<u>Ejercicio</u> 1. Calificación máxima: 4 puntos.
Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2.5 puntos) Calcular la matriz A^{-1} inversa de A y resolver la ecuación matricial $AX = 2B$.

b) (1.5 puntos) Obtener el determinante de la matriz $D = BC - A^2$.

<u>Ejercicio</u> 2. Calificación máxima: 6 puntos.
Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3a+1 & 4 \\ 3a+1 & a^2 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos) ¿Para qué valores de a es invertible la matriz $P = AB$? Para $a = 1$, obtener la matriz inversa P^{-1} de P.

b) (2 puntos) Determinar para qué valores de a es invertible la matriz $Q = A^t B^t - I$, siendo I la matriz identidad.

c) (2 puntos) Determinar para qué valores de a la matriz C no admite inversa.

<u>Ejercicio</u> 1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcular la matriz A^{-1} inversa de A y resolver la ecuación matricial $AX = 2B$.

b) Obtener el determinante de la matriz $D = BC - A^2$.

<u>Solución</u>.-

a) La matriz inversa viene dada por la expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 - (-1) = 1 - 4 + 1 = -2$$

$$AdjA = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AdjA)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a ambos miembros de la ecuación por la izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}2B \quad \rightarrow \quad X = 2A^{-1}B$$

$$X = 2\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} -2-2-3 \\ 4+2+2 \\ -2-2-1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) La matriz BC será una matriz de dimensión $3x3$:

$$BC = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

La matriz A^2 se obtiene multiplicando la matriz A por sí misma:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 2+2 & 1+4+1 \\ -2 & 1 & 2+2 \\ -1-1 & -2 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz D se obtiene restando las matrices obtenidas anteriormente:

$$D = BC - A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -12 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Obtenemos su determinante:

$$|\,D\,| = \begin{vmatrix} 2 & -6 & -12 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 18 - (-2 + 18) = 6 - 16 = -10$$

Ejercicio 2. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3a+1 & 4 \\ 3a+1 & a^2 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de a es invertible la matriz $P = AB$? Para $a = 1$, obtener la matriz inversa P^{-1} de P.

b) Determinar para qué valores de a es invertible la matriz $Q = A^t B^t - I$, siendo I la matriz identidad.

c) Determinar para qué valores de a la matriz C no admite inversa.

Solución.-

a) Sea la matriz C:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & -a+a \\ 1+2a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 1+2a & 1 \end{pmatrix}$$

Para que la matriz C sea invertible $|\,C\,| \neq 0$.

$$|\,C\,| = \begin{vmatrix} 1+a & 0 \\ 1+2a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a = 0 \quad \rightarrow \quad a = -1$$

Luego la matriz C es invertible para $a \neq -1$

Para $a = 1$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$:

$$|\,C\,| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$AdjC = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad (AdjA)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz inversa de C es:

$$C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Sea la matriz Q:

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ -a+a & a+1 & a^2 \\ 2a & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -a \\ 0 & a & a^2 \\ 2a & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para que la matriz D sea invertible $|\,D\,| \neq 0$.

$$| Q | = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -a \\ 0 & a & a^2 \\ 2a & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2a^3 - (-2a^3) = -2a^3 + 2a^3 = 0$$

La matriz Q nunca es invertible pues su determinante siempre vale 0 independientemente del valor de a.

c) Si la matriz C no admite inversa, entonces $| C | = 0$.

$$| C | = \begin{vmatrix} 3a+1 & 4 \\ 3a+1 & a^2 \end{vmatrix} = 3a^3 + a^2 - 12a - 4 = 0$$

Resolvemos la ecuación de tercer grado aplicando Ruffini:

	3	1	−12	−4
2		6	14	4
	3	7	2	0

Luego $a_1 = 2$

Obtenemos las otras dos raíces resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$3a^2 + 7a + 2 = 0$$

$$a = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-7 \pm 5}{6} =$$

$$a_2 = \frac{-7+5}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{-7-5}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

La matriz C no admite inversa para $a = \left\{2, -2, -\frac{1}{3}\right\}$