Ejercicio 1. Calificación máxima: 5 puntos.

a) (2 puntos) Encontrar los valores de a para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es invertible.

b) (3 puntos) Para $a = 2$ hallar la inversa de A y comprobar el resultado.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 5 puntos.

Dado el sistema:

$$\begin{cases} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{cases}$$

se pide:

a) (3 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real a.

b) (2 puntos) Resolverlo, si es posible, para $a = -1$.

<u>Ejercicio</u> 1.

a) Encontrar los valores de a para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es invertible.

b) Para $a = 2$ hallar la inversa de A y comprobar el resultado.

<u>Solución</u>.-

a) La matriz A es invertible si $|A| \neq 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathrm{a}-1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathrm{a}-2 & 1 \\ \mathrm{a} & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a-2) + a - [-a(a-2)] =$$

$$= 2(a^2 - 2a - a + 2) - (-a^2 + 2a) = 2a^2 - 4a - 2a + 4 + a + a^2 - 2a = 3a^2 - 7a + 4 = 0$$

$$a = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{7 \pm 1}{6} =$$

$$a_1 = \frac{7+1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$a_2 = \frac{7-1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

La matriz A es invertible si $a \neq \{1,\ 4/3\}$.

b) La matriz inversa viene dada por la expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$AdjA = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(AdjA)^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se comprueba el resultado verificando que $A \cdot A^{-1} = I$:

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2+4-2 & 1-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4+4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Dado el sistema:

$$\begin{cases} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{cases}$$

se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro real a.

b) Resolverlo, si es posible, para $a = -1$.

Solución.-

a) Estudiamos el rango de la matriz ampliada $M^* = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 & 0 \\ 2 & a & 4 & 2 \\ 2 & a & 6 & a-2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{vmatrix} = 6a^2 + 12a + 16 - (12a + 4a^2 + 24) = 6a^2 + 12a + 16 - 12a - 4a^2 - 24 =$$

$$= 2a^2 - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad 2a^2 = 8 \quad \rightarrow \quad a^2 = 4 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -2 \end{cases}$$

Para $\boldsymbol{a \neq \{-2, 2\}}$, $\quad \boldsymbol{rg(M^*) = 3}$

Para $a = 2$, $M^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0 \quad (C1 = C2) \qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0 \quad (F1 = F3)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0 \quad (F1 = F3) \qquad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 12 = -4 \neq 0$$

Para $\boldsymbol{a = 2}$, $\boldsymbol{rg(M^*) = 2}$

Para $m = -2$, $M^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 8 - (8 - 16) = 0 \quad (C1 = -C2)$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 32 + 24 - (-24 - 32) = 128 \neq 0 \quad (F1 = F3)$$

Para $\boldsymbol{a = -2}$, $\boldsymbol{rg(M^*) = 3}$

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes $M = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \to \quad a = \{-2, 2\}$$

Para $\boldsymbol{a \neq \{2, -2\}}$, $\boldsymbol{rg(M) = 3}$

Para $a = 2$, $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Para $\boldsymbol{a = 2}$, $\boldsymbol{rg(M) = 2}$

Para $a = -2$, $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-12) = 20 \neq 0$$

Para $\boldsymbol{a = -2}$, $\boldsymbol{rg(M) = 2}$

Para $a \neq \{-2, 2\}$, $rg\ (M) = rg(M^*) = 3$ (nº incógnitas) $\to$ Sistema compatible determinado

Para $a = 2$, $rg\ (M) = rg(M^*) = 2 < 3$ (nº incógnitas) $\to$ Sistema compatible indeterminado

Para $a = -2$, $rg\ (M) \neq rg(M^*)$ $\to$ Sistema incompatible

b) Para $a = -1$, el sistema es compatible determinado, luego tendrá solución única. Resolviéndolo por Cramer:

$$M^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \to \quad |M| = 6 - 12 + 16 - (-12 + 4 + 24) = 10 - 16 = -6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{0 - 12 - 24 - (18 + 24)}{-6} = \frac{-36 - 42}{-6} = \frac{-78}{-6} = 13$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{-12 - 36 - (24 + 12)}{-6} = \frac{-48 - 36}{-6} = \frac{-84}{-6} = 14$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{-3 + 8 - (2 - 12)}{-6} = \frac{5 + 10}{-6} = \frac{15}{-6} = -\frac{5}{2}$$

Los tres planos se cortan en el punto $A(13, 14, -5/2)$