

1A. Determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, de forma que el área del triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(0, a)$ y $C\left(\frac{a}{a-1}, 0\right)$ sea mínima. (2,5 puntos)

2A. Calcula las siguientes integrales:

- a) $\int x \ln(x) dx$. (Indicación: $\ln(x)$ representa el logaritmo neperiano de x). (1,25 puntos)
 b) $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$. (1,25 puntos)

3A. a) Despeja X de la ecuación matricial $X \cdot B - I = X \cdot A + A$, donde X, B, A e I son matrices de tipo 3×3 . (1,25 puntos)

- b) Calcula la matriz X de tamaño 3×3 , solución de la ecuación, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
 $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (1,25 puntos)

4A. a) Analiza, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv 2x - y + z = 0$, $\pi_2 \equiv y + z = m$ y $\pi_3 \equiv mx + y - z = 8$. (1,25 puntos)

- b) Razona que, independientemente del valor del parámetro m , los planos π_2 y π_3 son perpendiculares. (1,25 puntos)

$$1A) A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, a) - (0, 0) = (0, a) \\ \overrightarrow{AC} = \left(\frac{a}{a-1}, 0\right) - (0, 0) = \left(\frac{a}{a-1}, 0\right) \end{array} \right\} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & 0 \\ \frac{a}{a-1} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a^2}{a-1} \vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{\left(-\frac{a^2}{a-1}\right)^2} = \frac{a^2}{a-1}$$

$$S = A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{a-1} = S(a)$$

$$S'(a) = \frac{1}{2} \frac{2a(a-1) - a^2}{(a-1)^2} = \frac{1}{2} \frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2}$$

$$S''(a) = \frac{1}{2} \frac{(2a-2)(a-1)^2 - 2(a^2 - 2a)(a-1)}{(a-1)^4}$$

$$S'(a) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = \begin{cases} 0 & \text{No es solución} \\ 2 & \end{cases}$$

$$S''(2) = 1 > 0 \Rightarrow \boxed{a=2} \text{ en un mínimo relativo}$$

$$1B) a) \int x \ln x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x \, dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$b) \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \, dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \rightarrow t^2 = x \\ dx = 2t \, dt \end{array} \right] = \int \frac{t}{1+t} 2t \, dt = 2 \int \frac{t^2}{1+t} \, dt =$$

$$= 2 \left(\int (t-1) \, dt + \int \frac{1}{t+1} \, dt \right) = 2 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right) =$$

$$= 2 \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} + \ln|\sqrt{x}+1| \right) + C$$

$$\frac{\frac{t^2}{2} - t}{t+1} \cdot \frac{1}{t-1} = \frac{t^2}{t+1} = t-1 + \frac{1}{t+1}$$

$$3A) a) XB - XA = A + I \Rightarrow X(B - A) = A + I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(B - A)(B - A)^{-1} = (A + I)(B - A)^{-1} \Rightarrow \boxed{X = (A + I)(B - A)^{-1}}$$

b) Cálculo de $B - A$

$$B - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $(B - A)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow (B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $A + I$

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X

$$\boxed{X = (A + I)(B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$4A) a) \begin{cases} TL_1 \equiv 2x - y + z = 0 \\ TL_2 \equiv y + z = m \\ TL_3 \equiv mx + y - z = 8 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 \end{pmatrix}, \tilde{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -m \\ m & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|M| = -2 - m - 2 = -m - 4 = 0 \Rightarrow m = -4$$

Si $\boxed{m \neq -4} \Rightarrow \text{rango } M = 3 = \text{rango } \tilde{M} = n^{\circ} \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{sistema compatible determinado} \Rightarrow \text{los tres planos se cortan en un punto}$

$$\text{Si } \boxed{m = -4} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -1 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{2F_1+F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2+F_3} \quad$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{0} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Sistema incompatible}$$

π_1 y π_2 no son paralelos ya que $\frac{2}{0} \neq \frac{-1}{1}$

π_1 y π_3 " " " ya que $\frac{2}{4} \neq \frac{-1}{1}$

π_2 y π_3 " " " ya que $\frac{0}{4} \neq \frac{1}{1}$

Por tanto, los tres planos se cortan dos a dos según tres rectas.