

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x)$:

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 1}$$

a) (0.5 puntos) Calcular el dominio de $f(x)$.

b) (1.5 puntos) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Obtener el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - x - 2}$

Ejercicio 1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

- (0.75p) Continuidad de $f(x)$ en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{-x} - 2) = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$f(0) = e^0 - 2 = -1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = -1$, $f(x)$ es continua en $x = 0$.

- (1.25p) Derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{0 \cdot (x-1) - 1 \cdot 1}{(x-1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{-1}{(x-1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-e^{-x}) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1$, $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

Para $x = 1$ se anula el denominador de la función definida para $x > 0$, luego habrá que estudiar la continuidad y derivabilidad de la función en dicho punto.

- (0.75p) Continuidad de $f(x)$ en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$f(1) = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \nexists$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x = 1$.

- (0.25p) Derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$:

Por ser $f(x)$ discontinua en $x = 1$, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

Ejercicio 2. Calcular los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right) &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} \text{ (L'Hopital) } = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{sen} x)' - x'}{(x)' \cdot \operatorname{sen} x + x \cdot (\operatorname{sen} x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x \cdot \cos x} = \frac{0}{0} \text{ (L'Hopital) } = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x + x \cdot (-\operatorname{sen} x)} = \frac{0}{1 + 1 - 0} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5x} - x)(\sqrt{x^2 + 5x} + x)}{\sqrt{x^2 + 5x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5x})^2 - (x)^2}{\sqrt{x^2 + 5x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5x - x^2}{\sqrt{x^2 + 5x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 5x} + x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 3. Dada la función $f(x)$:

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 1}$$

- a) Calcular el dominio de $f(x)$.
- b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$.

SOLUCIÓN

a) Buscamos los valores que anulan el denominador:

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } f(x) = x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

b) La ecuación punto-pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$\begin{aligned} x_0 = 0 &\rightarrow y_0 = f(0) = \frac{e^0}{0 - 1} = \frac{1}{-1} = -1 \\ f'(x) &= \frac{(e^{2x})' \cdot (x^2 - 1) - e^{2x} \cdot (x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2 \cdot e^{2x} \cdot (x^2 - 1) - e^{2x} \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} \rightarrow \\ m = f'(0) &= \frac{2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0}{(-1)^2} = -2 \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$y + 1 = -2(x - 0) \rightarrow y + 1 = -2x \rightarrow y = -2x - 1$$

Ejercicio 4. Obtener el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - x - 2}$

SOLUCIÓN

El dominio de la función será la solución de la inecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 \geq 0$ (I).

Buscamos las raíces de la ecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$. Aplicando Ruffini:

	1	2	-1	-2
1		1	3	2
	1	3	2	0

La primera de las raíces buscadas es $x_1 = 1$.

Obtenemos las otras dos raíces resolviendo la ecuación de segundo grado $x^2 + 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$x_3 = \frac{-3 + 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow x_2 = -1$$

$$x_4 = \frac{-3 - 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \rightarrow x_3 = -2$$

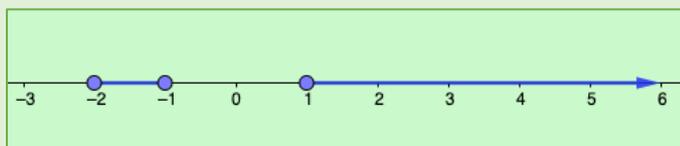
Situamos las raíces obtenidas sobre la recta real y comprobamos si un valor de cada intervalo verifica o no la inecuación (I):

$$x = -3 \rightarrow -27 + 18 + 3 - 2 \geq 0 \rightarrow -8 \geq 0 \text{ NO}$$

$$x = -1,5 \rightarrow 3,375 + 4,5 + 1,5 - 2 \geq 0 \rightarrow 0,625 \geq 0 \text{ SÍ}$$

$$x = 0 \rightarrow -2 \geq 0 \text{ NO}$$

$$x = 2 \rightarrow 8 + 8 - 2 - 2 \geq 0 \rightarrow 12 \geq 0 \text{ SÍ}$$



$$\text{Dom } f(x) = [-2, -1] \cup [1, +\infty)$$