vmatrix} a & -1 & -x \\ -b & 1 & y \\ -c & 1 & z \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -a & -1 & -x \\ b & 1 & y \\ c & 1 & z \end{vmatrix} = (-1)(-1)\begin{vmatrix} a & 1 & x \\ b & 1 & y \\ c & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$

(teniendo en cuenta que $|A^t| = |A|$

b) $\begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2 + 0(F_1 \text{ y } F_3 \text{ proporcionales}) = -2$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \\ x-1 & y-1 & z-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 \underline{\underline{F_2 \leftrightarrow F_1}} 2(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 4$

2.- $X \cdot A = B + C \rightarrow B + C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$X \cdot A \cdot A^{-1} = (B+C) \cdot A^{-1} \rightarrow X = (B+C)A^{-1}$, hallemos la inversa de la matriz A $\rightarrow |A| = 1$, ahora los adjuntos:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

3.- $A = \begin{pmatrix} -1 & m & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ m & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ el rango de M puede ser 2 o 3

orlamos el menor:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 6m + 3 + 1 - 6 - m - 3 = 5m - 5 = 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ m & -1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - m - 2 + 2m + 1 + 6 = m - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m = 1$$

Para $m = 1$ el rango es 2 Para $m \neq 1$ el rango es 3

$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 2 & m & 8\\ 3 & 6 & 12\end{pmatrix}\rightarrow$ en principio no hay ningún menor de orden 2 distinto de cero, luego el rango podría ser 1, 2 o 3, veamos el determinante (ya que es una matriz cuadrada):

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & m\\ 2 & m & 8\\ 3 & 6 & 12\end{vmatrix}=12m+12m+48-3m^2-48-48=-3m^2+24m-48=0\Rightarrow m^2-8m+16=0$$

$\rightarrow m=4$

Para $m=4$ $\rightarrow B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 8\\ 3 & 6 & 12\end{pmatrix}$ rango 1, las tres filas son proporcionales

Para $m\neq 4$ el rango es 3, ya que el determinante de B es distinto de cero.

4.-a) $A^2-A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & -a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & -a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & a^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & -a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2-a & -1\\ 0 & a^2+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l}a^2-a=12\\ a^2+a=20\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}a^2-a-12=0\\ a^2+a-20=0\end{array}\right\}\left\langle\begin{array}{l}a=4,\ a=-3\\ a=4,\ a=-5\end{array}\right.\Rightarrow a=4 \text{ para que sean iguales}$$

b) $2A=\begin{pmatrix}2a & 2\\ 0 & -2a\end{pmatrix}\Rightarrow |2A|=-4a^2 \qquad A^t=\begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & -a\end{pmatrix}\Rightarrow |A^t|=-a^2$

5.- $\left.\begin{array}{r}5x-11y+9z=a\\ x-3y+5z=2\\ 3x-7y+7z=3\end{array}\right\}\rightarrow\begin{pmatrix}5 & -11 & 9 & a\\ 1 & -3 & 5 & 2\\ 3 & -7 & 7 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2\leftrightarrow F_3}\begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & 2\\ 3 & -7 & 7 & 3\\ 5 & -11 & 9 & a\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2-3F_1}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & 2\\ 0 & 2 & -8 & -3\\ 5 & -11 & 9 & a\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3-5F_1}\begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & 2\\ 0 & 2 & -8 & -3\\ 0 & 4 & -16 & a-10\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3-2F_2}\begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & 2\\ 0 & 2 & -8 & -3\\ 0 & 0 & 0 & a-4\end{pmatrix}$

Para $a=4\rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{r}x-3y+5z=2\\ 2y-8z=-3\end{array}\right\}\Rightarrow y=\frac{8z-3}{2}\rightarrow x=2-5z+3\frac{8z-3}{2}=\frac{4-10z+24z-9}{2}=\frac{14z-5}{2}$$

$$SOL:\begin{cases}x=\dfrac{14t-5}{2}\\ y=\dfrac{8t-3}{2}\\ z=t\end{cases}$$

Para $a\neq 4$ Sistema Incompatible