4 VECTORES EN EL ESPACIO

ACTIVIDADES

1 **Dados los puntos del espacio:**

- $P(1, -1, 2)$
- $Q(3, 3, 3)$
- $R(-2, 0, 1)$
- $S(5, 3, -4)$

determina las componentes de los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{SR}$, $\overrightarrow{QS}$ y $\overrightarrow{RQ}$.

Sol:

$\overrightarrow{PQ} = (2, 4, 1)$, $\overrightarrow{PR} = (-3, 1, -1)$, $\overrightarrow{PS} = (4, 4, -6)$, $\overrightarrow{SR} = (-7, -3, 5)$, $\overrightarrow{QS} = (2, 0, -7)$ y $\overrightarrow{RQ} = (5, 3, 2)$

2 **Dados los vectores $\vec{u}_1 = (3, 1, 2)$, $\vec{u}_2 = (4, 3, 1)$, $\vec{u}_3 = (4, 2, 2)$ y $\vec{u}_4 = (0, -2, 2)$:**

a) **Calcula el rango de la matriz formada por $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ y $\vec{u}_4$.**

b) **¿Son un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$?**

Sol: El rango es 2.

No son un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$.

3 **Dados los vectores $(1, -2, 3)$, $(-4, 0, 2)$ y $(-1, 1, 1)$, ¿son base de $\mathbb{R}^3$? En caso afirmativo, expresa en la base canónica el vector $\vec{w} = (4, -2, 1)$ dado en esta base.**

Sol: sí son una base.

$\vec{w} = 4 \cdot (1, -2, 3) - 2 \cdot (-4, 0, 2) + (-1, 1, 1) = (11, -7, 9)$

4 **Dados los vectores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$, calcula:**

a) **El módulo de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

b) **El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.**

c) **El coseno del ángulo que forman.**

d) **La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.**

e) **El valor de w_1 para que el vector $\vec{w} = (w_1, 2, 3)$ sea perpendicular a $\vec{u}$.**

a) $|\vec{u}| = \sqrt{5}$ y $|\vec{v}| = \sqrt{6}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$

c) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{-3}{\sqrt{30}}$

d) $-\sqrt{\dfrac{3}{2}}; -\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

e) $w_1 = 1$

5 **Dados los vectores $\vec{u} = (1, -3, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 3)$:**

a) **Comprueba que son ortogonales.**

b) **Halla sus módulos.**

a) Son ortogonales puesto que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

b) $|\vec{u}| = \sqrt{11}$ y $|\vec{v}| = \sqrt{10}$

6 **Dados los vectores $\vec{u} = (u_1, 2, -2)$ y $\vec{v} = (4, v_2, 3)$, determina u_1 y v_2 para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares y, además, $|\vec{v}| = 13$.**

Sol: $v_2 = \pm 12$

Si $v_2 = 12 \Rightarrow u_1 = -9/2$

Si $v_2 = -12 \Rightarrow u_1 = 15/2$

7 **Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los siguientes puntos: $A(1, 0, 2)$, $B(2, 2, 2)$ y $C(3, -1, 2)$**

Sol: Área $= 5/2$ u^2

8 **Sean los vectores $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (-1, -1, 3)$ y $\vec{w} = (5, 2, 1)$. Calcula:**

a) $\vec{u} \times \vec{v}$

b) $\vec{u} \times \vec{w}$

c) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$

d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, -5, -2)$

b) $\vec{u} \times \vec{w} = (-5, 9, 7)$

c) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (-6, 4, 5)$

d) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (-1, -9, 23)$

9 **Comprueba con los vectores $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$:**

$$\left[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right] = \left[\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}\right] = \left[\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}\right] = -\left[\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}\right] = -\left[\vec{j}, \vec{i}, \vec{k}\right] = -\left[\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}\right]$$

10 **Calcula el volumen del cubo determinado por los vectores que componen la base canónica; es decir, $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$.**

Sol: $V = 1$ u^3

11 **Calcula el volumen de un paralelepípedo determinado por los siguientes vectores: $2\vec{i}$, $3\vec{j}$ y $4\vec{k}$.**

Sol: $V = 24$ u^3

12 **Demuestra las propiedades del producto mixto utilizando su expresión analítica.**

Ejercicios y problemas

Vectores

13 **Dado el vector $\overrightarrow{AB} = (-1, 3, 0)$, determina las coordenadas del punto:**

a) **B si $A(-4, 8, 1)$.**

b) **A si $B(-3, -1, 2)$.**

a) $B(-5, 11, 1)$

b) $A(-2, -4, 2)$

14 **Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (4, 5, 6)$, halla el módulo de los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{v} - \vec{u}$.**

Sol: $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{155}$

$|\vec{v} - \vec{u}| = 3\sqrt{3}$

15 **El vector $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ no es unitario. Determina otro vector unitario con la misma dirección que $\vec{u}$.**

Sol:

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

16 **Divide el segmento de extremos $A(3, -3, -6)$ y $B(7, 5, 10)$ en cuatro partes iguales.**

Sol: $P_1(4, -1, -2)$, $P_2(5, 1, 2)$ y $P_3(6, 3, 6)$.

17 **Un segmento de origen en $A(-1, 4, -2)$ y extremo en el punto B está dividido en cinco partes iguales mediante los puntos de división A_1, A_2, A_3 y A_4. Si se sabe que $A_2(1, 0, 2)$, ¿qué coordenadas tiene el punto B?**

Sol: $B(4, -6, 8)$.

Dependencia e independencia lineal de vectores. Bases

18 **Determina si los siguientes vectores son o no linealmente independientes:**

a) $\vec{a} = (1, 1, -3), \vec{b} = (-3, 2, 0)$ y $\vec{c} = (-1, 4, -6)$

b) $\vec{a} = (4, 3, -1), \vec{b} = (6, -2, 5)$ y $\vec{c} = (-1, 3, 2)$

c) $\vec{a} = (3, 2, -4), \vec{b} = (2, 0, 0)$ y $\vec{c} = (2, 4, -8)$

a) son linealmente dependientes.

b) son linealmente independientes.

c) son linealmente dependientes.

19 **Determina la relación de dependencia entre los vectores de las siguientes familias, en caso de que exista:**

a) $\vec{a} = (1, 0, -2), \vec{b} = (-5, 6, 1)$ y $\vec{c} = (-1, 2, -1)$

b) $\vec{a} = (3, 1, -4), \vec{b} = (-1, 1, -1)$ y $\vec{c} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$

c) $\vec{a} = (3, 5, -1), \vec{b} = (2, -4, 7)$ y $\vec{c} = (0, 4, 1)$

a) $\vec{a} = -\dfrac{\vec{b}}{2} + \dfrac{3\vec{c}}{2}$

b) $\vec{c} = -\sqrt{2}\vec{b}$

c) Son independientes.

20 **Dados los vectores de $\mathbb{R}^3$ $\vec{u} = (1, 1, a), \vec{v} = (0, 1, 1)$ y $\vec{w} = (2, 1, a)$:**

a) **Averigua para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ son linealmente dependientes.**

b) **Indica cuál es su relación de dependencia.**

a) Si $a = 1$ los vectores son linealmente dependientes.

b) $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$

21 **¿Pueden formar base de $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{u} = (1, -2, 1)$, $\vec{v} = (-1, 3, -1)$ y $\vec{w} = (1, 0, 1)$? ¿Por qué?**

Sol: No, $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

22 **Indica el valor que debe tomar a para que los vectores $(a, 1, 2)$, $(-2, 4, 1)$ y $(2, 1 - a, 0)$ puedan formar una base de $\mathbb{R}^3$.**

Si $a \neq -6$ y $a \neq 3$, entonces los tres vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$.

23 **Dado el espacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ y el conjunto de vectores $S = \{(1, 2, 1), (2, 3, 2), (3, 2, 3), (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, encuentra en S un conjunto máximo de vectores linealmente independientes, T, y expresa los otros vectores como combinación lineal de los elementos de T.**

Sol: $T = \{(1, 2, 1), (1, 1, 1)\}$

$(2, 3, 2) = (1, 2, 1) + (1, 1, 1)$

$(3, 2, 3) = 4(1, 1, 1) - (1, 2, 1)$

24 **Determina si $A(-1, 2, 3)$, $B(0, 7, -9)$, $C(1, 4, -5)$ y $D(8, -3, 2)$ son coplanarios.**

Sol: No son coplanarios.

25 **Considera los puntos del espacio $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 2)$ y $C(0, -1, -1)$. Dado el punto $D(k, 0, 0)$, determina qué valor debe tener k para que los cuatro puntos sean coplanarios.**

Sol: $k = 1$

26 **Discute la dependencia y la independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores y, en el caso de encontrar dependencia lineal, averigua la relación de dependencia:**

- $X_1 = \{(1, 2, 3), (2, 5, 8)\}$
- $X_2 = \{(1, 2, 3), (2, 5, 8), (1, 3, 8)\}$
- $X_3 = \{(1, 2, 3), (2, 5, 8), (1, 3, 8), (2, -1, 0)\}$

- $X_1 = \{(1, 2, 3), (2, 5, 8)\}$, linealmente independiente
- $X_2 = \{(1, 2, 3), (2, 5, 8), (1, 3, 8)\}$, linealmente independiente
- $X_3 = \{(1, 2, 3), (2, 5, 8), (1, 3, 8), (2, -1, 0)\}$, linealmente dependiente:

$$-\frac{40}{3}(1, 2, 3) + \frac{19}{3}(2, 5, 8) - \frac{4}{3}(1, 3, 8) + (2, -1, 0) = (0, 0, 0)$$

También se puede expresar como:

$$(2, -1, 0) = \frac{40}{3}(1, 2, 3) - \frac{19}{3}(2, 5, 8) + \frac{4}{3}(1, 3, 8)$$

27 **En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, determina k para que el vector $\vec{x} = (k, 2k, 3k)$ sea combinación lineal de los vectores $\vec{y} = (1, -1, 2)$ y $\vec{z} = (3, -4, 1)$**

Sol: $k = 0$

28 **En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, se considera la base: $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$**

a) **Demuestra que el conjunto $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, donde $\vec{v}_1 = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3, \vec{v}_2 = 4\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \vec{v}_3 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3$, es una base de $\mathbb{R}^3$.**

b) **Calcula las componentes de los vectores $\vec{x} = (1, 2, 3)_{B1}$, $\vec{y} = (1, 0, -1)_{B1}$ en la base B_2.**

c) **Calcula las componentes en la base B_1 del vector $\vec{z} = (-1, 0, 1)_{B2}$.**

b) $\Rightarrow x = -\dfrac{5}{2}, y = \dfrac{15}{4}, z = -\dfrac{13}{4}$, son los componentes del vector $(1, 2, 3)_{B1}$ en la base B_2.

$x = 1, y = -1, z = 1$ son las componentes del vector $(1, 0, -1)_{B1}$ en la base B_2.

c) $x = -1, y = -3, z = 2$ son los componentes del vector $(1, 0, -1)_{B1}$ en la base B_2.

29 **Consideramos los vectores $\vec{v}_1 = (-1, 3, 4)$, $\vec{v}_2 = (2, -1, -3), \vec{v}_3 = (1, 2k + 1, k + 3)$ de $\mathbb{R}^3$:**

a) **Encuentra el único valor de k para el que estos vectores no forman base de $\mathbb{R}^3$.**

b) **Para un valor de k diferente del que hemos averiguado en el apartado anterior, determina cuáles son las componentes del vector $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ en la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.**

a) k=3

b) Las componentes del vector $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ en la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ son $(1, 1, 1)$.

30 **Dados estos vectores $\vec{v}_1 = (-2, 0, 1), \vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ y $\vec{v}_3 = (-1, 1, -2)$:**

a) **Averigua si son base de $\mathbb{R}^3$.**

b) **En caso afirmativo, expresa el vector $\vec{w} = (5, 3, -1)$ en la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.**

a) forman base.

b) $\vec{w} = (-1, 3, 0)$.

Producto escalar

31 **Indica qué se puede afirmar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que cumplen: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$**

Sol: Son paralelos.

32 **Dados los vectores $\vec{u} = (3, m, 2)$ y $\vec{v} = (2, 4, m)$, determina el valor de m para que sean perpendiculares.**

Sol: $m = -1$.

33 **Determina el módulo de la proyección del vector $\vec{u} = (3, -1, 1)$ sobre el vector $\vec{v} = (2, 2, -1)$.**

Sol: $u_v = 1$

34 **Determinar el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (2, -1, -1)$ y $\vec{v} = (3, 0, 3)$.**

a}$\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = 73{,}2°$

35 **Dados los vectores $\vec{u} = (2, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, -3)$, $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, ¿qué relación deben cumplir a y b para que $\vec{w}$ sea perpendicular al vector $\vec{t} = (1, 1, 1)$?**

$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} = (2a, b, -3b)$

Sol: $a = b$

36 **Determina los valores de x e y para que el vector $\vec{w} = (-2, x, y)$ sea perpendicular a los vectores $\vec{u} = (-2, 3, 1)$ y $\vec{v} = (0, 3, 1)$.**

Sol: No existen x e y

37 **En una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ se dan los vectores $\vec{u} = (2, 2, 0)$ y $\vec{v} = (v_1, 1, 2)$. Determina el valor de v_1 sabiendo que forman un ángulo de 45°.**

Sol: $v_1 = 2$

38 **Dados los vectores $\vec{u} = (-3, 0, 2)$ y $\vec{v} = (1, 5, 1)$, averigua qué ángulo forman y el módulo de la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.**

Sol: $\alpha = 86°\ 56'\ 25''$

Módulo de la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$: $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

39 **Considera los vectores $\vec{u} = (1, 1, -3)$, $\vec{v} = (v_1, 2, 4)$ y $\vec{w} = (0, w_2, 3)$ y calcula v_1 y w_2 sabiendo que $\vec{u}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{w}$. Calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$.**

Sol: $v_1 = 10$

$w_2 = -6$

$(\vec{u}, \vec{w}) = 132{,}39°$

40 **Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores libres del espacio. Comprueba que $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$.**

Producto vectorial

41 **Calcula un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{u} = (2, 2, -1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$.**

Sol:El vector pedido es $\left(\dfrac{2}{\sqrt{17}}, \dfrac{-3}{\sqrt{17}}, \dfrac{-2}{\sqrt{17}}\right)$.

42 **Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cumplen $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 2$ y, además, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$. Calcula $\vec{u} \times \vec{v}$.**

Sol: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

43 **Determina los vectores unitarios perpendiculares a $\vec{u} = (-1, 2, -2)$ y $\vec{v} = (3, -5, 1)$.**

Sol:

$$\left(\frac{-8}{3\sqrt{10}}, \frac{-5}{3\sqrt{10}}, \frac{-1}{3\sqrt{10}}\right) \text{ y } \left(\frac{8}{3\sqrt{10}}, \frac{5}{3\sqrt{10}}, \frac{1}{3\sqrt{10}}\right)$$

44 **Dados los vectores $\vec{u} = (2, -1, 1)$ y $\vec{v} = (-1, -2, 3)$, comprueba que los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ son opuestos y determina su módulo.**

Sol: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k}$

$\vec{v} \times \vec{u} = \vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{v} \times \vec{u}| = 5\sqrt{3}$

45 **Calcula el valor de x para que el producto vectorial de $\vec{u} = (0, x, 1)$ y $\vec{v} = (0, 3, 1)$ tenga la dirección del eje X.**

Sol: Para todo $x \neq 3$, el vector tiene la dirección del eje X.

46 **Halla el área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{u} = (2, 2, 1)$ y $\vec{v} = (3, -1, 3)$.**

Sol: $\sqrt{122}$ u^2

47 **Halla un vector ortogonal a $\vec{u} = (2, 3, -1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 1)$ que tenga la tercera componente igual a 1.**

Sol: $(2, -1, 1)$.

48 **Halla un vector ortogonal a $\vec{u} = (1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 1)$ de módulo 2.**

Sol: $\vec{w} = \left(\dfrac{-2}{\sqrt{3}}, \dfrac{-2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

49 **Los puntos $A(0, 1, 0)$, $B(-2, 5, 3)$ y $C(1, 0, -2)$ son los vértices de un triángulo. Averigua su área utilizando dos métodos distintos.**

Sol: $A = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ u^2

50 **¿Es siempre cierto que $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$? En caso afirmativo, justifica la respuesta. En caso negativo, expón un ejemplo que lo confirme.**

Sol: Es cierto.

Producto mixto

51 **Considera los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (2, 2, 1)$ y $\vec{w} = (3, -1, 1)$ y calcula $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.**

Sol: -5

52 **Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los siguientes vectores: $\vec{u} = (1, -3, 2)$, $\vec{v} = (0, 0, 1)$, $\vec{w} = (2, 3, 0)$.**

Sol: 9

53 **Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los siguientes vectores: $\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = (-1, 3, 2)$, $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.**

Sol: 243 u^3

54 **Dados los puntos del espacio $A(0, 0, 0)$, $B(0, 0, 2)$, $C(0, 2, 0)$ y $D(2, 0, 0)$, calcula el volumen del tetraedro $ABCD$.**

Sol: $\dfrac{4}{3}$ u^3

Problemas de aplicación

55 **Determina si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones. Si no son ciertas, inventa un ejemplo que lo confirme:**

a) **El producto mixto de tres vectores cualesquiera no nulos siempre es distinto de cero.**

b) **Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son tres vectores libres del espacio, no nulos, que satisfacen $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, entonces se verifica que $\vec{v} = \vec{w}$.**

a) Falso (vectores coplanarios)

b) No es cierto. Por ejemplo, $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 0, 2)$ y $\vec{w} = (2, 1, -1)$

56 **Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tales que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 1$ y $|\vec{w}| = 4$, y $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$, calcula la siguiente suma:**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Sol: -13

57 ***ABCD* es un tetraedro regular cuya arista mide 1. Sea $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ y $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. Calcula:**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

c) $|\vec{v} + \vec{w}|$

d) **El ángulo que forman $\vec{u}$ y $(\vec{v} + \vec{w})$**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1/2$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 1$

c) $|\vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{3}$

d) $\alpha = 54{,}74°$

58 **Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(0, 1, 2)$ y $B(-1, 0, 1)$. El centro del paralelogramo es $M(1, -2, 0)$. Halla los otros vértices.**

Sol: $C\ (2, -5, -2)$
$D\ (3, -4, -1)$

59 **Los puntos medios de los lados de un triángulo son $(4, 0, 1)$, $(5, 3, -1)$ y $(2, 0, 5)$. Averigua los vértices de dicho triángulo.**

Sol: $(1, -3, 7)$, $(7, 3, -5)$ y $(3, 3, 3)$

60 **Determina si los puntos $A(2, 3, 5)$, $B(-2, -5, 7)$ y $C(0, -1, 6)$ están alineados.**

Sol: Los puntos están alineados.

61 **Considera los puntos $A(1, 1, -1)$, $B(2, -3, 4)$ y $C(\alpha, 0, \beta + 1)$ y determina α y β para que estén alineados.**

Sol: $\alpha = \dfrac{5}{4}$; $\beta = \dfrac{-3}{4}$

62 **A partir de los puntos $A(0, -2a - 1, 4a - 2)$, $B(1, -3, 4)$ y $C(3, -5, 3)$:**

a) **Comprueba que el triángulo de vértices *A, B, C* es rectángulo en *B* para cualquier valor de *a*.**

b) **Calcula los valores de *a* para los que el triángulo es isósceles.**

Sol: $a = 2$ y $a = \dfrac{4}{5}$

63 **Sabiendo que los puntos $A(3, 1, 1)$, $B(2, 4, 1)$ y $C(2, c_1, c_2)$ son tres vértices de un cuadrado, halla c_1 y c_2.**

Sol: $c_2 = 1 \pm \sqrt{10}$

64 **Sabiendo que los siguientes puntos del espacio $A(k - 3, 2, 4)$, $B(0, k + 2, 2)$ y $C(-2, 6, k + 1)$ son los tres vértices del rombo *ABCD:***

a) **Calcula el valor de *k*.**

b) **Demuestra que el rombo es un cuadrado.**

a) $k = 2$

65 **Los puntos $A(3, 1, 1)$, $B(2, 4, 1)$ y $C(-1, 2, 3)$ son los vértices de un paralelogramo. Calcula el cuarto vértice, *D*, el perímetro del paralelogramo y su área.**

Sol: $D = (0, -1, 3)$
perímetro $= 2\left(\sqrt{10} + \sqrt{17}\right)$
Área $= \sqrt{161}\ u^2$

66 **Determina el valor de α para que los puntos $A(1, -1, 2)$, $B(-2, 1, 3)$, $C(0, 1, 0)$ y $D(\alpha - 1, \alpha + 1, 2)$ puedan ser coplanarios.**

Sol: $\alpha = -2/13$.

67 **Dados $\vec{u} = (1, -1, 2)$ y $\vec{v} = (3, 1, -1)$, halla el conjunto de vectores que, siendo perpendiculares a $\vec{u}$, sean coplanarios con $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

Sol: $(3\lambda, \lambda, -\lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

68 **Halla el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, sabiendo que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 6$ y $|\vec{u} + \vec{v}| = 8$.**

Sol: $\alpha = 75°\ 31'\ 21''$

69 **Los vértices del lado desigual de un triángulo isósceles son $A(2, 7, 4)$ y $B(0, -3, -2)$. Sabiendo que el tercer vértice se encuentra en el eje *Y*, determina su área.**

Sol: $A = \dfrac{\sqrt{2\,310}}{5}\ u^2$

Actividades tipo test

Escoge y razona la respuesta correcta en cada caso:

70 **Los valores de *a* y *b* para que $\vec{w} = (6, a, b)$ sea perpendicular a $\vec{u} = (2, 0, -1)$ y $\vec{v} = (-1, 3, 1)$ son:**

a) **No existe el vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.**

b) $a = -3$ **y** $b = -3$

c) $a = -2$ **y** $b = 12$

d) $a = -1$ **y** $b = 6$

Sol: La respuesta correcta es la ***b).***

71 **Los puntos $A(2, 1, 0)$, $B(1, -2, 3)$ y $C(4, -5, 1)$ son los vértices de un triángulo cuya área es:**

a) $40{,}9\ u^2$

b) $\sqrt{418}\ u^2$

c) $\dfrac{1}{2}\sqrt{418}\ u^2$

d) $209\ u^2$

Sol: La respuesta correcta es la ***c).***

72 **Los puntos $A(-1, 0, 3)$, $B(7, 8, -9)$, $C(1, 2, 0)$ y $D(5, 6, 6)$:**

a) **Están alineados.**

b) **Son coplanarios.**

c) **El área del paralelepípedo que determinan los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ es cero.**

d) **Están alineados dos a dos.**

Sol: La respuesta correcta es la ***b).***

73 **Un vector de $\mathbb{R}^3$, de módulo 4, perpendicular a $\vec{u} = (0, -1, 2)$ y que forma 45° con $\vec{v} = (0, 3, 3)$ es:**

a) **(0, 4, 0)**

b) **(0, 4/5, 2/5)**

c) **(8/3, 8/3, 4/3)**

d) $\left(4/\sqrt{6}, 8/\sqrt{6}, 4/\sqrt{6}\right)$

Sol: La respuesta correcta es la ***c).***

74 **El producto mixto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ es:**

a) $|\vec{u} + \vec{v}|$

b) $|\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$

c) **0**

d) **No se puede hallar, ya que son linealmente dependientes.**

Sol: La respuesta correcta es la ***c).***

75 **Un vector cuyo módulo es $\sqrt{6}$ y es ortogonal a $\vec{u} = (0, 1, -2)$ y $\vec{v} = (3, 1, 1)$ tiene por coordenadas:**

a) **(2, 1, −1)**

b) **(1, 2, 1)**

c) **(1, −2, 1)**

d) **(1, −2, −1)**

Sol: La respuesta correcta es la ***c).***

Evaluación

1. **Dados los vectores $\vec{u} = (1, 0, -2)$, $\vec{v} = (-4, 5, -3)$ y $\vec{w} = (-2,1, 3)$, realiza las operaciones $\vec{u} + 3\vec{v}$ y $\vec{v} - \vec{w}$. ¿Son linealmente independientes los tres vectores? Escribe un vector linealmente dependiente de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y otro linealmente dependiente de $\vec{u}$ y $\vec{w}$.**

   Sol: $\vec{u} + 3\vec{v} = (-11, 15, -7)$

   $\vec{v} - \vec{w} = (-2, 4, -6)$

   Los tres vectores son linealmente independientes.

   Un vector linealmente dependiente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $(-3, 5, -5)$.

   Un vector linealmente dependiente de $\vec{u}$ y $\vec{w}$ es $(-1, 1, 1)$.

2. **Indica si los vectores $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 0,1)$ y $\vec{e}_3 = (-1, -1, 1)$ son una base del espacio.**

   Sol: Los tres vectores forman una base.

3. **Dados los espacios libres del espacio $\vec{u} = (3, 3, -1)$ y $\vec{v} = (2, -1, v_3)$, determina v_3 para que sean perpendiculares.**

   Sol: $v_3 = 3$

4. **Dados los vectores libres del espacio $\vec{u} = (0, 3, -2)$ y $\vec{v} = (4, 1, -2)$, calcula las componentes de un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y de módulo 1.**

   Sol:

   $$\vec{w} = \left(\frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

5. **Calcula el área del paralelogramo determinado por dos vectores libres que tienen como representantes los vectores fijos: $\overrightarrow{AB}$, siendo $A(3, -3, 0)$ y $B(1, 1, 1)$, y $\overrightarrow{OD}$, siendo O el origen de coordenadas y D el punto medio del vector $\overrightarrow{AB}$.**

   Sol: Área $= \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{OD}\right| = \sqrt{9 + 9 + 36} = 3\sqrt{6}\ u^2$

6. **Calcula el producto mixto de los vectores del espacio $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, -2, 0)$ y $\vec{w} = (1, -1, 2)$.**

   Sol: -8

7. **Determina el valor de k para que los vectores $\vec{u} = (2, 2, -1)$, $\vec{v} = (k, k + 1, 0)$ y $\vec{w} = (k + 2, 2k, -1)$ sean coplanarios.**

   Sol $k = 0$ o $k = 1$.

6. **Si tres vectores del espacio, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ y $\vec{e}_3$, son tales que $\left[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right] = 0$, ¿pueden formar una base?**

   Sol: No.

7. **Representa con medios tecnológicos los puntos $A(2, -0, 0)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-1, 0, 3)$ y el origen de coordenadas y calcula el volumen del cuerpo geométrico que generan.**

   Sol: 4 u^2