1. Calcula las siguientes integrales:

$a)\int \frac{x^3-2}{x^2-x-2}dx$ (1,25 puntos) $\qquad b)\int (x^2+1)\cdot senx\,dx$ (1,25 puntos)

$c)\int \frac{3x}{\sqrt{x^2-2}}dx$ (1 punto) $\qquad d)\int \frac{2e^{2x}}{e^x+1}dx$ (1,25 puntos)

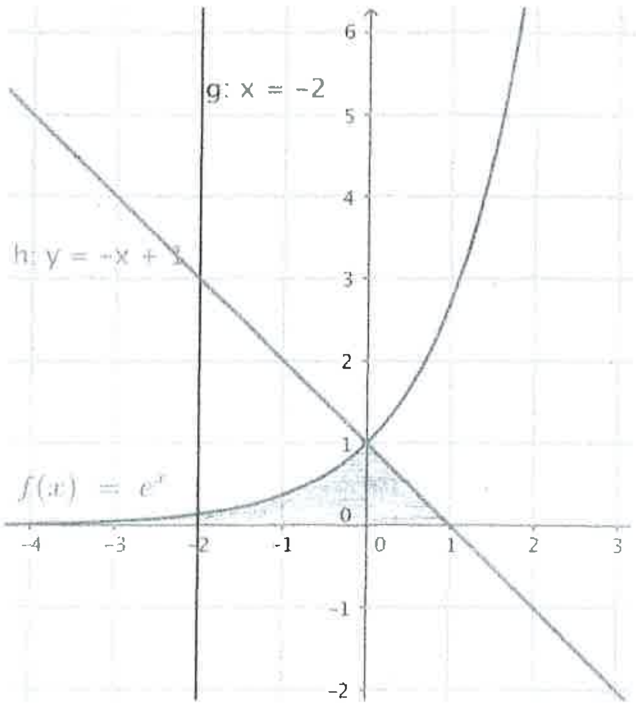
2. Dada la función $f(x) = e^x \cdot sen\,x$, se pide:
   a) Halla la integral siguiente: $I = \int e^x \cdot sen\,x$.
   b) Encuentra la primitiva de f(x) que pasa por el punto (0, 2)

(1,75 puntos)

3. Dadas las siguientes parábolas $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = 2x^2 - 4x + 3$.
   a) Esboza el recinto comprendido entre ambas funciones.
   b) Halla el área del recinto anterior.

(2,25 puntos)

4. Calcula el área del recinto limitado por las curvas $y = e^x$, $y = -x + 1$, la recta vertical $x = -2$ y el eje de abcisas que se muestra en la figura adjunta.



(1,25 puntos)

$R = \int_{-2}^{0} e^x dx + \int_0^1 -x+1\,dx =$

$= e^x\Big]_{-2}^{0} + -\frac{x^2}{2} + x\Big]_0^1 =$

$= e^0 - e^{-2} + -\frac{1}{2} + 1 - 0 =$

$= 1 - e^{-2} - \frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{1}{2} - e^{-2} =$

$= \frac{3}{2} - e^{-2}\ u^2$

1.- a) $\displaystyle\int \frac{x^3-2}{x^2-x-2}\,dx = \int \left[(x+1) + \frac{3x}{(x-2)(x+1)}\right] dx =$

$$\begin{array}{r|l} x^3 \qquad\quad -2 & x^2-x-2 \\ \cancel{-x^3}+x^2+2x \quad & \overline{x+1} \\ \hline \cancel{x^2}+2x-\cancel{2} & \\ \cancel{-x^2}+x+\cancel{2} & \\ \hline 3x & \end{array}$$

$$(*) = \int (x+1)\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-2| + \ln|x+1| + K}$$

Descompondremos en fracciones simples:

$(*)\ \dfrac{3x}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+1} \Rightarrow 3x = A(x+1) + B(x-2)$

Si $x=-1 \Rightarrow -3 = -3B$ $\quad \boxed{B=1}$

Si $x=2 \Rightarrow 6 = 3A$ $\quad A=2$

Con ello; $\dfrac{3x}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{1}{x+1}$

b) $\displaystyle\int (x^2+1)\operatorname{sen} x\,dx = \left\{\begin{array}{l} \text{Por partes} \\ u = x^2+1 \Rightarrow du = 2x\,dx \\ \operatorname{sen} x\,dx = dv \Rightarrow -\cos x = v \end{array}\right\} =$

$$= -(x^2+1)\cdot\cos x - \int -\cos x \cdot 2x\,dx = -(x^2+1)\cdot\cos x + \int 2x\cdot\cos x\,dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \text{Por partes} \\ 2x = u \to 2dx = du \\ \cos x\,dx = dv \Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{array}\right\} = -(x^2+1)\cos x + 2x\operatorname{sen} x - \int 2\operatorname{sen} x\,dx =$$

$$= \boxed{(-x^2+1)\cdot\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + K}$$

c) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{x^2-2}}\,dx = \int \frac{3\cancel{x}}{\cancel{t}} \cdot \frac{\cancel{t}\,dt}{\cancel{x}} = 3t + K = \boxed{3\sqrt{x^2-2} + K}$

Cambio de variable

$x^2-2 = t^2$

$2x\,dx = 2t\,dt$

$dx = \dfrac{t\,dt}{x}$

2ª forma:

$$\int \frac{3x}{\sqrt{x^2-2}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-2}}\,dx =$$

$$= \frac{3}{1}\underbrace{\int \frac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}\,dx}_{\text{inmediata}} = 3\sqrt{x^2-2} + K$$

d) $\displaystyle\int \frac{2e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \left\{\begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array}\right\}$

$$= \int \frac{2t^2}{t+1}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{2t}{t+1}\,dt = \int \left(2 - \frac{2}{t+1}\right)dt = 2t - 2\ln|t+1| + K$$

$$= 2e^x - 2\ln|e^x+1| + K$$

Integramos por partes

2.- a) $I = \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} e^x dx = dv \to v = e^x \\ \operatorname{sen} x = u \to \cos x \, dx = du \end{array} \right\}$

$= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx =$

de nuevo integramos por partes $\begin{array}{l} v = e^x \\ \cos x = u \\ \operatorname{sen} x \, dx = du \end{array}$

$= e^x \operatorname{sen} x - \left[e^x \cos x - \int -e^x \operatorname{sen} x \, dx \right] =$

$= e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$

$$I = e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) - I \Rightarrow$$ Despejando I

$$I = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + K$$

(b) Si $x = 0 \Rightarrow I = 2$

$\frac{1}{2} e^0 (\operatorname{sen} 0 - \cos 0) + K = 2$ y despejamos K,

$\frac{1}{2}(0-1) + K = -\frac{1}{2} + K = 2 \Rightarrow \boxed{K = 2 + \frac{1}{2} = 5/2}$

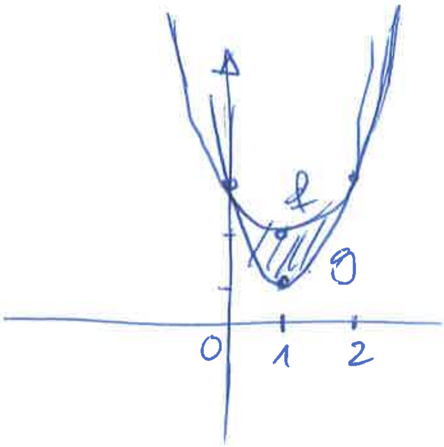
Entonces la primitiva buscada es $\boxed{\frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x) + \frac{5}{2}}$

3.- $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 2x^2 - 4x + 3 \Rightarrow -x^2 + 2x = 0$

$x(-x+2) = 0 \begin{array}{l} \nearrow x = 0 \\ \searrow x = 2 \end{array}$

x	$f(x) = x^2 - 2x + 3$
0	3
1	2
2	3
3	6

x	$y = g(x)$
0	3
1	1
2	3
3	5



$R = \int_0^2 (f(x) - g(x)) \, dx = \int_0^2 -x^2 + 2x \, dx =$

$= -\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \Big]_0^2 = \frac{-8}{3} + 4 - 0 = \frac{-8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{4}{3} u^2$