

Sea $g(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$

a) Asíntotas

b) Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

Dada $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) ¿Tiene asíntotas verticales? ¿y horizontales?

b) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$

Sea $g(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$

a) Asíntotas

b) Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

$g(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$ previamente calculamos el $\text{Dom}(g) = (0, +\infty)$

Asíntotas verticales: Si la hay será en $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{x} = \frac{1 - (-\infty)}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty \quad \text{luego hay asíntota vertical en } x=0$$

Asíntotas horizontales: Solo tiene sentido estudiarla cuando $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x} = \left(\frac{-\infty}{\infty} \right) \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$$

Asíntota horizontal en $y=0$
La función se acerca a la asíntota por abajo.

Crecimiento...

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x - (1 - \ln x)}{x^2} = \frac{-2 + \ln x}{x^2}$$

$$g'(x)=0; \quad \frac{-2 + \ln x}{x^2} = 0; \quad \ln x = 2; \quad x = e^2 \quad \text{POSIBLE PTO EXTREMO.}$$

$$g''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (-2 + \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x + 4x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{5 - 2 \ln x}{x^3}$$

$$g''(e^2) = \frac{5 - 2 \ln e^2}{e^3} = \frac{1}{e^3} > 0 \quad \text{luego hay un mínimo en } (e^2, -\frac{1}{e^2})$$

Función CRECIENTE EN
 $(e^2, +\infty)$

Función DECRECIENTE EN
 $(0, e^2)$

Dada $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) ¿Tiene asíntotas verticales? ¿y horizontales?

b) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$

$f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $\ln(1-x)$ es continua en $(-\infty, 0)$
 x^2/e^x es continua en $(0, +\infty)$

a) Si hubiera asíntota vertical, sería en $x=0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(1-x) = \ln(1-0^-) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{e^x} = \frac{0^2}{e^0} = 0$ } luego no hay asíntota vertical (además, hemos probado que $f(x)$ es cont. en $\mathbb{R}$).

Asínt. horizontales:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0$

Cuando $x \rightarrow +\infty$ asínt. horizontal en $y=0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-(-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+x) = +\infty$

Cuando $x \rightarrow -\infty$ no hay asíntota horizontal

¿Hay asíntota oblicua $y=mx+n$ cuando $x \rightarrow -\infty$?

$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+x)}{-x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1/(1+x)}{-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{(x+1)} = 0$ Rama parabólica

b) $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ x^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f(x) = \frac{x^2}{e^x}$; $f'(x) = \frac{2xe^x - x^2 e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(2x-x^2)}{e^x \cdot e^x}$

$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x-x^2}{e^x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad para $x=0$

$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{1-x} = -1$

$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x-x^2}{e^x} = \frac{0}{e^0} = 0$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$. $f(x)$ no es derivable en $x=0$.

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$