Examen resuelto MATRICES Y DETERMINANTES (Modelo EBAU)

De las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Determina cuáles tienen inversa y en los casos en que exista, calcula el determinante de dichas inversas.

La matriz B no tiene inversa porque no es cuadrada. La matriz C no tiene inversa porque su determinante vale cero.

$$\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

$$\left|D^{-1}\right|=\frac{1}{|D|}=\frac{1}{1}=1$$

Determina la matriz X tal que $A\cdot X-3\cdot B=0$, siendo: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & -7\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

Sabemos que:

$$A\cdot X=3\cdot B\Rightarrow X=3\cdot A^{-1}\cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de A.

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ -1 & -2 & -1\\ 3 & 5 & 3\end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -3\\ -4 & 2 & -5\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

Luego:

$$X=3\cdot A^{-1}\cdot B=3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & -3\\ -4 & 2 & -5\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -15\\ 12 & -39\\ 9 & -21\end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

a) Calcula el determinante de las matrices: $2\cdot A$; A^{31} y $(A^{31})^{-1}$.

b) Halla la matriz A^{-1}.

a)

$$|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot (-1) = -8$$

$$|A^{31}| = (-1)^{31} = -1$$

$$|(A^{31})^{-1}| = -1$$

b) Calculamos la matriz inversa de A.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores del parámetro λ la matriz A no tiene inversa.
b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $\lambda = -2$.

a) Calculamos el determinante de A.

$$|A| = 1 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Luego, la matriz A no tiene inversa para $\lambda = \pm 1$.

b) Calculamos la matriz inversa de A para $\lambda = -2$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}^t}{-3} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}}{-3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$