

EXAMEN de FUNCIONES

Todos los apartados tienen que estar justificados correctamente, no hacerlo equivale a la anulación de la pregunta correspondiente.

1. Calcula la ecuación de las siguientes rectas y represéntalas: (1.5 puntos).
 - a) La recta que pasa por los puntos $A(-2,4)$ y $B(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. (1 punto)
 - b) La recta que pasa por los puntos $C(3,2)$ y $D(3,8)$. (0.25 puntos)
 - c) La recta que pasa por los puntos $E(0, -2)$ y $F(-1, -2)$. (0.25 puntos)

2. Considera la parábola de ecuación: $y = -x^2 - 4x$ (2 puntos)
 - a) ¿Cuál es su dominio? (0.1 puntos)
 - b) ¿Cómo es su curvatura? (0.1 puntos)
 - c) Halla las coordenadas de su vértice. (0.3 puntos)
 - d) ¿Es su vértice un máximo o un mínimo? ¿Por qué? (0.2 puntos)
 - e) Indica los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. (0.2 puntos)
 - f) Obtén los puntos de corte de la parábola con los ejes de coordenadas. (0.3 puntos)
 - g) Estudia el signo de la parábola. (0.3 puntos)
 - h) Construye una tabla de valores donde aparezcan, al menos, tres puntos diferentes a los anteriormente obtenidos. (0.1 puntos)
 - i) Representa la parábola gráficamente. (0.4 puntos)

3. Considera la hipérbola de ecuación: $y = \frac{-1}{x-1} + 1$ (2.5 puntos)
 - a) ¿Cuál es su dominio? (0.3 puntos)
 - b) Halla sus asíntotas. (0.5 puntos)
 - c) Obtén los puntos de corte de la hipérbola con los ejes de coordenadas. (0.3 puntos)
 - d) Estudia el signo de la función. (0.4 puntos)
 - e) Representa la hipérbola gráficamente. (0.8 puntos)
 - f) Indica los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. (0.2 puntos)

4. Considera la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x-2} & \text{si } x < -1 \\ x^2 + a & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$, tomando $a = 1$. (4 puntos).
 - a) Representa la función gráficamente. **ESTUDIA EN PRIMER LUGAR LAS FUNCIONES POR SEPARADO.** (2 puntos).
 - b) Indica su dominio. (0.5 puntos).
 - c) ¿Es continua? En caso de no serlo indica el/los punto/s donde no lo/s sea/n. No olvides justificar la respuesta. (0.5 puntos).
 - d) Observa la gráfica que has construido e indica: intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos (absolutos y/o relativos), si los hubiera. (1 punto).

EJERCICIO EXTRA:

Calcula el valor de "a" en el ejercicio anterior para que la función sea continua justificando la respuesta. (1 punto).

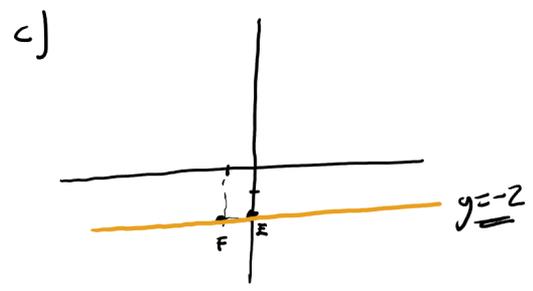
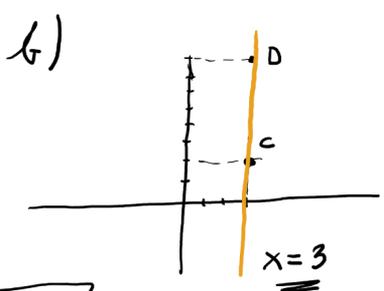
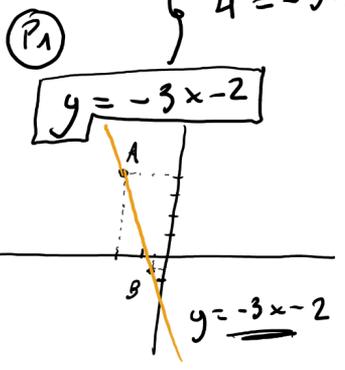
EJERCICIO 1 a) $P_1(-2, 4)$ y $P_2(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

$$m = \text{tg } \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{1}{2} - 4}{-\frac{1}{2} - (-2)} = \frac{-\frac{1-8}{2}}{\frac{-1+4}{2}} = \frac{-9}{3} = -3.$$

$$y = mx + n$$

$$y = -3x + n$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 = -3 \cdot (-2) + n \Rightarrow 4 = 6 + n \\ n = -2. \end{array}$$



EJERCICIO 2

$$y = -x^2 - 4x$$

a) Dom = \mathbb{R} .

b) $a < 0 \Rightarrow$

c) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{-2} = -2.$

$$y = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) = -4 + 8 = 4.$$

$P_v(-2, 4)$.

d) El vértice es un máximo debido a la curvatura de la parábola.

e) I. Crecimiento: $(-\infty, -2)$

II. Decrecimiento: $(-2, \infty)$.

f). Puntos de corte: $-x^2 - 4x = 0 \Rightarrow -x(x+4) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -4. \end{cases}$

• Eje x: $y = 0$. $P_1(0, 0)$.

$P_2(-4, 0)$.

• Eje y: $x = 0$. $P(0, 0)$.

g) Signo:

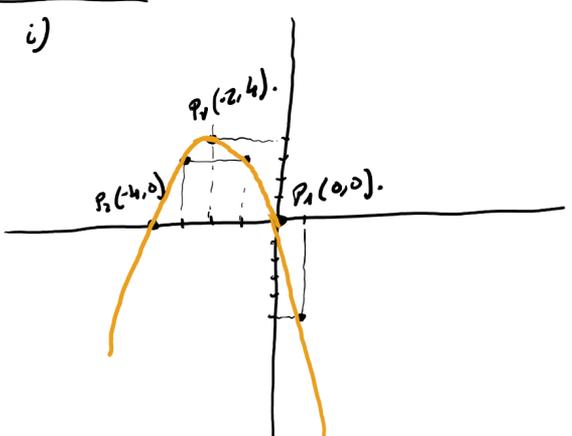
$$-x^2 - 4x > 0 : (-4, 0).$$

$$-x^2 - 4x < 0 : (-\infty, -4) \cup (0, \infty).$$

$-x^2 - 4x$	-	+	-
-------------	---	---	---

h)

x	y
-1	3
-3	3
1	-5



EJERCICIO 3 $y = \frac{-1}{x-1} + 1$ Dom = $\mathbb{R} - \{1\}$.

a) $x-1=0 \Rightarrow x=1$.

b) Asíntotas:

• A. Vertical: $x=1$.
 • A. Horizontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{x-1} + 1\right) = 0 + 1$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{x-1} + 1\right) = 0 + 1$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} y = \underline{1}$

c) Puntos de corte:

• Eje x: $y=0$. $\frac{-1}{x-1} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{-1}{x-1} = -1 \Rightarrow 1 = x-1$
 $x=2 \Rightarrow P(2,0)$.

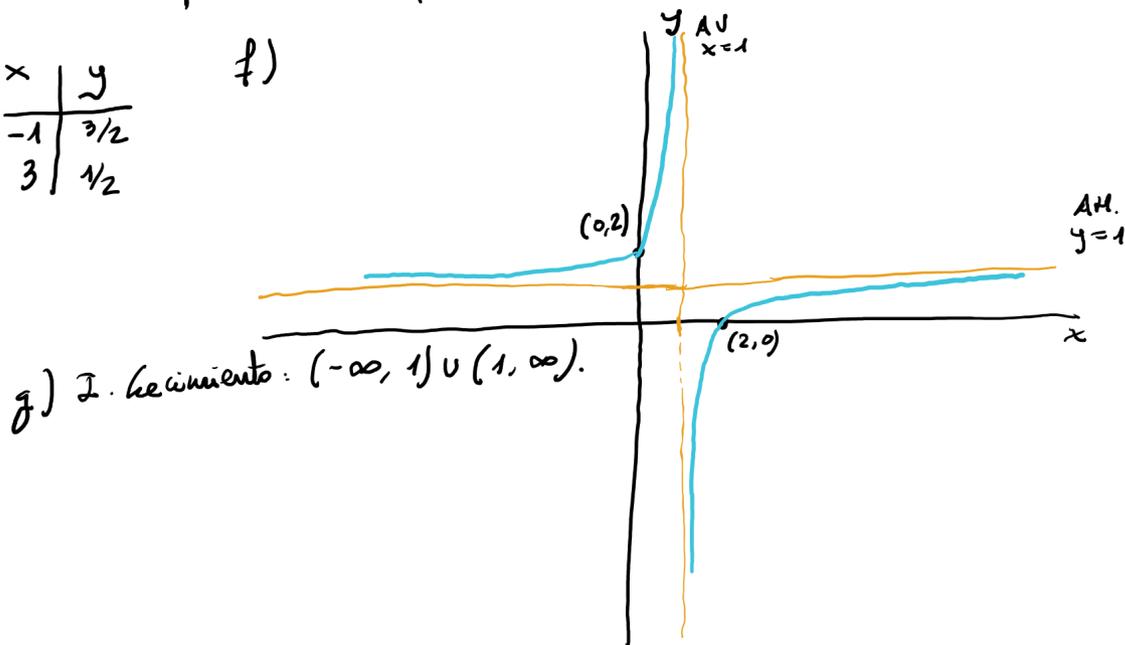
• Eje y: $x=0$. $y = \frac{-1}{0-1} + 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow P(0,2)$.

d) Signo: $y = \frac{-1}{x-1} + 1 = \frac{-1+x-1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$

	$-\infty$	1	2	∞	
$x-2$	-	-	+	+	$\frac{x-2}{x-1} > 0: (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$
$x-1$	-	+	+	+	$\frac{x-2}{x-1} < 0: (1, 2)$
	+	-	+		

e) $x \mid y$ f)

-1	$3/2$
3	$1/2$



EJERCICIO 4

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x-2} & \text{si } x < -1 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

a) $f_1(x) = \frac{-1}{x-2}$

• Dominio = $\mathbb{R} - \{2\}$.

• Asíntotas:

- Vertical: $x=2$.

- Horizontal: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-1}{x-2}\right) = 0 \rightarrow y=0$

• Ptos. de corte:

- Eje x. $y=0$. $\frac{-1}{x-2} = 0 \rightarrow -1 \neq 0$ ~~Solución.~~

- Eje y. $x=0$. $y = \frac{-1}{0-2} = \frac{1}{2}$. $P(0, \frac{1}{2})$.

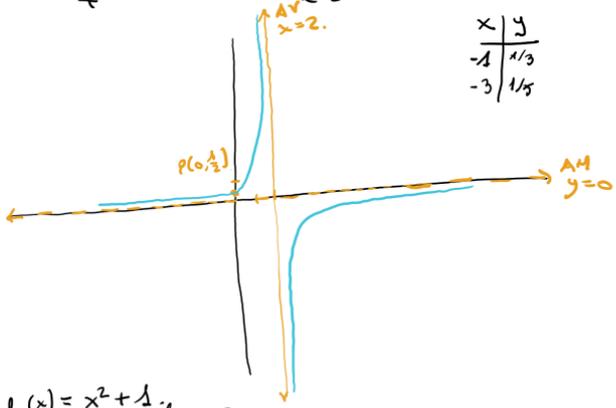
• Signo de la función: $y = \frac{-1}{x-2}$.

- Numerador: $-1 < 0$.

- Denominador: $x-2=0 \rightarrow x=2$.

$-\infty$	2	∞
$\frac{-1}{x-2} > 0$		$\frac{-1}{x-2} < 0$

$-\frac{1}{x-2}$	$-$	$-$
$\frac{-1}{x-2}$	$-$	$+$
	$+$	$-$



x	y
-1	1/3
-3	1/5

$f_2(x) = x^2+1$

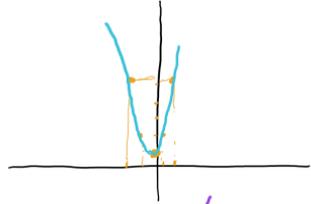
$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$

$y_v = 0+1=1$

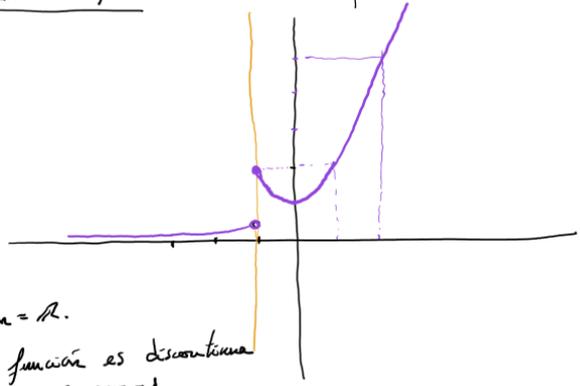
$P_v(0, 1)$

• Por la curvatura no hay corte con el eje x.

x	y
1	2
2	5
-1	2
-2	5



GRÁFICA $f(x)$.



b) $\text{Dom} = \mathbb{R}$.

c) la función es discontinua en $x=-1$.

d) I. Crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.

II. Decrecimiento: $(-1, 0)$.

Máximo relativo: $(0, 1)$.

EJERCICIO EXTRA

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x-2} & \text{si } x < -1 \\ x^2+a & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$f_1(x) = \frac{-1}{x-2}$, $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{2\}$. como $x=2 \notin (-\infty, -1)$. f_1 es continua $\forall x \in (-\infty, -1)$.

$f_2(x) = x^2+a$, $\text{Dom} = \mathbb{R}$. f_2 es conti. $\forall x \in (-1, \infty)$.

\rightarrow Punto crítico $x=-1$.

$$\left. \begin{aligned} f(-1^-) &= \frac{-1}{-1-2} = \frac{1}{3} \\ f(-1^+) &= (-1)^2+a = a+1 \end{aligned} \right\} f(-1^-) = f(-1^+)$$

$\frac{1}{3} = a+1 \rightarrow$

$\rightarrow a = \frac{1}{3} - 1 = \frac{1-3}{3} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$