Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Estudia su monotonía.

1er modo

Calculamos $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

Planteamos $f'(x) = 0$; $3x^2 - 6x - 9 = 0$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ POSIBLES PTOS EXTREMOS

Calculamos $f''(x) = 6x - 6$

$f''(-1) = 6(-1) - 6 = -12 < 0$ MÁXIMO en $(-1, f(-1))$

$f''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 18 - 6 = 12 > 0$ mínimo en $(3, f(3))$

De ahí se deduce que:

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
$f(x)$ es decreciente en $(-1, 3)$

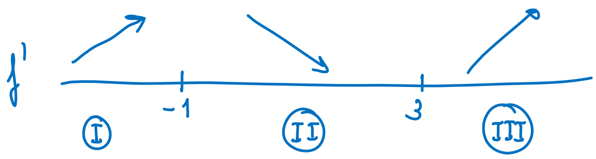
2º modo

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

Planteamos y resolvemos la inecuación $f'(x) > 0$;

$3x^2 - 6x - 9 > 0$

$3x^2 - 6x - 9 = 0$; $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ $\qquad 3(x+1)(x-3) > 0$



I $\quad 3(-2)^2 - 6(-2) - 9 = 12 + 12 - 9 > 0$ F. creciente.

II $\quad 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 9 = -9 < 0$ F. decreciente

III $\quad 3 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 - 9 = 48 - 24 - 9 > 0$ F. creciente.

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
$f(x)$ es decreciente en $(-1, 3)$

Estudia crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

$\boxed{2^{\circ}\text{ modo}}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{3x^2(x^2-4x+4) - 2x^4 + 4x^3}{(x-2)^4} =$$

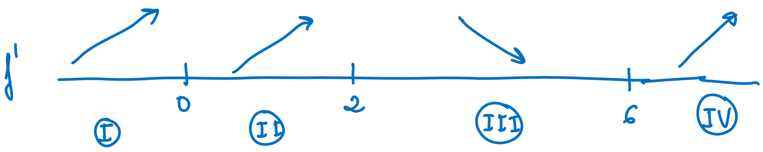
$$= \frac{3x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 2x^4 + 4x^3}{(x-2)^4} = \frac{x^4 - 8x^3 + 12x^2}{(x-2)^4}$$

Planteamos ahora $f'(x) > 0$; $\dfrac{x^4-8x^3+12x^2}{(x-2)^4} > 0$

Como $(x-2)^4 > 0 \quad \forall x \in Dom(f)$, entonces $x^4 - 8x^3 + 12x^2 > 0$;

$x^2(x^2-8x+12) > 0$; $x^2(x-2)(x-6) > 0$

aunque no se pide, siempre se calcula $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$



I $f'(-1) = \dfrac{(-1)^2(-1-2)(-1-6)}{(-1-2)^4} > 0$ Función creciente

II $f'(1) = \dfrac{5}{1} > 0$ F. creciente.

III $f'(3) = \dfrac{3^2(3-2)(3-6)}{(3-2)^4} < 0$ F. decreciente.

IV $f'(7) = \dfrac{7^2(7-2)(7-6)}{(7-2)^4} > 0$ F. creciente.

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$
$f(x)$ es decreciente en $(2, 6)$

$\boxed{1^{er}\text{ modo}}$ $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

$f'(x) = \dots = \dfrac{x^4-8x^3+12x^2}{(x-2)^4}$

Ahora $f'(x) = 0$; $\dfrac{x^4-8x^3+12x^2}{(x-2)^4} = 0$; $x^4 - 8x^3 + 12x^2 = 0$; $x^2(x^2-8x+12) = 0$;

⋮

$x = 0$; $\cancel{x = 2}$; $x = 6$

SE DESCARTA PORQUE $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

Posibles ptos extremos $(0, f(0))$, $(6, f(6))$

Calculamos $f''(x) = \dfrac{(4x^3-24x^2+24x)\cdot(x-2)^4 - (x^4-8x^3+12x^2)\cdot 4(x-2)^3\cdot 1}{(x-2)^8} =$

$$= \frac{\cancel{(x-2)^3}\left[(4x^3-24x^2+24x)(x-2) - (x^4-8x^3+12x^2)\cdot 4\right]}{\cancel{(x-2)^3}(x-2)^5} =$$

$$= \frac{\cancel{4x^4} - \cancel{8x^3} - \cancel{24x^3} + \cancel{48x^2} + 24x^2 - 48x - \cancel{4x^4} + \cancel{32x^3} - \cancel{48x^2}}{(x-2)^5} =$$

$$= \boxed{\frac{24x^2-48x}{(x-2)^5}}$$

$f''(0) = \dfrac{24\cdot 0^2 - 48\cdot 0}{(0-2)^5} = 0$ Posible pto de inflexión

Tendríamos que hacer $f'''(0)$ para saberlo

$f''(6) = \dfrac{24\cdot 6^2 - 48\cdot 6}{(6-2)^5} = \dfrac{864-288}{4^5} > 0$ mínimo en $(6, f(6))$