

# 8



# INTEGRALES

## SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

- 1**   Comprueba que las integrales de las funciones que se ofrecen en la tabla son correctas derivando los resultados para obtener la función que se integra.

### INTEGRALES INMEDIATAS

$\int k dx = kx + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ si } n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln  x  + C$
$\int e^x dx = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ si } a > 0 \text{ y } a \neq 1$

- 2**   Calcula las siguientes integrales, descomponiéndolas si es necesario.

a) $\int x^{10} dx$	g) $\int \frac{5}{\sqrt{5x^3}} dx$
b) $\int \frac{1}{x^2} dx$	h) $\int \left(2x - \frac{3}{x^4}\right) dx$
c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$	i) $\int (3x^3 - 2x^2 + 4x - 7) dx$
d) $\int \frac{3}{\sqrt{x^5}} dx$	j) $\int \left(3x + 4x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$
e) $\int \sqrt{2x^3} dx$	k) $\int \frac{4^x + 6^x}{2^{x-1}} dx$
f) $\int 4\sqrt{3x} dx$	l) $\int \sqrt{x\sqrt{x^2\sqrt{x^3}}} dx$
a) $\frac{x^{11}}{11} + C$	g) $\frac{-10}{\sqrt{5x}} + C$
b) $-\frac{1}{x} + C$	h) $x^2 + \frac{1}{x^3} + C$
c) $\frac{-2}{\sqrt{x}} + C$	i) $\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 7x + C$
d) $\frac{-2}{x\sqrt{x}} + C$	j) $\frac{3x^2}{2} + \frac{8}{5}x^2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$
e) $\frac{2x^2\sqrt{2x}}{5} + C$	k) $2\left(\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3}\right) + C$
f) $\frac{8x\sqrt{3x}}{3} + C$	l) $\frac{8}{19} \cdot x^2\sqrt{x^3} + C$

- 3**   Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx$	d) $\int_2^8 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$
b) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$	e) $\int_2^3 \frac{x dx}{(1-x)^2}$
c) $\int_{-2}^3  x  dx$	
a) $\frac{-9}{2}$	d) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 8}$
b) 1	e) $\ln 2 + \frac{1}{2}$
c) $\frac{13}{2}$	

- 4**   Averigua el área que determinan la gráfica de la función  $f(x) = |2x + 3|$ , el eje de ordenadas, el eje de abscisas y la recta de ecuación  $x = -2$ .

Sol:  $2,5 u^2$

- 5**   Determina el área de la región delimitada por la curva  $y = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$  y el eje de abscisas.

Sol:  $9,7604\dots u^2$

- 6**   Calcula el área de la región del plano encerrada por la gráfica de la función  $f(x) = e^x - 1$ , el eje de abscisas y la recta de ecuación  $x = 2$ .

Sol:  $4,39 u^2$  aprox

- 7**   Calcula el área que determinan la curva  $y = \frac{1}{(x+1)^2}$ , los ejes de coordenadas y la recta de ecuación  $x = 2$ .

Sol:  $\frac{2}{3} u^2$

- 8**   Calcula el área delimitada por la gráfica de la función  $f(x) = \frac{x^3}{1+x}$ , el eje de abscisas y las rectas de ecuación  $x = 0$  y  $x = 4$ .

Sol:  $\frac{52}{3} - \ln 5$

- 9**   Calcula el área delimitada por las gráficas de las funciones  $f(x) = \sqrt{x}$  y  $g(x) = x^2$ .

Sol:  $\frac{1}{3} u^2$

- 10**   Determina el área de la región del plano limitada por las curvas  $y = x^4 + 2x^2$  e  $y = x^2 + 2$ .

Sol:  $\frac{44}{15} u^2$

- 11** ■■■ Calcula el valor del coeficiente  $b$  sabiendo que el área delimitada por la parábola  $y = x^2 + bx - 2$  y la recta  $2x + y + 2 = 0$ , es  $\frac{4}{3} u^2$ .

Sol: La igualdad se cumple para  $b = 0$  y  $b = -4$ .

## Ejercicios y problemas

### Cálculo de integrales indefinidas

- 12** ■■■ Calcula las siguientes integrales.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 \sqrt{x} dx & \text{c)} \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx \\ \text{b)} \int \frac{5^{2x+2}}{5 + 5^{2x}} dx & \text{d)} \int \frac{3}{x \ln(2x)} dx \\ \text{a)} \frac{3}{7} x^2 \sqrt[3]{x} + \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} + C & \text{c)} \frac{(\ln x)^3}{3} + C \\ \text{b)} \frac{25}{2 \ln 5} \ln(5 + 5^{2x}) + C & \text{d)} 3 \ln |\ln |2x|| + C \end{array}$$

- 13** ■■■ Calcula las siguientes integrales.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \frac{2e^{-x}}{2 + e^{-x}} dx & \text{c)} \int x\sqrt{x^2 + 1} dx \\ \text{b)} \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx & \text{d)} \int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 1} \\ \text{a)} -2 \ln(2 + e^{-x}) + C & \text{c)} \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3} + C \\ \text{b)} \sqrt{x^2 + 1} + C & \text{d)} \frac{-1}{4x + 2} + C \end{array}$$

- 14** ■■■ Calcula las siguientes integrales.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \frac{\ln(2x^2)}{x} dx & \text{c)} \int \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{x}} dx \\ \text{b)} \int \frac{1 + 2x^2}{5x + 2} dx & \\ \text{a)} \frac{1}{4} \ln^2(2x^2) + C & \text{c)} \sqrt{2} e^{\sqrt{2x}} + C \\ \text{b)} \frac{x^2}{5} - \frac{4x}{5} + \frac{33}{125} \ln(5x + 2) + C & \end{array}$$

### Cálculo de primitivas

- 15** ■■■ Calcula la primitiva de la función que se anula en el punto de abscisa  $x = 2$ :

$$f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$$

Sol:  $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3}$

- 16** ■■■ Calcula la primitiva de la función  $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$  que se anula en  $x = e$ .

Sol:  $F(x) = \frac{(\ln x)^3 - 1}{3}$

- 17** ■■■ Halla la función  $f(x)$  tal que  $f'(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ , sabiendo que  $f(0) = 2$ .

Sol:  $f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + 2$

- 18** ■■■ Encuentra la primitiva de  $f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$  sabiendo que su gráfica tiene como asíntota horizontal  $y = 2$ .

Sol:  $F(x) = \frac{1}{x-2} + 2$

- 19** ■■■ Encuentra la primitiva de la función  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$  cuya recta tangente en  $x = e$  pasa por  $(0, 0)$ .

Sol:  $F(x) = \ln |\ln |x|| + 1$

### Integral definida

- 20** ■■■ Calcula el valor de las siguientes integrales definidas.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_{-1}^3 \sqrt{x+1} dx & \text{d)} \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx \\ \text{b)} \int_{-1}^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx & \text{e)} \int_{-1}^1 x\sqrt{2 + 2x^2} dx \\ \text{c)} \int_{-1}^0 x^2(x^3 + 2)^2 dx & \\ \text{a)} \frac{16}{3} & \text{d)} \frac{1}{4} \\ \text{b)} 0 & \text{e)} 0 \\ \text{c)} \frac{7}{9} & \end{array}$$

- 21** ■■■ Calcula el valor de las siguientes integrales definidas.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \int_0^2 \frac{2x + 3}{2x + 1} dx \\ \text{b)} \int_{-3}^1 |1 - x^2| dx \\ \text{c)} \int_0^2 \frac{x^2}{x + 1} dx \\ \text{a)} 2 + \ln 5 \\ \text{b)} 8 \\ \text{c)} \ln 3 \end{array}$$

### Teorema fundamental del cálculo integral

- 22** ■■■ Halla el valor medio de la función  $f(x) = xe^{x^2}$  en el intervalo  $[0, 2]$  y calcula en qué punto del intervalo se alcanza.

Sol: 13,4 aprox.  
 $x \cong 1,4835$

- 23** ■■■ Halla la derivada de las siguientes funciones.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} G(x) = \int_3^x \frac{dt}{t+5} & \text{c)} G(x) = \int_x^{x^2} e^{2t+1} dt \\ \text{b)} G(x) = \int_3^{x^2} \frac{dt}{t+5} & \text{d)} G(x) = \int_0^{2x} e^{t^2} dt \\ \text{a)} G'(x) = \frac{1}{x+5} & \text{c)} G'(x) = 2xe^{2x^2+1} - e^{2x+1} \\ \text{b)} G'(x) = \frac{2x}{x^2+5} & \text{d)} G'(x) = 2e^{4x^2} \end{array}$$

### Áreas

- 24** ■■■ Dada la función  $f(x) = x - 4 + \frac{16}{x+4}$ , calcula el área limitada por la gráfica de la función, el eje  $X$  y las rectas verticales  $x = 0$  y  $x = 2$ .

Sol:  $0,487 u^2$  aprox

- 25 ■■■ Sabiendo que la gráfica de la función  $f(x)$  pasa por el punto  $(1, -4)$  y que su función derivada es  $f'(x) = 2x - 2$ :
- Determina la expresión de  $f(x)$ .
  - Calcula el área de la región limitada por la gráfica de  $f(x)$  y el eje de abscisas  $X$ .

a)  $f(x) = x^2 - 2x - 3$   
 b)  $\frac{32}{3} u^2$

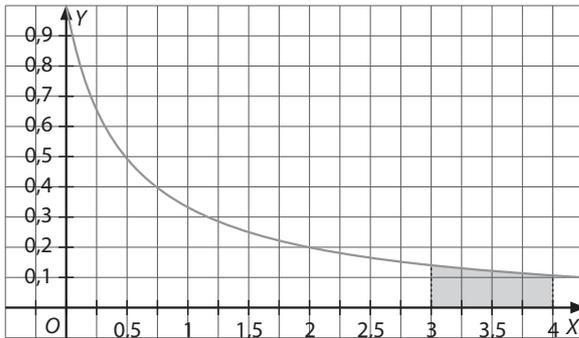
- 26 ■■■ Se sabe que cierta función derivable  $F(x)$  verifica las condiciones  $F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$  y  $F(1) = 3$ .

a) Calcula  $F(x)$ .  
 b) Calcula el área delimitada por  $F(x)$  y el eje  $X$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 1$ .  
 a)  $F(x) = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{3}$   
 b)  $\frac{17}{7}$

- 27 ■■■ Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función  $f(x) = xe^{x^2}$  en  $x \geq 0$ , el eje de abscisas y la recta vertical  $x = 1$ .

Sol:  $\frac{e-1}{2} u^2$

- 28 ■■■ La gráfica de  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$  para  $x > 0$ , es:

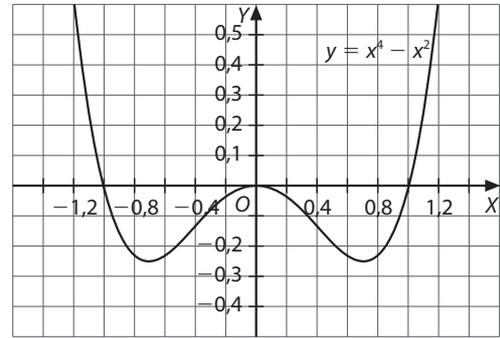


- a) Halla una primitiva de  $f$ .  
 b) Calcula el área de la región sombreada.

a)  $F(x) = \frac{\ln(2x+1)}{2}$   
 b)  $\ln \frac{3\sqrt[3]{7}}{7} u^2$

- 29 ■■■ Buscando sus extremos relativos y sus puntos de corte con los ejes, realiza una representación aproximada de la curva de ecuación  $y = x^4 - x^2$ . A continuación, calcula el área encerrada por esta curva y el eje de abscisas.

Sol: En  $(0, 0)$  tenemos un máximo relativo.  
 En  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\right)$  tenemos un mínimo relativo.  
 En  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\right)$  tenemos un mínimo relativo.  
 Los puntos de corte son:  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$



$A = \frac{4}{15} u^2$

- 30 ■■■ Dada la función  $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x+2}}}{\sqrt{x+2}}$ , se pide:

- a) Dibuja su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

- b) Calcula el área comprendida entre el eje  $X$  y la gráfica de  $f(x)$  entre  $-1 \leq x \leq 1$ .

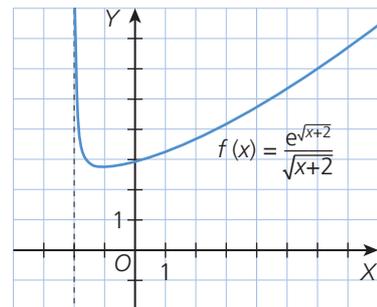
- a) Dominio:  $(-2, +\infty)$

Asíntota vertical  $x = -2$

$f(x)$  decrece en  $(-2, -1)$  y crece en  $(-1, +\infty)$ .

Mínimo relativo (y absoluto) en  $(-1, e)$ .

Es siempre cóncava, y por lo tanto no tiene puntos de inflexión.



- b)  $5,868 u^2$

- 31 ■■■ Dada la función  $f(x) = \frac{x^2 - 12}{x + 4}$  calcula el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje  $X$ .

Sol:  $17,18 u^2$

- 32 ■■■ Calcula el área del recinto que está limitado por las curvas  $y = x^2 + 2x - 1$  e  $y = -x^2 + 3$ .

Sol:  $9 u^2$

- 33 ■■■ Calcula el área comprendida entre las gráficas de  $f(x) = |x^2 - 1|$  y  $g(x) = x + 5$  en el primer cuadrante.

Sol:  $12,17 u^2$

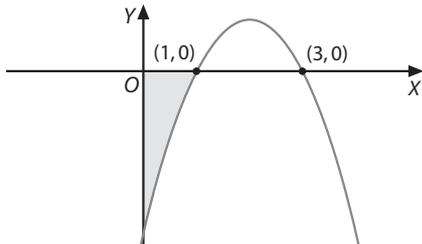
- 34 ■■■ Determina el área encerrada por las curvas  $y = x^3$  e  $y = \sqrt[3]{x}$  en el primer cuadrante.

Sol:  $\frac{1}{2} u^2$

- 35    Calcula el área del recinto de  $\mathbb{R}^2$  limitado por las gráficas de las funciones  $f(x) = x^3 - 2x$  y  $g(x) = x^2$  cuando se consideran valores de  $x \leq 0$ .

Sol:  $\frac{5}{12} u^2$

- 36    En la figura aparece una curva que representa una función polinómica de grado dos. Los puntos de intersección de la curva con el eje  $X$  son el  $(1, 0)$  y el  $(3, 0)$ . Además, el área limitada por la curva y los dos ejes de coordenadas vale  $\frac{4}{3} u^2$ . Halla la expresión de la función polinómica.



Sol:  $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

- 37    Calcula el área de la región limitada por las curvas

$$y = \frac{x^2}{2} \text{ e } y = \frac{1}{x+1}.$$

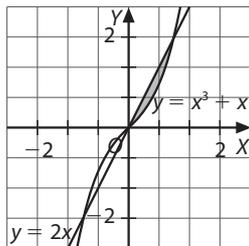
Sol:  $0,526 u^2$

- 38    Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones  $f(x) = x$ ,  $g(x) = \sqrt{x+2}$  y el eje de abscisas.

Sol:  $\frac{10}{3} u^2$

- 39    Representa gráficamente el recinto plano limitado, en la región donde la abscisa  $x$  es positiva, por la curva  $y = x^3 + x$  y por la recta  $y = 2x$ . Calcula su área.

Sol:



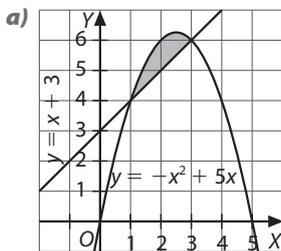
$A = 0,25 u^2$

- 40    Dadas las funciones:

$f(x) = -x^2 + 5x$        $g(x) = x + 3$

a) Dibuja el recinto plano limitado por las funciones.

b) Halla su área.



b)  $\frac{4}{3} u^2$

- 41    Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación  $y = x^3 - 3x$  en el punto de abscisa  $x = -1$ . Calcula el área del recinto limitado por la tangente y la curva dada.

Sol: La recta tangente es  $y = 2$ .

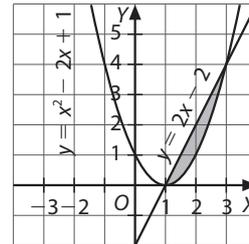
$A = 6,75 u^2$

- 42    Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial  $f(x) = e^x$  y el segmento que une los puntos de abscisas  $x = 1$  y  $x = -1$ .

Sol:  $\frac{2}{e}$

- 43    La curva  $y = x^2 - 2x + 1$  y la recta que pasa por los puntos  $A(1, 0)$  y  $B(3, 4)$  limitan un recinto finito del plano. Traza un esquema gráfico de dicho recinto y calcula su área.

Sol:  $A = \frac{4}{3} u^2$



- 44    a) Estudia y representa gráficamente la función

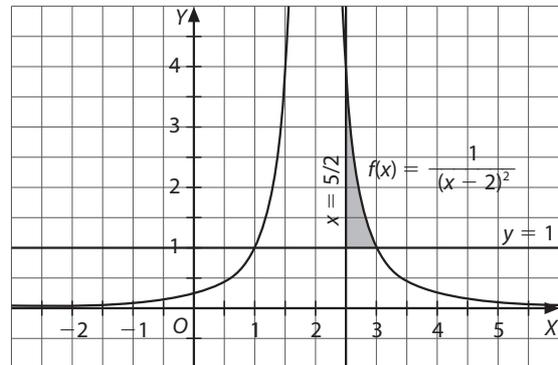
$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

b) Halla el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas  $y = 1$ ,  $x = \frac{5}{2}$ .

a)  $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

Asíntota vertical:  $x = 2$       Asíntota horizontal:  $y = 0$

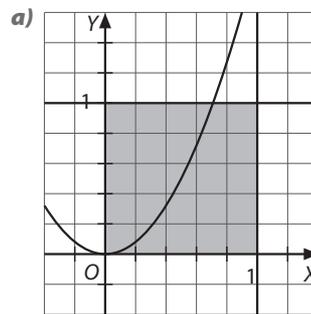
En  $(-\infty, 2)$  la función es creciente, en  $(2, +\infty)$  la función es decreciente. No hay extremos.



b)  $0,5 u^2$

- 45    La curva  $y = 2x^2$  divide al cuadrado de vértices  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(1, 1)$  y  $D(0, 1)$  en dos recintos.

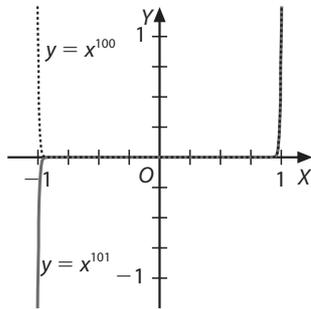
a) Dibuja dichos recintos.      b) Halla el área de cada uno.



b)  $A_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} u^2$        $A_2 = \frac{3 - \sqrt{2}}{3} u^2$

- 46 ■■ Haz un dibujo del recinto limitado por las curvas  $y = x^{100}$  y  $y = x^{101}$ . Calcula el área de este recinto.

Sol:



$$A = \frac{1}{10302} u^2$$

- 47 ■■ Calcula el área que, en el primer cuadrante, delimitan las curvas  $y = x^2$ ,  $y = 4x^2$  e  $y = 16$ .

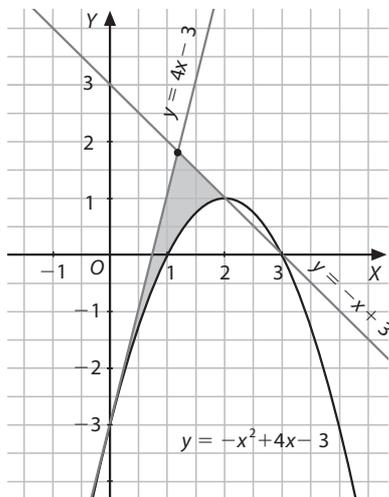
Sol:  $A = \frac{64}{3} u^2$

- 48 ■■ Calcula el área de la región limitada por la curva  $y = \ln x$  y las rectas  $y = 0$ ,  $y = \ln 3$  y  $x = 0$ .

Sol:  $2 u^2$

- 49 ■■ Dibuja el recinto limitado por  $y = -x^2 + 4x - 3$ , su recta tangente en el punto  $P(0, -3)$  y la recta  $y = -x + 3$ . Calcula su área.

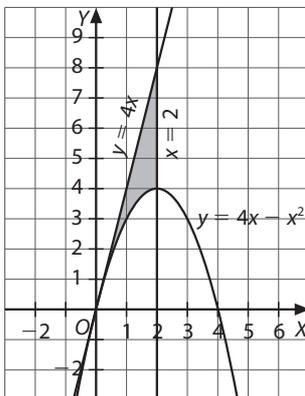
Sol:



$$A = \frac{16}{15} u^2$$

- 50 ■■ Calcula el área de la región plana limitada por la parábola  $y = 4x - x^2$ , su recta tangente en el origen de coordenadas y la recta  $x = 2$ . Dibuja también esta región.

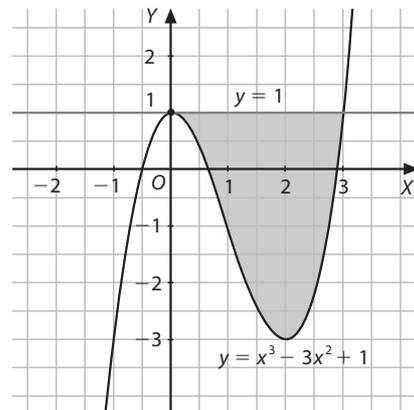
Sol:



$$A = \frac{8}{3} u^2$$

- 51 ■■ Halla el área limitada por  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  y la recta tangente a la misma en el punto en que alcanza su máximo relativo. Dibuja el recinto.

Sol:



$$A = \frac{27}{4} u^2$$

- 52 ■■ Calcula el área del recinto plano limitado por la curva  $xy = 1$  y la recta perpendicular a la recta  $y = 2x + 1$  que pase por el punto de coordenadas  $(1, 1)$ .

Sol:

$$A = \left(\frac{3}{4} - \ln 2\right) u^2$$

### Volúmenes

- 53 ■■ Calcula el volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto limitado por la curva  $y = x(x - 1)$  y el eje de abscisas, al girar alrededor de dicho eje.

Sol:  $\frac{\pi}{30} u^3$

- 54 ■■ Calcula el volumen del casquete parabólico generado por la parábola  $y = 3x^2$ , entre  $x = 0$  y  $x = 2$ , al girar alrededor del eje  $X$ .

Sol:  $\frac{288\pi}{5} u^3$

- 55 ■■ Calcula el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar la elipse  $x^2 + 2y^2 = 1$  alrededor del eje  $X$ .

Sol:  $2,10 u^3$

- 56 ■■ Calcula el volumen que engendra la figura del plano delimitada por la hipérbola  $xy = 1$  y la circunferencia centrada en el origen de radio  $\frac{\sqrt{17}}{2}$  en el primer cuadrante.

Sol:  $9/4\pi u^3$

### Actividades de aplicación

- 57 ■■ Determina:

a) Los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función  $f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$ .

b) Una función  $F(x)$  tal que su derivada sea  $f(x)$  y  $F(0) = 4$ .

a) En  $x = 1$  hay un máximo relativo y en  $x = -1$  un mínimo relativo.

$x = 0$  y  $x = \pm\sqrt{3}$  son puntos de inflexión.

b)  $F(x) = 3x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + 4$ .

58 ■■■ Se sabe que la gráfica de una función pasa por el punto  $(1, 1)$  y que  $f'(1) = 2$ . Se conoce también que su derivada segunda es la función  $g(x) = 2$ . Calcula la función  $f$ .

Sol:  $f(x) = x^2$ .

59 ■■■ Halla  $f(x)$  sabiendo que  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 2$  y  $f''(x) = 3x$ .

Sol:  $f(x) = \frac{x^3}{2} + 2x + 1$ .

60 ■■■ Determina la función  $F(x)$  que:

■  $F'(x) = 2x - 6$

■ La gráfica de la función  $F(x)$  presenta un mínimo en el punto de ordenada  $-1$ .

Sol:  $F(x) = x^2 - 6x + 10$

61 ■■■ Halla la ecuación de una curva  $y = f(x)$  sabiendo que pasa por el punto  $(1, 1)$  y que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa  $x$  es  $m = 3x + 1$ .

Sol:  $f(x) = \frac{3x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$

62 ■■■ Halla la ecuación de la curva  $y = f(x)$  que cumple que  $f''(x) = 4$ , y la recta tangente en el punto de abscisa  $x = 3$  tiene por ecuación  $y = 9x - 13$ .

Sol:  $y = 2x^2 - 3x + 5$

63 ■■■ De una función  $y = f(x)$  sabemos:

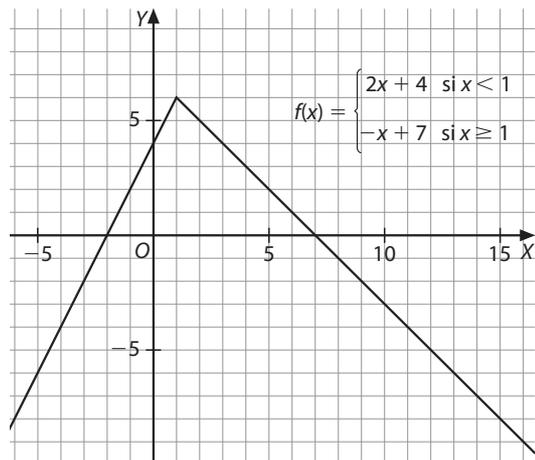
■ Su dominio de definición es todo  $\mathbb{R}$ .

■ Su función derivada es:  $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

■  $f(x)$  es continua en todo punto y  $f(-1) = 2$ .

Determina el valor de  $f(1)$  y dibuja la gráfica de la función  $f(x)$ .

Sol:  $f(1) = 6$ .



## Ejercicios de aplicación

64 ■■■ Considera la función  $f(x) = x^2 + |x|$ .

a) Calcula los puntos en que la gráfica corta a los ejes.

b) Calcula los extremos relativos (máximos y mínimos), así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento  $f$ .

c) Dibuja la gráfica de  $f$ .

d) Calcula  $\int_{-1}^2 f(x) dx$ .

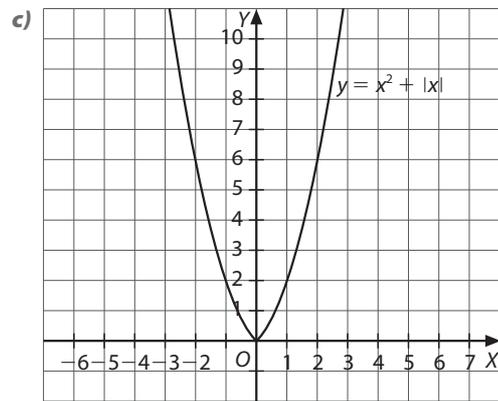
a)  $f(x)$  corta a los ejes en  $(0, 0)$ .

b) En  $x = 0$  hay un punto anguloso.

$f(x)$  decrecen en  $x < 0$

$f(x)$  crecen en  $x > 0$

En  $x = 0, y = 0$ , es un mínimo absoluto:  $m(0, 0)$



d)  $\frac{11}{2}$

65 ■■■ Dadas  $f(x) = x^2 - ax - 4$  y  $g(x) = \frac{x^2}{2} + b$ .

a) Calcula  $a$  y  $b$  de manera que las gráficas de  $f(x)$  y  $g(x)$  sean tangentes en el punto de abscisa  $x = 3$ , es decir, que tengan la misma tangente en este punto.

b) Halla la ecuación de la recta tangente del apartado a).

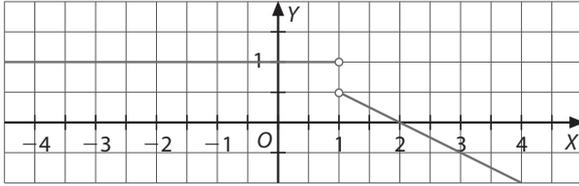
c) Para el valor de  $a$  obtenido en el primer apartado, calcula el valor del área de la región limitada por el eje de abscisas y la función  $f(x)$ .

a)  $a = 3, b = -\frac{17}{2}$

b)  $y = 3x - 13$

c)  $\frac{125}{6} u^2$

- 36 ■■■ La función derivada  $f'(x)$  de una cierta función continua  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función a trozos formada por las semirectas del dibujo.



- a) Determina si es derivable en todos los puntos de  $\mathbb{R}$  y por qué.  
 b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ .  
 c) Averigua si  $f(x)$  tiene algún extremo relativo y, si es así, para qué valor de  $x$  y de qué tipo.  
 d) Sabiendo que  $f(0) = 1$ , calcula  $f(1)$ .

- a) La función es derivable en  $\mathbb{R} - \{1\}$ .  
 b) La función crece para los valores  $x \in (-\infty, 2)$  y decrece si  $x \in (2, +\infty)$ .  
 c) Para  $x = 2$  tenemos un máximo relativo.  
 d)  $f(1) = 2$

- 37 ■■■ Los beneficios de una empresa, en miles de euros por año, se ajustan a la siguiente función:

$$B(x) = \frac{5x}{x^2 + 4}$$

¿A cuánto ascienden los beneficios acumulados en los cinco primeros años de vida de la empresa?

Sol: 4 952,50 €.

- 38 ■■■ Un proyectil se lanza desde un avión con velocidad, en m/s, de ecuación  $v(t) = 10 + 32t$ . Si a los 10 s todavía no ha llegado al suelo, ¿qué se puede afirmar sobre la altura a la que va el avión?

Sol: La altura a la que va el avión es superior a los 1 700 m.

## Actividades tipo test

Escoge y razona la respuesta correcta en cada caso.

- 39 ■■■ Si  $F'(x) = \frac{1}{2}x + 2$  y la gráfica de  $F(x)$  presenta un mínimo en el punto de ordenada  $-4$ , entonces:

- a)  $F(x) = \frac{x^2}{4} - 2x + 4$       c)  $F(x) = \frac{x^2}{4} + 8x + 2$   
 b)  $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - 4$       d)  $F(x) = \frac{x^2}{4} + 2x + 8$

Sol: La respuesta correcta es la **d**).

- 70 ■■■ En un plano el trazado de una carretera discurre según la ecuación  $y = \frac{x^2}{4} - x$ , siendo un río el eje  $X$ . En el terreno entre el río y la carretera hay un pinar. Si expresamos las distancias en kilómetros, ¿cuánto vale el pinar si la hectárea se paga a 60 euros?

- a) 15 600 €  
 b) 16 000 €  
 c) 23 300 €

Sol: La respuesta correcta es la **b**).

## Evaluación

1. Calcula una primitiva de la función:  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln x^2}}$

Sol:  $-\sqrt{1 - \ln x^2} + C$

2. Resuelve las siguientes integrales.

a)  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

a)  $2e^{\sqrt{x}} + C$

b)  $\int \frac{x - 1/2}{x(x - 1)} dx$

b)  $\frac{1}{2} \ln(x^2 - x) + C$

c)  $\int \frac{x + 1}{3x^2 + 6x} dx$

c)  $\frac{1}{6} \ln(x^2 + 2x) + C$

3. Dada la función  $f(x) = x^2 - 1$ , en el intervalo  $[-3, 2]$  y la partición  $P$  del mismo formada por los puntos  $P = \{-3, -2, -1, 1, 2\}$ , halla la suma superior y la suma inferior correspondientes a dicha partición y dicho intervalo.

Sol: Suma superior: 14

Suma inferior: 1

4. Halla el valor medio de la función  $f(x) = (x + 1)\sqrt{x}$  en el intervalo  $[0, 2]$ .

Sol: 2,07 aprox

5. Encuentra el punto en el que se alcanza el valor medio de la función  $f(x) = x^2 + x + 1$  en el intervalo  $[-2, 1]$ .

Sol:  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

6. Determina la derivada de la función  $G(x) = \int_4^{x+3} \frac{1}{t-3}$  en  $x = 2$ .

Sol:  $G'(2) = \frac{1}{2}$

7. Calcula el área limitada por la curva  $y = \sqrt[3]{x}$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .

Sol:  $\frac{3}{2}u^2$

8. Halla el área de la región del plano delimitada por la curva  $y = x^3 - x^2 - 2x$  y las rectas  $y = x + 1$  y  $x = 3$ .

Sol:  $9,751611\dots u^2$

9. Determina la función cuya derivada segunda es 6 sabiendo que su gráfica pasa por el punto  $(-1, 0)$  y en dicho punto la pendiente de su recta tangente es  $-4$ .

Sol:  $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

10. Averigua la ecuación de la parábola  $f(x) = ax^2 + bx + c$  que en el punto de abscisa  $x = -1$  tiene por tangente la recta  $y = -x + 3$ , y  $f'(x) = 3$ .

Sol:  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$

11. Determina una constante positiva,  $a$ , sabiendo que la figura plana delimitada por la parábola  $y = 3ax^2 + 2x$ , la recta  $y = 0$  y la recta  $x = a$ , tiene área  $A = (a^2 - 1)^2$ .

Sol:  $a = \sqrt{3}/3$

12. La evolución de la demanda de un producto, en miles de artículos, en los cinco años transcurridos desde su aparición en el mercado, viene dada por la expresión  $d(t) = 16e^{-0,1t}$ , donde  $t$  expresa el tiempo, contado por semestres. Encuentra:

a) El número de artículos demandados durante los tres primeros años.

b) La demanda media de artículos durante los dos últimos años.

a) Unos 72 190 artículos.

b) Una media anual de 28 949 artículos.