Soluciones a las actividades

BLOQUE I

Aritmética y álgebra

1 Los números reales

1. Números racionales e irracionales

Piensa y calcula

Calcula mentalmente el volumen de un cubo de arista 2 m y escribe el valor exacto de la arista de un cubo de volumen 2 m^3

Solución:
$V = 2^3 = 8\ m^3$ $\quad a = \sqrt[3]{2}\ m$

Aplica la teoría

1. Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

a) 5/3 b) π c) $\sqrt{2}$ d) 1,23456…

Solución:
a) Racional. b) Irracional.
c) Irracional. d) Irracional.

2. Escribe cinco números racionales.

Solución:
$9, -5, \frac{2}{3}, -\frac{4}{7}, -\frac{1}{8}$

3. Escribe cinco números irracionales.

Solución:
$\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt[5]{7}, \pi, e$

4. Escribe tres números racionales comprendidos entre 1/3 y 1/2

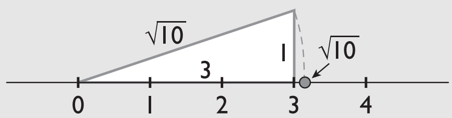
Solución:
$\frac{5}{12}, \frac{3}{8}, \frac{11}{24}$

5. Representa gráficamente, de forma exacta:

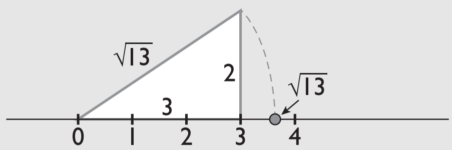
a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{13}$

Solución:

a)



b)

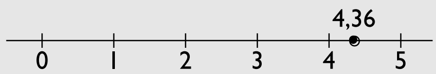


6. Representa gráficamente, de forma aproximada:

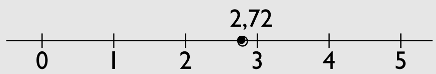
a) $\sqrt{19}$ b) e c) $\sqrt[3]{25}$ d) $\sqrt[5]{300}$

Solución:

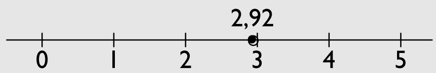
a)



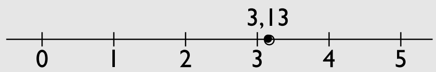
b)



c)



d)



7. Calcula:

a) $3 - \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}$

c) $\frac{4}{3} : \left(\frac{8}{5} - 7\right)$ d) $\frac{4}{3}\left(\frac{5}{6} - 2 + \frac{3}{8}\right)$

Solución:

a) 19/6 b) 25/36 c) –20/81 d) – 19/18

8. Halla de forma exacta la diagonal de un cuadrado de lado 1 cm y escribe qué tipo de número es.

Solución:

$\sqrt{2}$ cm   Es un número irracional.

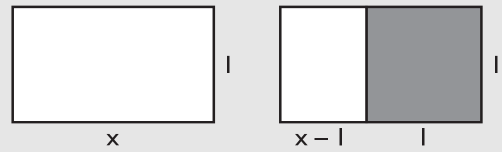
9. Un rectángulo mide de largo **x** y de alto 1; por un lado le cortamos un cuadrado de lado 1, y se obtiene un rectángulo semejante.

a) ¿Cuánto mide **x**?

b) ¿Qué número conocido es **x**?

c) ¿**x** es racional o irracional?

Solución:



a) $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

La solución negativa $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ no tiene sentido.

La solución es $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) Es el número áureo de oro.

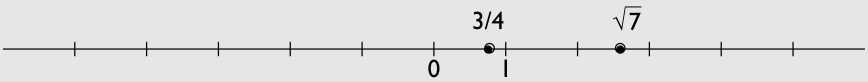
c) Es irracional.

2. La recta real

Piensa y calcula

Representa en la recta real, de forma aproximada, los números $\frac{3}{4}$ y $\sqrt{7} = 2{,}64575131\ldots$

Solución:



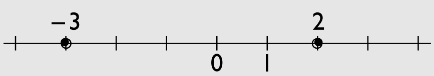
Aplica la teoría

10. Representa en la recta real los siguientes pares de números y calcula la distancia que hay entre ellos.

a) –3 y 2   b) –2,5 y 3,7

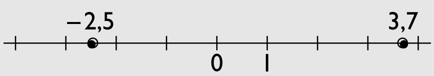
Solución:

a)



$d(-3, 2) = |2 - (-3)| = 5$

b)



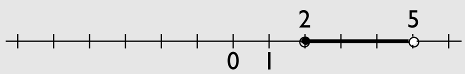
$d(-2{,}5; 3{,}7) = |3{,}7 - (-2{,}5)| = 6{,}2$

11. Escribe en forma de desigualdad y representa gráficamente los siguientes intervalos, y clasifícalos:

a) [2, 5) b) (–2, 1) c) (–3, +∞) d) (–∞, 3]

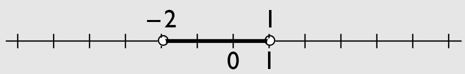
Solución:

a) $\{x \in \mathbb{R}; 2 \le x < 5\}$



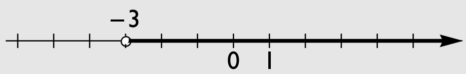
Intervalo semiabierto o semicerrado.

b) $\{x \in \mathbb{R}; -2 < x < 1\}$



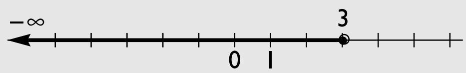
Intervalo abierto.

c) $\{x \in \mathbb{R}; x > -3\}$



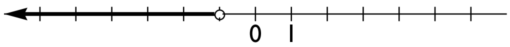
Semirrecta, intervalo abierto.

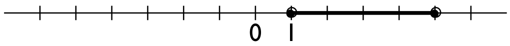
d) $\{x \in \mathbb{R}; x \le 3\}$



Semirrecta, intervalo semiabierto o semicerrado.

12. Escribe los intervalos que se representan en los siguientes dibujos:

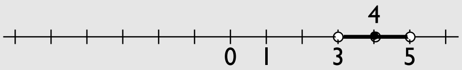
a) 

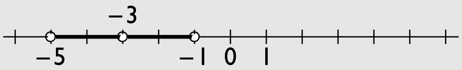
b) 

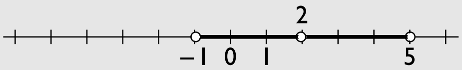
Solución:
a) $(-\infty, -1)$ b) $[1, 5]$

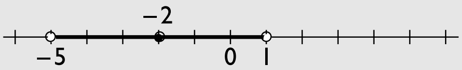
13. Representa gráficamente los siguientes entornos:
a) E(4, 1) b) E*(–3, 2) c) E*(2, 3) d) E(–2, 3)

Solución:

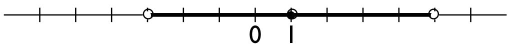
a) 

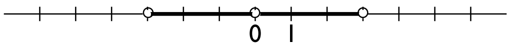
b) 

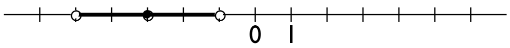
c) 

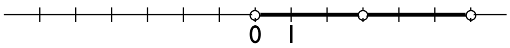
d) 

14. Escribe los entornos que se representan en los siguientes dibujos:

a) 

b) 

c) 

d) 

Solución:
a) E(1, 4) b) E*(0, 3) c) E(–3, 2) d) E*(3, 3)

3. Sucesiones de números reales

Piensa y calcula

Escribe tres términos más en las siguientes sucesiones:
a) 2, 6, 10, 14, … b) 1, 2, 4, 8, … c) 3, –3, 3, –3, … d) 1, 1, 2, 3, 5, …

Solución:
a) 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, … b) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, … c) 3, –3, 3, –3, 3, –3, 3, … d) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

Aplica la teoría

15. Añade tres términos en cada una de las sucesiones siguientes:
a) 3, 7, 11, 15, … b) 5, 10, 20, 40, …
c) 1, 4, 9, 16, 25, … d) 1, –3, 5, –7, 9, …

Solución:
a) 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, …
b) 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, …
c) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, …
d) 1, –3, 5, –7, 9, –11, 13, –15, …

16. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:
a) $a_n = 2^n$ b) $a_n = 2n + 3$
c) $a_n = (-1)^n (n + 1)$ d) $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Solución:
a) 2, 4, 8, 16
b) 5, 7, 9, 11
c) –2, 3, –4, 5
d) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}$

17. Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) 2, 4, 6, 8, 10, …

b) 1, 4, 9, 16, 25, …

Solución:

a) $a_n = 2n$ b) $a_n = n^2$

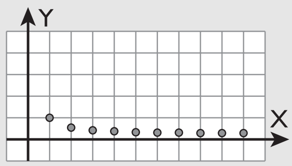
18. Representa los primeros términos de las siguientes sucesiones e indica el valor al que tienden:

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ b) $a_n = n^2$

c) $a_n = \dfrac{2n + 1}{n}$ d) $a_n = (-1)^n n$

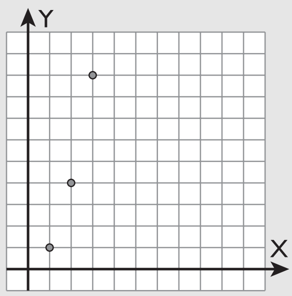
Solución:

a)



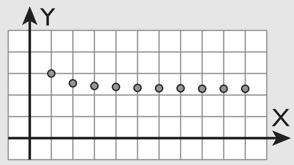
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

b)



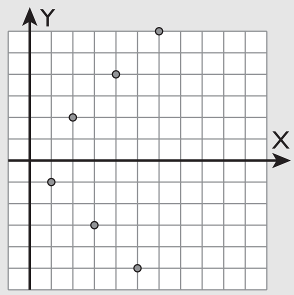
$$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$$

c)



$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n + 1}{n} = 2$$

d)



No existe el $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n n$

Los valores de la sucesión oscilan de negativo a positivo en cada término haciéndose cada vez más grandes en valor absoluto.

4. Radicales y operaciones

■ Piensa y calcula

Halla mentalmente el valor de **x** en los siguientes casos:

a) $\sqrt[3]{8} = x$ b) $\sqrt[4]{x} = 10$ c) $\sqrt[x]{32} = 2$ d) $\sqrt[4]{81} = x$

Solución:

a) $x = 2$ b) $x = 10\,000$ c) $x = 5$ d) $x = \pm 3$

Aplica la teoría

19. Calcula mentalmente todas las raíces reales de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[3]{-125}$ c) $\sqrt{-25}$ d) $\sqrt[5]{32}$

Solución:

a) ± 2 b) -5

c) No tiene solución real. d) 2

20. Escribe en forma de radical las siguientes potencias:

a) $7^{3/4}$ b) $5^{-1/4}$ c) $3^{-5/7}$ d) $2^{1/3}$

Solución:

a) $\sqrt[4]{7^3}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[7]{3^5}}$ d) $\sqrt[3]{2}$

21. Escribe en forma de potencia los siguientes radicales:

a) $\sqrt[7]{5^2}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{11^5}}$ c) $\sqrt[5]{3}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Solución:

a) $5^{2/7}$ b) $11^{-5/6}$

c) $3^{1/5}$ d) $2^{-1/3}$

22. Extrae mentalmente todos los factores que se pueda en los siguientes radicales:

a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{27}$ d) $\sqrt{72}$

Solución:

a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{5}$

c) $3\sqrt{3}$ d) $6\sqrt{2}$

23. Suma los siguientes radicales:

a) $5\sqrt{18} - 3\sqrt{50} + \sqrt{98}$ b) $4\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{625} - 2\sqrt[3]{135}$

Solución:

a) $7\sqrt{2}$ b) $7\sqrt[3]{5}$

24. Opera los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{12}$ b) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{64}$

c) $\sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{6}$ d) $\sqrt[5]{12} : \sqrt[5]{16}$

Solución:

a) $2\sqrt[3]{30}$ b) $2\sqrt[5]{16}$

c) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[5]{3/4}$

25. Las expresiones que están como potencia pásalas a radical y las que están como radical pásalas a potencia:

a) $(\sqrt[5]{7})^2$ b) $\sqrt[3]{6^5}$ c) $\sqrt[4]{5^3}$ d) $(\sqrt[7]{5})^2$

Solución:

a) $\sqrt[5]{7^2}$ b) $(\sqrt[3]{6})^5$

c) $(\sqrt[4]{5})^3$ d) $\sqrt[7]{5^2}$

26. Expresa con un solo radical las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{\sqrt{5}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$

Solución:

a) $\sqrt[4]{5}$ b) $\sqrt{2}$

c) $\sqrt[6]{7}$ d) $\sqrt[12]{5}$

27. Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{7}{\sqrt[5]{13^3}}$ c) $\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

Solución:

a) $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{7\sqrt[5]{13^2}}{13}$

c) $\dfrac{5(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}$ d) $7-4\sqrt{3}$

28. Halla la diagonal de un ortoedro cuyas aristas miden 5 m, 4 m y 3 m

Solución:

$\sqrt{5^2+4^2+3^2} = 5\sqrt{2} = 7{,}07$ m

5. Logaritmos

Piensa y calcula

Halla el valor de **x** en los siguientes casos:

a) $2^3 = x$ b) $x^3 = 125$ c) $2^x = 32$ d) $10^3 = x$ e) $x^4 = 10\,000$ f) $10^x = 1\,000\,000$

Solución:

a) x = 8 b) x = 5 c) x = 5 d) x = 1 000 e) x = 10 f) x = 6

Aplica la teoría

29. Halla mentalmente el valor de **x** en los siguientes casos:

a) $2^6 = x$ b) $x^5 = 32$ c) $2^x = 128$
d) $10^6 = x$ e) $x^4 = 10\,000$ f) $10^x = 1\,000$

Solución:

a) x = 64 b) x = 2
c) x = 7 d) x = 1 000 000
e) x = 10 f) x = 3

30. Calcula mentalmente los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 32$ b) $\log_3 1$ c) $\log_5 1/25$ d) log 100

Solución:

a) 5 b) 0
c) –2 d) 2

31. Calcula mentalmente la parte entera de los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 50$ b) $\log_3 36$
c) $\log_5 98{,}75$ d) log 5 678,24

Solución:

a) 5 b) 3
c) 2 d) 3

32. Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos:

a) log 725,263 b) log 0,00356
c) L 24,6845 d) L 0,000765

Solución:

a) 2,8605
b) –2,4486
c) 3,2062
d) –7,1756

33. Sabiendo que log 2 = 0,3010 y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

a) log 4 b) log 5 c) log 8 d) $\log \sqrt{5}$

Solución:

a) $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 0{,}6020$
b) $\log 5 = \log 10/2 = 1 - \log 2 = 0{,}6990$
c) $\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 0{,}9030$
d) $\log \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log 5 = \frac{1}{2} 0{,}699 = 0{,}3495$

34. Utilizando la calculadora y las propiedades de los logaritmos, halla:

a) $\log 2{,}5^{17}$ b) $\log 0{,}0234^{-25}$
c) $\log \sqrt[5]{87{,}012}$ d) $\log \sqrt[6]{0{,}0987}$

Solución:

a) 6,7650
b) 40,7696
c) 0,3879
d) –0,1676

35. Utilizando la calculadora y la fórmula del cambio de base, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

a) $\log_2 51{,}27$ b) $\log_3 8{,}431$
c) $\log_5 0{,}034$ d) $\log_7 1\,000$

Solución:

a) 5,6800
b) 1,9406
c) –2,1010
d) 3,5499

1. Números racionales e irracionales

36. Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{3}{7}$ c) e d) $\sqrt{25}$

Solución:

a) Irracional. b) Racional.
c) Irracional. d) Racional.

37. Escribe tres números racionales comprendidos entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$

Solución:

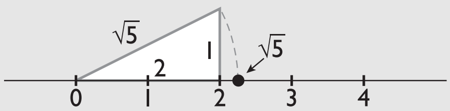
$\frac{1}{2}, \frac{9}{20}, \frac{11}{20}$

38. Representa gráficamente de forma exacta:

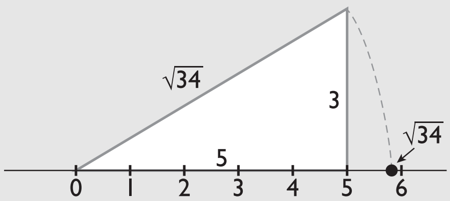
a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{34}$

Solución:

a)



b)

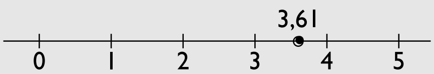


39. Representa gráficamente de forma aproximada:

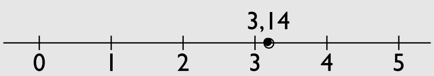
a) $\sqrt{13}$ b) π
c) $\sqrt[3]{50}$ d) $\sqrt[5]{100}$

Solución:

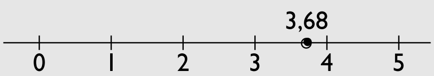
a)



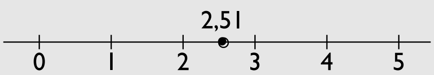
b)



c)



d)



40. Calcula:

a) $\frac{3}{8} + 2 - \frac{5}{12}$ b) $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6}$

c) $\frac{3}{4} : \left(\frac{1}{6} - 5 + \frac{1}{2}\right)$ d) $\frac{5}{3}\left(\frac{1}{8} - 3 + \frac{13}{6}\right)$

Solución:

a) 47/24 b) – 1/24 c) –9/52 d) –85/72

41. Halla de forma exacta la arista de un cubo de volumen 5 cm^3 y escribe qué tipo de número es.

Solución:

$\sqrt[3]{5}$ cm es un número irracional.

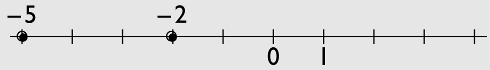
2. La recta real

42. Representa en la recta real los siguientes pares de números y calcula la distancia que hay entre ellos.

a) –5 y –2 b) –2,4 y 3,5

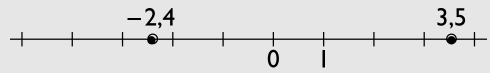
Solución:

a)



d(–5, –2) = |–2 – (–5)| = 3

b)



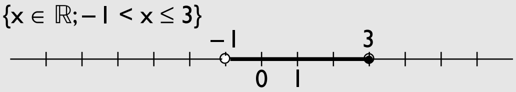
d(–2,4; 3,5) = |3,5 – (–2,4)| = 5,9

43. Escribe en forma de desigualdad y representa gráficamente los siguientes intervalos, y clasifícalos:

a) (–1, 3] b) [–2, 1]
c) [2, + ∞) d) (–∞, – 1)

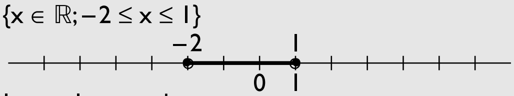
Solución:

a) $\{x \in \mathbb{R}; -1 < x \le 3\}$



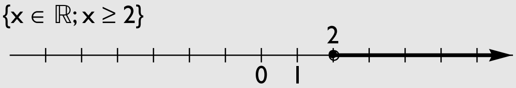
Intervalo semiabierto o semicerrado.

b) $\{x \in \mathbb{R}; -2 \le x \le 1\}$



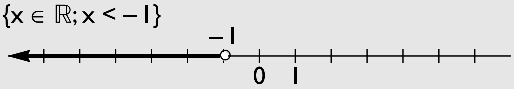
Intervalo cerrado.

c) $\{x \in \mathbb{R}; x \ge 2\}$



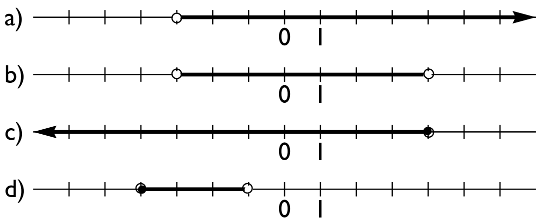
Semirrecta, intervalo semiabierto o semicerrado.

d) $\{x \in \mathbb{R}; x < -1\}$



Semirrecta, intervalo abierto.

44. Escribe los intervalos que se representan en los siguientes dibujos y clasifícalos:



Solución:

a) $(-3, +\infty)$ semirrecta, intervalo abierto.

b) $(-3, 4)$ intervalo abierto.

c) $(-\infty, 4]$ semirrecta, intervalo semiabierto o semicerrado.

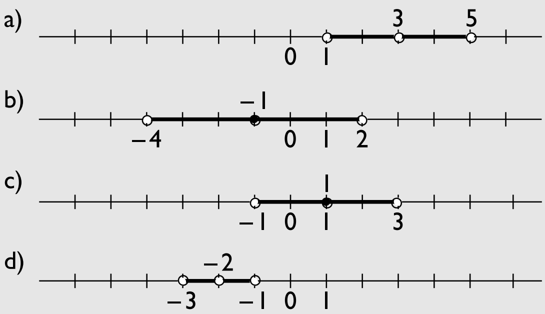
d) $[-4, -1)$ intervalo semiabierto o semicerrado.

45. Representa gráficamente los siguientes entornos:

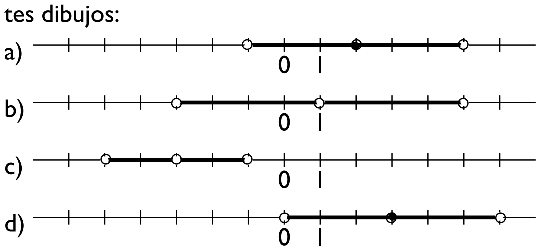
a) $E^*(3, 2)$ b) $E(-1, 3)$

c) $E(1, 2)$ d) $E^*(-2, 1)$

Solución:



46. Escribe los entornos que se representan en los siguientes dibujos:



Solución:

a) $E(2, 3)$ b) $E^*(1, 4)$ c) $E^*(-3, 2)$ d) $E(3, 3)$

3. Sucesiones de números reales

47. Añade tres términos en cada una de las sucesiones siguientes:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ b) $5, -7, 9, -11, 13, \ldots$

c) $3, 1, -1, -3, -5, \ldots$ d) $2, 5, 10, 17, \ldots$

Solución:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \ldots$

b) $5, -7, 9, -11, 13, -15, 17, -19, \ldots$

c) $3, 1, -1, -3, -5, -7, -9, -11, \ldots$

d) $2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, \ldots$

48. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 5 + \frac{1}{10^n}$

b) $a_n = 2n + 1$

c) $a_n = (-1)^n\, n(n + 1)$

d) $a_n = \frac{2n - 3}{n + 1}$

Solución:

a) 5,1; 5,01; 5,001; 5,0001; …

b) 3, 5, 7, 9, …

c) −2, 6, −12, 20, …

d) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1, \ldots$

49. Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a) 1, 3, 5, 7, 9, …

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \ldots$

Solución:

a) $a_n = 2n - 1$

b) $a_n = \frac{1}{3n - 1}$

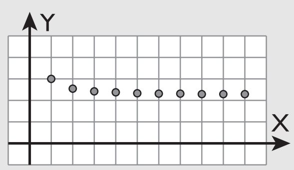
50. Representa los primeros términos de las siguientes sucesiones e indica el valor al que tienden:

a) $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ b) $a_n = 1 + 2n - \frac{1}{4}n^2$

c) $a_n = \frac{n + 1}{n^2}$ d) $a_n = 3 + (-1)^n \frac{1}{n}$

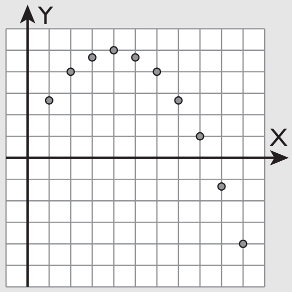
Solución:

a)



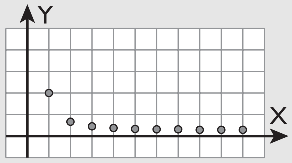
$$\lim_{n \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$$

b)



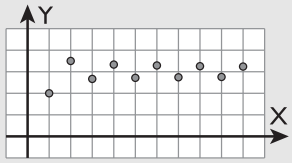
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + 2n - \frac{1}{4}n^2\right) = -\infty$

c)



$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2} = 0$

d)



$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3 + (-1)^n\frac{1}{n}\right) = 3$

4. Radicales y operaciones

51. Calcula mentalmente todas las raíces reales de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[4]{625}$ b) $\sqrt[4]{-81}$ c) $\sqrt[7]{-128}$ d) $\sqrt[5]{243}$

Solución:

a) ± 5 b) No tiene solución real. c) – 2 d) 3

52. Escribe en forma de radical las siguientes potencias:

a) $5^{-2/3}$ b) $3^{1/5}$ c) $2^{3/4}$ d) $7^{-1/5}$

Solución:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$ b) $\sqrt[5]{3}$ c) $\sqrt[4]{2^3}$ d) $\frac{1}{\sqrt[5]{7}}$

53. Escribe en forma de potencia los siguientes radicales:

a) $\sqrt[5]{7^3}$ b) $\frac{1}{\sqrt[4]{11}}$ c) $\sqrt[3]{5}$ d) $\frac{1}{\sqrt[7]{3^5}}$

Solución:

a) $7^{3/5}$ b) $11^{-1/4}$ c) $5^{1/3}$ d) $3^{-5/7}$

54. Extrae mentalmente todos los factores que se pueda en los siguientes radicales:

a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt{45}$ c) $\sqrt{50}$ d) $\sqrt{75}$

Solución:

a) $4\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{5}$ c) $5\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{3}$

55. Suma los siguientes radicales:

a) $4\sqrt{27} - 2\sqrt{12} - \sqrt{75}$

b) $5\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{250}$

Solución:

a) $3\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{2}$

56. Multiplica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[4]{60}\cdot\sqrt[4]{24}$ b) $\sqrt[7]{16}\cdot\sqrt[7]{128}$

Solución:

a) $2\sqrt[4]{90}$ b) $2\sqrt[7]{2^4}$

57. Divide los siguientes radicales:

a) $\sqrt[5]{40} : \sqrt[5]{5}$ b) $\sqrt[6]{24} : \sqrt[6]{36}$

Solución:

a) $\sqrt[5]{8}$ b) $\sqrt[6]{2/3}$

58. Transforma los radicales siguientes. Los que están como potencia pásalos a radical y los que están como radical pásalos a potencia:

a) $(\sqrt[3]{5})^2$ b) $\sqrt[5]{7^2}$ c) $\sqrt[7]{3^5}$ d) $(\sqrt[11]{13})^5$

Solución:

a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $(\sqrt[5]{7})^2$ c) $(\sqrt[7]{3})^5$ d) $\sqrt[11]{13^5}$

59. Expresa en forma de un solo radical las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{\sqrt{3}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$ d) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{7}}$

Solución:

a) $\sqrt[4]{3}$ b) 2 c) $\sqrt[6]{5}$ d) $\sqrt[12]{7}$

60. Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\frac{2}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{3}{\sqrt[7]{5^2}}$

c) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ d) $\frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$

Solución:

a) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ b) $\frac{3\sqrt[7]{5^5}}{5}$ c) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ d) $\frac{27+10\sqrt{2}}{23}$

5. Logaritmos

61. Halla mentalmente el valor de **x** en los siguientes casos:

a) $3^3 = x$ b) $x^3 = 125$ c) $3^x = 81$
d) $10^3 = x$ e) $x^2 = 100$ f) $10^x = 1\,000\,000$

Solución:
a) $x = 27$ b) $x = 5$ c) $x = 4$
d) $x = 1\,000$ e) $x = \pm 10$ f) $x = 6$

62. Calcula mentalmente los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 1$ b) $\log_3 \dfrac{1}{9}$ c) $\log_5 25$ d) $\log 0{,}0001$

Solución:
a) 0 b) –2 c) 2 d) –4

63. Calcula mentalmente la parte entera de los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 27$ b) $\log_3 52{,}6$
c) $\log_5 18{,}27$ d) $\log 78{,}24$

Solución:
a) 4 b) 3 c) 1 d) 1

64. Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

a) $\log 86{,}233$ b) $\log 0{,}0874$
c) $L\ 765{,}023$ d) $L\ 0{,}01234$

Solución:
a) 1,9357 b) – 1,0585
c) 6,6399 d) – 4,3949

65. Utilizando la calculadora y las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

a) $\log 5{,}7^{12}$ b) $\log 0{,}567^{-15}$
c) $\log \sqrt[4]{345{,}98}$ d) $\log \sqrt[7]{0{,}00345}$

Solución:
a) 9,0705 b) 3,6963
c) 0,6348 d) – 0,3517

66. Utilizando la calculadora y la fórmula del cambio de base, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

a) $\log_2 7{,}3456$ b) $\log_3 45{,}987$
c) $\log_5 0{,}3054$ d) $\log_7 0{,}056712$

Solución:
a) 2,8769 b) 3,4847
c) – 0,7370 d) – 1,4748

Para ampliar

67. ¿Qué números enteros tienen inverso entero?

Solución:
El 1 y el – 1; cada uno es inverso de sí mismo.

68. Halla el opuesto y el inverso de:

a) $\dfrac{2}{3}$ b) –5

Solución:
a) El opuesto es – 2/3 y el inverso es 3/2
b) El opuesto es 5 y el inverso es – 1/5

69. Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

a) $5 - \sqrt{3}$ b) $\dfrac{3}{7} - \dfrac{3}{5}$ c) $\pi + e$ d) $\sqrt[3]{-64}$

Solución:
a) Irracional. b) Racional.
c) Irracional. d) Racional.

70. Escribe en forma de intervalo las siguientes desigualdades:

a) $2 \le x \le 5$ b) $x > 3$ c) $-3 < x \le 2$ d) $x < 4$

Solución:
a) $[2, 5]$ b) $(3, +\infty)$
c) $(-3, 2]$ d) $(-\infty, 4)$

71. Escribe en forma de entorno las siguientes desigualdades:

a) $|x - 2| < 3$ b) $|x| < 2{,}5$
c) $|x + 3| < 2$ d) $|x + 1| < 3{,}2$

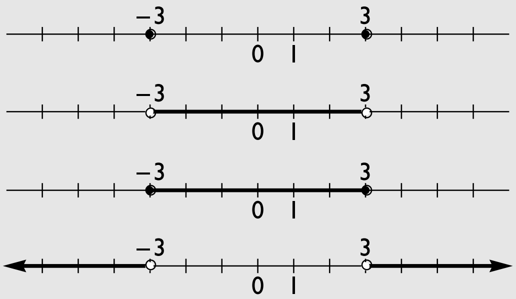
Solución:
a) E(2, 3) b) E(0; 2,5)
c) E(– 3, 2) d) E(– 1; 3,2)

72. Representa gráficamente los conjuntos dados por las siguientes expresiones:

a) $|x| = 3$ b) $|x| < 3$ c) $|x| \le 3$ d) $|x| > 3$

Solución:

a)
b)
c)
d)



73. Suma los siguientes radicales:

a) $3a\sqrt{8a^3} - 5\sqrt{18a^5} + 7a\sqrt{50a^3}$

b) $7\sqrt[3]{16x^8} + 5\sqrt[3]{54x^5} - 2\sqrt[3]{128x^2}$

Solución:

a) $26a^2\sqrt{2a}$ b) $(14x^2 + 15x - 8)\sqrt[3]{2x^2}$

74. Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{a}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{b}{\sqrt[7]{a^2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ d) $\dfrac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}}$

Solución:

a) $\sqrt{a}$ b) $\dfrac{b\sqrt[7]{a^5}}{a}$ c) $\dfrac{a + \sqrt{ab}}{a - b}$ d) $\dfrac{a^2 + 2a\sqrt{b} + b}{a^2 - b}$

75. Calcula, aplicando la fórmula de cambio de base, los siguientes logaritmos y redondea el resultado a cuatro decimales:

a) $\log_{1/2} 15{,}87$ b) $\log_{1/3} 345{,}769$

c) $\log_{1/5} 0{,}0006$ d) $\log_{0,1} 0{,}005439$

Solución:

a) –3,9882 b) –5,3211 c) 4,6094 d) 2,2645

Con calculadora

76. Halla con la calculadora el valor de los siguientes números redondeando a 5 cifras:

a) π b) e c) $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ d) $\sqrt[7]{5}$

Solución:

a) 3,14159 b) 2,71828 c) 1,61803 d) 1,25850

77. Halla el valor de los siguientes resultados y redondea el resultado a cinco decimales:

a) $1{,}000001^{1\,000\,000}$ b) $0{,}999999^{1\,000\,000}$

Solución:

a) 2,71828 b) 0,36788

78. Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos; redondea los resultados a cuatro decimales:

a) $\log \pi$ b) $\log e$ c) L π d) L 10

Solución:

a) 0,4971 b) 0,4343 c) 1,1447 d) 2,3026

79. Utilizando la calculadora, halla:

a) π^{π} b) e^{e} c) π^{e} d) e^{π}

Solución:

a) 36,4622 b) 15,1543 c) 22,4592 d) 23,1407

Problemas

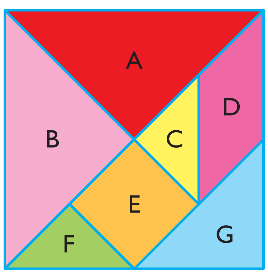
80. Halla de forma exacta la longitud de una circunferencia de diámetro 1 m. ¿Qué clase de número es?

Solución:

L = π m

Es un número irracional.

81. La siguiente figura se conoce con el nombre de tangram chino. Si el lado del cuadrado mide 1 m, halla el área de cada una de las figuras que lo componen.



Solución:

A = B = 1/4 m^2

C = F = 1/16 m^2

D = E = G = 1/8 m^2

82. Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número π

Solución:

(3, 4)

83. La longitud de una finca rectangular es 15 m y el perímetro es inferior a 50 m. ¿Qué valores puede tomar el ancho de la finca?

Solución:
$2x + 30 \leq 50 \Rightarrow 0 < x \leq 10$

84. Calcula las siguientes potencias redondeando los resultados a cinco decimales. ¿A qué número real muy conocido se aproximan los valores que se van obteniendo?

a) $1,1^{10}$ b) $1,01^{100}$
c) $1,001^{1\,000}$ d) $1,0001^{10\,000}$
e) $1,00001^{100\,000}$ f) $1,000001^{1\,000\,000}$

Solución:
a) 2,59374 b) 2,70481 c) 2,71692
d) 2,71815 e) 2,71827 f) 2,71828
Se aproximan al número e

85. Halla la fórmula del área de un triángulo equilátero cuyo lado mide **a** cm

Solución:
$\text{Área} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

86. Halla la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide **x** m

Solución:
$d = x\sqrt{2}$ m

87. Demuestra que el producto de dos números irracionales no es siempre irracional, resolviendo el siguiente contraejemplo: halla un número irracional que al multiplicarlo por el número irracional $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ sea racional.

Solución:
$(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 5 - 2 = 3$

88. Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga a log 525

Solución:
(2, 3)

89. De dos números se sabe que $\log x + \log y = 0$. ¿Qué relación hay entre **x** e **y**?

Solución:
$\log xy = \log 1$
$xy = 1$ € $y = \frac{1}{x}$
Es decir, son inversos.

90. Sabiendo que $\log 5 = 0,6990$ y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

a) log 2 b) log 25
c) log 4 d) $\log \sqrt{5}$

Solución:
a) $\log 2 = \log \frac{10}{5} = 1 - \log 5 = 0,3010$
b) $\log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5 = 1,3980$
c) $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 0,6020$
d) $\log \sqrt{5} = \frac{\log 5}{2} = 0,3495$

91. Una célula se reproduce por bipartición cada hora. ¿Cuántos días tardará en sobrepasar el billón?

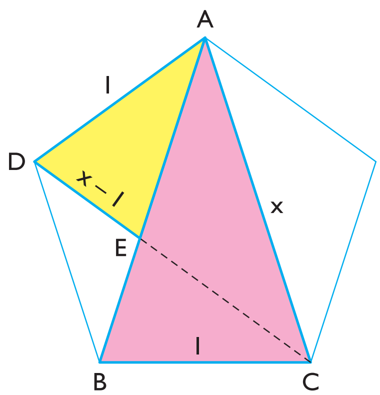
Solución:
$2^x = 10^{12}$
$x \log 2 = 12$
$x = \frac{12}{\log 2} = 39,86$
Tardará casi 2 días.

92. Un coche deportivo cuesta 70 000 € y se devalúa cada año un 15 %. ¿Cuántos años tardará en valer menos de 10 000 €?

Solución:
$70\,000 \cdot 0,85^x = 10\,000$
$7 \cdot 0,85^x = 1$
$\log 7 + x \log 0,85 = 0$
$x \log 0,85 = -\log 7$
$x = -\frac{\log 7}{\log 0,85} = 11,97$
Tardará casi 12 años.

Para profundizar

93. Sabiendo que los triángulos ABC y ADE son semejantes, calcula el valor de **x.** ¿Qué número conocido es **x**? ¿Es racional o irracional?



Solución:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La solución negativa $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ no sirve.

La solución es $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Es el número áureo o de oro.

Es irracional.

94. Los números racionales son densos. Veamos dos formas de demostrarlo:

a) Halla la media aritmética entre 2/3 y 4/5, comprueba que es racional y que está en el intervalo (2/3, 4/5)

b) Halla el número que se obtiene al sumar entre sí los numeradores y los denominadores de 2/3 y 4/5, comprueba que es racional y que está en el intervalo (2/3, 4/5)

Solución:

a) 2/3 = 0,6666666666
11/15 = 0,7333333333
4/5 = 0,8

b) 2/3 = 0,6666666666
6/8 = 3/4 = 0,75
4/5 = 0,8

95. Escribe el menor intervalo cerrado, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número **e**

Solución:

[2, 3]

96. Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número áureo, o de oro:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Solución:

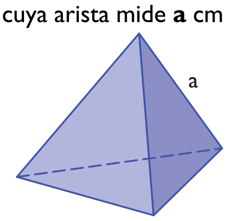
(1, 2)

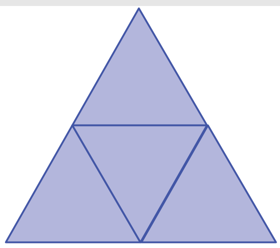
97. La masa de la Tierra es $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, y la del Sol, $1{,}98 \cdot 10^{30}$ kg. ¿Cuántas veces es mayor la masa del Sol que la de la Tierra?

Solución:

$1{,}98 \cdot 10^{30} : (5{,}98 \cdot 10^{24}) = 331\,103{,}68$ veces

98. Halla la fórmula del área del siguiente tetraedro regular, cuya arista mide **a** cm

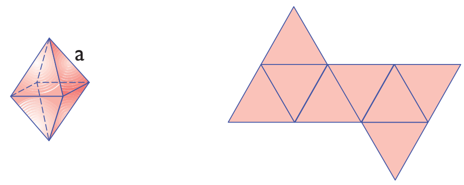




Solución:

$A = a^2\sqrt{3}$

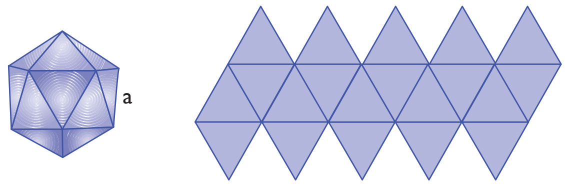
99. Halla la fórmula del área del siguiente octaedro regular, cuya arista mide **a** cm



Solución:

$A = 2a^2\sqrt{3}$

100. Halla la fórmula del área del siguiente icosaedro regular, cuya arista mide **a** cm



Solución:

$A = 5a^2\sqrt{3}$

101. Halla el volumen de un tetraedro cuya arista mide **a** cm

Solución:

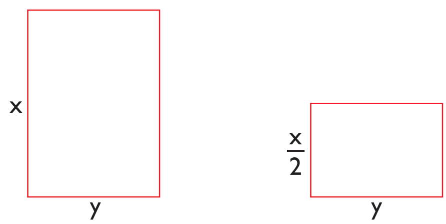
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

102. Halla el volumen de un octaedro cuya arista mide **a** cm

Solución:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

103. Un papel A0 mide 1 m^2, y cuando se corta a la mitad da origen a un A1 que tiene la particularidad de que es semejante al anterior.

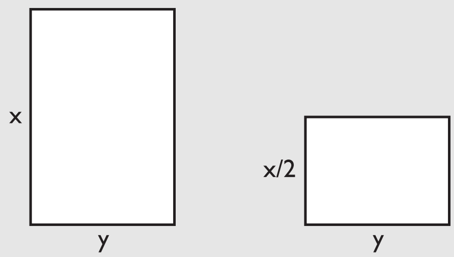


a) Calcula de forma exacta la longitud y la anchura de un papel de formato A0

b) Un A2 es la mitad de un A1, un A3 es la mitad de un A2, y un A4 es la mitad de un A3. Calcula de forma aproximada hasta los milímetros las dimensiones de un A4 (el A4 es el sustituto del folio, por la semejanza entre todos los A…; esta semejanza permite hacer fotocopias reduciendo o ampliando y manteniendo las proporciones del texto y/o dibujo y los márgenes).

Solución:

a)



$\frac{x}{y} = \frac{y}{x/2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = y^2$

Además: $xy = 1 \Rightarrow y = 1/x$

$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^4 = 2$

$x = \sqrt[4]{2}, y = 1/\sqrt[4]{2}$

b) 297 mm × 210 mm

104. Sabiendo que $\log 3 = 0{,}4771$ y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

a) $\log 30$ b) $\log 900$

c) $\log \sqrt{1/3}$ d) $\log \sqrt[5]{270}$

Solución:

a) $\log 30 = \log 3 \cdot 10 = \log 3 + \log 10 = 1{,}4771$

b) $\log 900 = \log 3^2 \cdot 100 = 2 \log 3 + \log 100 = 2{,}9542$

c) $\log \sqrt{1/3} = -\frac{\log 3}{2} = -0{,}2386$

d) $\log \sqrt[5]{270} = \frac{\log (3^3 \cdot 10)}{5} = \frac{3 \log 3 + \log 10}{5} = 0{,}4863$

105. Sabiendo que $\log 45 = 1{,}6532$ y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

a) $\log 4{,}5$ b) $\log 450$

c) $\log \sqrt{45}$ d) $\log \sqrt[3]{4\,500}$

Solución:

a) $\log 4{,}5 = 0{,}6532$

b) $\log 450 = 2{,}6532$

c) $\log \sqrt{45} = 0{,}8266$

d) $\log \sqrt[3]{4\,500} = \frac{3{,}6532}{3} = 1{,}2177$

Paso a paso

106. Calcula: $\frac{4}{3}\left(\frac{5}{6} - 2 + \frac{3}{8}\right)$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

107. Halla la expresión decimal con 14 dígitos del siguiente número y clasifícalo como periódico o irracional:

$$\frac{51}{22}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

108. Calcula los 10 primeros términos de la siguiente sucesión:

$$a_n = 5n - 2$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

109. Calcula:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n - 2}{n}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

110. Calcula: $\sqrt{50} - 4\sqrt{18} + 7\sqrt{8}$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

111. Racionaliza: $\frac{5}{\sqrt{6} + \sqrt{7}}$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

112. Calcula: $\log_3 29$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

113. En una proporción continua los extremos son x y x – 1, y los medios, 1. Halla el valor positivo de **x.** ¿Qué clase de número es?

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

114. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es,** elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

115. Calcula:

a) $\frac{5}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}$ b) $\frac{4}{3} : \left(\frac{8}{5} - 7\right)$

Solución:
a) $\frac{25}{36}$ b) $-\frac{20}{81}$

116. Halla las expresiones decimales, con 14 dígitos, de los siguientes números y clasifícalos como periódicos o irracionales:

a) $\frac{531}{110}$ b) $\sqrt[7]{5^3}$ c) $\frac{251}{7}$ d) π

Solución:
a) 4,827272727272727
Periódico ⇒ Racional
b) 1,9932353156382018
No periódico ⇒ Irracional
c) 35,857142857142857142
Periódico ⇒ Racional
d) 3,1415926535914039
No periódico ⇒ Irracional

117. Calcula los 10 primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 2^n$ b) $a_n = 2n + 3$

c) $a_n = (-1)^n (n + 1)$ d) $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Solución:
a) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024
b) 5, 7, 9, 11 ,13, 15, 17, 19, 21, 23
c) – 2, 3, – 4, 5, – 6, 7, – 8, 9, – 10, 11
d) 3/2, 3/4, 3/8, 3/16, 3/32, 3/64, 3/128, 3/256, 3/512, 3/1 024

118. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}$ b) $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2n + 1}{n}$ d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n^2 + 5}{n^2 - 4n + 1}$

Solución:
a) 0
b) $+\infty$
c) 2
d) 3

119. Calcula:

a) $7\sqrt{27} - 5\sqrt{192} + 2\sqrt{507}$

b) $2\sqrt{125} - 14\sqrt{320} + 3\sqrt{500}$

Solución:
a) $7\sqrt{3}$
b) $-72\sqrt{5}$

120. Racionaliza:

a) $\frac{10}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{5}{\sqrt{14} - \sqrt{13}}$

Solución:
a) $2\sqrt{5}$
b) $5\sqrt{14} + 5\sqrt{13}$

121. Calcula:

a) L 87,34
b) log 456,208
c) $\log_2 0{,}00345$
d) $\log_{27} 890{,}45$

Solución:
a) 4,4698
b) 2,659
c) – 8,179
d) 2,060

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

122. Halla la arista de un cubo de 5 dm^3 de volumen.

Solución:
Arista: 1,71 dm

123. Mediante *ensayo-acierto* halla el término general de las siguientes sucesiones y luego calcula los 10 primeros términos para comprobarlo.

a) 3, 7, 11, 15, …
b) 5, 10, 20, 40, …
c) 1, 4, 9, 16, 25, …
d) 1, – 3, 5, – 7, 9, …

Solución:
a) $a_n = 4n - 1$
3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39
b) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$
5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1 280, 2 560
c) $a_n = n^2$
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100
d) $a_n = (-1)^{n+1}(2n - 1)$
1, – 3, 5, – 7, 9, – 11, 13, – 15, 17, – 19

124. Un yate cuesta $4{,}5 \cdot 10^5$ € y se devalúa cada año un 18%. ¿Cuántos años tardará en valer menos de 10 000 €?

Solución:
$4{,}5 \cdot 10^5 \cdot 0{,}82^x = 10\,000$
x = 19,18188200 años.

2 Matemática financiera

1. Porcentajes

Piensa y calcula

Fíjate cómo se expresan los siguientes porcentajes y completa la tabla calculando mentalmente:

Porcentaje	Calcula	Resultado
10% = 10/100 = 1/10	10% de 4 320	
20% = 20/100 = 1/5	20% de 5 000	
25% = 25/100 = 1/4	25% de 3 600	
50% = 50/100 = 1/2	50% de 3 400	

Solución:

Porcentaje	Calcula	Resultado
10% = 10/100 = 1/10	10% de 4 320	432
20% = 20/100 = 1/5	20% de 5 000	1 000
25% = 25/100 = 1/4	25% de 3 600	900
50% = 50/100 = 1/2	50% de 3 400	1 700

Aplica la teoría

1. A un calzado deportivo que al comienzo de temporada costaba 48 € le hacen al final de la misma una rebaja del 15%. ¿Cuál es el precio de dicho calzado al finalizar la temporada?

Solución:
$48 \cdot 0{,}85 = 40{,}8$ €

2. Tras aplicarle un 20% de descuento a unos pantalones, quedan a un precio de 72 €. ¿Cuál era el precio inicial de los mismos?

Solución:
$72 : 0{,}8 = 90$ €

3. Una entrada de cine costaba el año pasado 4,2 €, y este año, 4,8 €. ¿Cuál es el porcentaje de subida?

Solución:
$4{,}8/4{,}2 = 1{,}1429 \Rightarrow 14{,}29\%$

4. El precio de un determinado artículo aumenta un 15%, con lo que queda en 287,5 €. ¿Cuál era su precio inicial?

Solución:
$287{,}5/1{,}15 = 250$ €

5. Un hotel cobra 80 € por día. ¿A cuánto asciende la factura de siete días, si nos descuentan un 20% por un bono y aplican el 16% de IVA?

Solución:
$80 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}16 = 74{,}24$ €

6. En una papelería realizan un descuento del 15% y cargan un 4% de IVA, con lo que el total de la factura asciende a 145,86 €. ¿Cuál era el precio inicial de la compra?

Solución:
$145{,}86/(0{,}85 \cdot 1{,}04) = 165$ €

2. Interés simple

Piensa y calcula

Si se depositan 1 000 € en una libreta de ahorro y se paga un 5% de interés anual, ¿cuánto dinero se gana al cabo de un año? Si se pagara en impuestos el 20% del dinero ganado, ¿cuál sería, en porcentaje, el interés neto que se cobraría?

Solución:

Se ganarían: 50 €; el porcentaje neto sería: $0,05 \cdot 0,8 = 0,04 = 4\%$

Aplica la teoría

7. Calcula el capital del que se dispondrá, después de 3 años, si se depositan 18 000 € en un banco que da el 7% de interés simple.

Solución:

$I = 18\,000 \cdot 0,07 \cdot 3 = 3\,780$ €

$C = 18\,000 + 3\,780 = 21\,780$ €

8. Calcula los intereses que generan 6 000 € si el banco paga un 10% anual y el dinero se deposita durante:

a) 8 meses.

b) 120 días.

Solución:

a) $I = 6\,000 \cdot 0,1 \cdot 8/12 = 400$ €

b) $I = 6\,000 \cdot 0,1 \cdot 120/360 = 200$ €

9. Calcula el rédito al que se han depositado 9 000 € durante 3 meses si se han obtenido 180 € de interés.

Solución:

$$r = \frac{12 \cdot 180}{9\,000 \cdot 3} = 0,08 \Rightarrow R = 8\%$$

10. En un depósito de una entidad financiera ofrecen un 6,5% de interés simple por 2 años. Hacienda retiene el 18%. Calcula el capital acumulado al finalizar el periodo si se depositan 7 500 €

Solución:

El tanto por uno será: $0,065 \cdot 0,82 = 0,0533$

$I = c \cdot r \cdot t = 7\,500 \cdot 0,0533 \cdot 2 = 799,5$ €

$C = 7\,500 + 799,5 = 8\,299,5$ €

11. Calcula el tiempo en años que se ha depositado un capital de 15 000 € al 4,75% de interés, si se han generado 2 850 € de intereses.

Solución:

$$t = \frac{I}{c \cdot r} = \frac{2\,850}{15\,000 \cdot 0,0475} = 4 \text{ años}$$

12. Calcula el rédito al que se han depositado 20 000 € a interés simple durante 3 años si, una vez retenido el 18% de Hacienda, los intereses generados son de 2 460 €.

Solución:

$$\text{El rédito neto} = \frac{I}{c \cdot t} = \frac{2\,460}{20\,000 \cdot 3} = 0,041$$

El rédito bruto: $r = 0,041 : 0,82 = 0,05 \Rightarrow r = 5\%$

13. Una entidad financiera ofrece un 7% por un depósito a dos años referenciado a las acciones de una empresa, de forma que cuando acaba el plazo se recupera el capital y los intereses si el valor de las acciones es superior al momento de la contratación, y si no lo es, se cobran los intereses y se devuelve el capital en acciones de dicha empresa al valor que tenían cuando se hizo el contrato. El valor de las acciones es de 15 € cuando se contrata el depósito e ingresamos 30 000 €.

a) Si el valor de las acciones es de 16 €, ¿qué capital final recogemos y cómo?

b) Si el valor de las acciones es de 13 €, ¿qué capital final recogemos y cómo?

Solución:

a) Si el valor es de 16 €, se recogen el capital y los intereses en metálico:

$I = c \cdot r \cdot t = 30\,000 \cdot 0,07 \cdot 2 = 4\,200$ €

$C = 30\,000 + 4\,200 = 34\,200$ €

b) Si el valor es de 13 € se recogen el capital en acciones y los intereses en metálico:

$I = c \cdot r \cdot t = 30\,000 \cdot 0,07 \cdot 2 = 4\,200$ €

El capital se recoge en 2 000 acciones.

Como el valor actual de las acciones es de 13 €, habría una pérdida si se vendiesen las acciones de 4 000 €

Como se han cobrado 4 200 € de intereses, habría un beneficio final de 4 200 – 4 000 = 200 €

3. Interés compuesto

Piensa y calcula

Se depositan 1 000 € en un banco durante 3 años al 5% de interés anual de forma que los intereses quedan depositados en la misma cuenta hasta el final del período. Completa la siguiente tabla:

Año	Capital inicial	Interés	Capital final
1	1 000	1 000 · 0,05 = 50	1 050
2	1 050		
3			

Solución:

Año	Capital inicial	Interés	Capital final
1	1 000	1 000 · 0,05 = 50	1 050
2	1 050	1 050 · 0,05 = 52,5	1 102,5
3	1 102,5	1 102,5 · 0,05 = 55,13	1 157,63

Aplica la teoría

14. ¿Qué capital se acumula si se colocan 60 000 € al 5% de interés compuesto durante 4 años, si los intereses se abonan…?

a) anualmente. b) trimestralmente.

c) mensualmente. d) diariamente.

Solución:

a) $C = 60\,000(1 + 0{,}05)^4 = 72\,930{,}38$ €

b) $C = 60\,000\left(1 + \dfrac{0{,}05}{4}\right)^{4 \cdot 4} = 73\,193{,}37$ €

c) $C = 60\,000\left(1 + \dfrac{0{,}05}{12}\right)^{12 \cdot 4} = 73\,253{,}72$ €

d) $C = 60\,000\left(1 + \dfrac{0{,}05}{360}\right)^{360 \cdot 4} = 73\,283{,}15$ €

15. ¿Qué capital inicial es necesario para que, a interés compuesto durante 4 años al 5% anual y con períodos de capitalización trimestrales, se acumule un capital final de 14 638,67 €?

Solución:

$c\left(1 + \dfrac{0{,}05}{4}\right)^{4 \cdot 4} = 14\,638{,}67 \Rightarrow$

$1{,}22c = 14\,638{,}67 \Rightarrow c = 11\,998{,}9 = 12\,000$ €

16. ¿Durante cuánto tiempo hay que tener a interés compuesto 40 000 € al 5,5% de interés con abono de intereses anual para que se recupere un capital de 44 100 €?

Solución:

$40\,000(1 + 0{,}055)^t = 44\,100 \Rightarrow 1{,}055^t = 1{,}1 \Rightarrow$

$t = \dfrac{\log 1{,}1}{\log 1{,}05} = 1{,}78$

17. Calcula la tasa anual equivalente correspondiente a un rédito del 10% con períodos de capitalización…:

a) anuales.

b) trimestrales.

c) mensuales.

d) diarios.

Solución:

a) $TAE = [(1 + 0{,}1) - 1] \cdot 100 = 10\%$

b) $TAE = \left[\left(1 + \dfrac{0{,}1}{4}\right)^4 - 1\right] \cdot 100 = 10{,}38\%$

c) $TAE = \left[\left(1 + \dfrac{0{,}1}{12}\right)^{12} - 1\right] \cdot 100 = 10{,}47\%$

d) $TAE = \left[\left(1 + \dfrac{0{,}1}{360}\right)^{360} - 1\right] \cdot 100 = 10{,}52\%$

4. Capitalización

Piensa y calcula

Calcula la razón y aplica la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica $S = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$ donde a_1 es el primer término, r la razón y a_n es el último:

a) 2, 4, 8, 16, 32, 64
b) 1, 3, 9, 27, 81

Solución:

a) $r = 2 \Rightarrow S = \dfrac{64 \cdot 2 - 2}{2 - 1} = 126$

b) $r = 3 \Rightarrow S = \dfrac{81 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = 121$

Aplica la teoría

18. En un fondo de pensiones que garantiza un 6% de interés se ingresan 100 € mensualmente. ¿Qué capital se habrá acumulado después de 20 años?

Solución:

$C = \dfrac{100(1 + 0{,}06/12)[(1 + 0{,}06/12)^{12 \cdot 20} - 1]}{0{,}06/12} =$

$= 46\,435{,}11$ €

19. Se ingresan anualmente 7 000 € en un fondo que garantiza un 7,5% de interés. ¿Qué capital se recuperará después de 30 años?

Solución:

$C = \dfrac{7\,000(1 + 0{,}075)[(1 + 0{,}075)^{30} - 1]}{0{,}075} =$

$= 778\,080{,}50$ €

20. ¿Qué cantidad se debe depositar anualmente al 7% de interés anual si después de 35 años se quieren rescatar 300 000 €?

Solución:

$\dfrac{a(1 + 0{,}07)[(1 + 0{,}07)^{35} - 1]}{0{,}07} = 300\,000$

$a = \dfrac{300\,000 \cdot 0{,}07}{1{,}07(1{,}07^{35} - 1)} = 2\,028{,}21$ €

21. ¿Durante cuántos años se deben invertir 5 880 € anualmente al 8% para poder rescatar 720 000 €?

Solución:

$\dfrac{5\,880(1 + 0{,}08)[(1 + 0{,}08)^t - 1]}{0{,}08} = 720\,000$

$1{,}08^t = \dfrac{720\,000 \cdot 0{,}08}{5\,880 \cdot (1 + 0{,}08)} + 1 = 10{,}07$

$t = \dfrac{\log 10{,}07}{\log 1{,}08} = 30{,}009$

Lo recibirá a partir de los 30 años.

5. Créditos

Piensa y calcula

Se recibe un préstamo de 10 000 € al 10% y se ha de devolver en cuatro años, pagando cada año los intereses de la cantidad que se debe más la cuarta parte del capital. Completa la tabla calculando mentalmente:

Año	Capital pendiente	Pago anual = intereses + capital	Deuda pendiente
1	10 000	10 000 · 0,1 + 2 500 = 3 500	7 500
2	7 500	7 500 · 0,1 + 2 500	
3			
4			

Solución:

Año	Capital pendiente	Pago anual = intereses + capital	Deuda pendiente
1	10 000	10 000 · 0,1 + 2 500 = 3 500	7 500
2	7 500	7 500 · 0,1 + 2 500 = 3 250	5 000
3	5 000	5 000 · 0,1 + 2 500 = 3 000	2 500
4	2 500	2 500 · 0,1 + 2 500 = 2 750	0

Aplica la teoría

22. Se piden prestados 20 000 € a un interés del 12%, a devolver en un único pago al transcurrir 3 años. ¿Qué cantidad hay que devolver al finalizar dicho período?

Solución:

$D = 20\,000 \cdot 1{,}12^3 = 28\,098{,}56$ €

23. Calcula la mensualidad de amortización de un crédito de 48 000 € al 6% de interés durante 10 años. Hazlo aplicando la fórmula y con la tabla.

Solución:

a) Con la fórmula:

$$a = \frac{48\,000(1 + 0{,}06/12)^{120}\, 0{,}06/12}{(1 + 0{,}06/12)^{120} - 1} = 532{,}90 \text{ €}$$

b) Con la tabla:

$111{,}02 \cdot 4{,}8 = 532{,}896 = 532{,}90$ €

24. Se ha solicitado una hipoteca a interés fijo del 6,5% de 90 000 €, para devolver en un período de 20 años. Calcula la mensualidad que se debe pagar.

Solución:

$$a = \frac{90\,000(1 + 0{,}065/12)^{12 \cdot 20}\, 0{,}065/12}{(1 + 0{,}065/12)^{12 \cdot 20} - 1} = 671{,}02 \text{ €}$$

25. ¿Qué deuda se amortiza mediante el pago de 10 anualidades de 13 910,5 € al 6,5% de interés?

Solución:

$$\frac{D \cdot 1{,}065^{10} \cdot 0{,}065}{1{,}065^{10} - 1} = 13\,910{,}5$$

$$D = \frac{13\,910{,}5(1{,}065^{10} - 1)}{1{,}065^{10} \cdot 0{,}065} = 100\,000 \text{ €}$$

26. ¿Durante cuántos años se debe pagar una hipoteca de 120 000 € al 5,5% de interés fijo si la anualidad que se puede pagar es de 8 256 €?

Solución:

Se puede partir de la fórmula de la anualidad de amortización y hacer los cálculos para despejar el tiempo:

$$\frac{120\,000 \cdot (1 + 0{,}055)^t \cdot 0{,}055}{(1 + 0{,}055)^t - 1} = 8\,256$$

$$6\,600 \cdot 1{,}055^t = 8\,256 \cdot 1{,}055^t - 8\,256$$

$$1{,}055^t = \frac{8\,256}{1\,656} = 4{,}99$$

$$t = \frac{\log 4{,}99}{\log 1{,}055} = 30{,}02$$

A los 30 años.

Ejercicios y problemas

1. Porcentajes

27. A un televisor que cuesta 450 € le hacen una rebaja del 20%. ¿Cuál es el precio final de la televisión?

Solución:
Precio final = 450 · 0,8 = 360 €

28. A un artículo le han aplicado un 15% de descuento y queda a un precio de 272 €. ¿Cuál era el precio inicial del mismo?

Solución:
Precio final = 272 : 0,85 = 320 €

29. A un automóvil que cuesta 21 300 € se le incrementa en un 7% su precio. ¿Cuál es su precio final?

Solución:
Precio final = 21 300 · 1,07 = 22 791 €

30. En una factura aplican un 10% de descuento y un 16% de IVA. Si el precio de la compra era de 320 €, ¿cuánto se pagará en total?

Solución:
Precio final = 320 · 0,9 · 1,16 = 334,08 €

31. En una clase suspenden el 30% de los alumnos, y de éstos el 50% recuperan el examen. Si el total de aprobados es de 17, ¿cuál es el porcentaje total de aprobados? ¿Cuántos alumnos son?

Solución:
Aprueban el examen, en tanto por uno:
0,7 + 0,3 · 0,5 = 0,85
Es decir, el 85% aprueba.
El número de alumnos será:
17 : 0,85 = 20 alumnos.

32. Hace 5 años un piso costaba 72 000 € y actualmente cuesta 82 800 €. ¿Qué porcentaje de subida ha experimentado?

Solución:
82 800 : 72 000 = 1,15 ⇒ 15% de subida.

2. Interés simple

33. En un depósito ofrecen un 7,5% de interés simple por 5 años. Si Hacienda retiene el 18%, ¿cuál es el capital acumulado al finalizar el período al depositar 12 450 €?

Solución:
El tanto por uno será: 0,075 · 0,82 = 0,0615
I = 12 450 · 0,0615 · 5 = 3 828,38 €

34. ¿Durante cuánto tiempo en años se ha depositado un capital de 35 500 € al 5,5% de interés si se han generado 5 857,5 €?

Solución:
$t = \dfrac{5\,857{,}5}{35\,500 \cdot 0{,}055} = 3$ años.

35. ¿Cuál es el rédito o tanto por ciento al que se han depositado 25 300 € a interés simple durante 2 años, si una vez retenido el 18% de Hacienda los intereses generados son de 1 867,14 €?

Solución:
1 867,14 = 25 300 · 0,82r · 2
r = 1 867,14 : 41 492 = 0,045 ⇒ R = 4,5%

36. Una entidad financiera ofrece un 3,5% anual por un depósito renovable todos los meses. Si los intereses no se acumulan en el depósito y se renueva 5 meses, ¿qué interés se obtiene por 20 000 €?

Solución:
I = 20 000 · 0,035 · 5/12 = 291,67 €

3. Interés compuesto

37. Calcula el capital que se acumula si se colocan 120 000 € al 5% de interés compuesto durante 3 años, si los intereses se abonan…:

a) anualmente. b) trimestralmente.
c) mensualmente. d) diariamente.

Solución:
a) $C = 120\,000(1 + 0{,}05)^3 = 138\,915$ €

b) $C = 120\,000\left(1 + \dfrac{0{,}05}{4}\right)^{4 \cdot 3} = 139\,290{,}54$ €

c) $C = 120\,000\left(1 + \dfrac{0{,}05}{12}\right)^{12 \cdot 3} = 139\,376{,}67$ €

d) $C = 120\,000\left(1 + \dfrac{0{,}05}{360}\right)^{360 \cdot 3} = 139\,418{,}66$ €

38. ¿Qué capital inicial es necesario tener depositado para que a interés compuesto durante 5 años al 6,5% anual y con períodos de capitalización mensuales se acumule un capital final de 21 434,16 €?

Solución:

$$c\left(1+\frac{0,065}{12}\right)^{12\cdot 5}=21\,434,16 \Rightarrow$$

$1,38c = 21\,434,16 \Rightarrow c = 15\,532$ €

39. ¿En cuánto tiempo, a interés compuesto, un capital de 36 700 € al 5% de interés con abono de intereses anual se convertirá en 42 500 €?

Solución:

$36\,700 \cdot 1,05^t = 42\,500$

$1,05^t = 1,16$

$$t=\frac{\log 1,16}{\log 1,05}=3,04$$

A los 3 años.

40. Calcula la tasa anual equivalente correspondiente a un rédito del 6,5% con períodos de capitalización…:

a) anuales. b) trimestrales.

c) mensuales. d) diarios.

Solución:

a) $TAE = [(1 + 0,065) - 1] \cdot 100 = 6,5\%$

b) $$TAE=\left[\left(1+\frac{0,065}{4}\right)^{4}-1\right]\cdot 100=6,66\%$$

c) $$TAE=\left[\left(1+\frac{0,065}{12}\right)^{12}-1\right]\cdot 100=6,7\%$$

d) $$TAE=\left[\left(1+\frac{0,065}{360}\right)^{360}-1\right]\cdot 100=6,72\%$$

4. Capitalización

41. Se ingresan anualmente 9 000 € en un fondo que garantiza un 4,7% de interés. ¿Qué capital se recuperará después de 20 años?

Solución:

$$C=\frac{9\,000\cdot 1,047(1,047^{20}-1)}{0,047}=301\,882,11 \text{ €}$$

42. Se ingresan en un fondo de pensiones 220 € mensuales con un interés garantizado del 5,6%. ¿Qué capital se habrá acumulado después de 15 años?

Solución:

$$C=\frac{220(1+0,056/12)[(1+0,056/12)^{12\cdot 15}-1]}{0,056/12}=$$

$= 62\,132,75$ €

43. ¿Qué cantidad se debe depositar mensualmente al 5% de interés si después de 30 años se quieren rescatar 300 000 €?

Solución:

$$\frac{a\cdot 1,05(1,05^{30}-1)}{0,05}=300\,000$$

$$a=\frac{300\,000\cdot 0,05}{1,05(1,05^{30}-1)}=4\,300,41 \text{ €}$$

44. ¿Durante cuántos años debo invertir 1 800 €, al 6% anual, para poder rescatar 70 187 €?

Solución:

$$\frac{1\,800\cdot 1,06(1,06^t-1)}{0,06}=70\,187 \text{ €}$$

$$1,06^t=\frac{70\,187\cdot 0,06}{1\,800\cdot 1,06}+1 \Rightarrow 1,06^t=3,21$$

$$t=\frac{\log 3,21}{\log 1,06}=20,02$$

Lo recibirá a partir de los 20 años.

5. Créditos

45. Se debe amortizar un préstamo de 35 000 € a un interés del 9,75% a devolver en un único pago al transcurrir 5 años. ¿Qué cantidad devolveremos al finalizar dicho período?

Solución:

$D = 35\,000 \cdot 1,0975^5 = 55\,730,21$ €

46. Calcula la mensualidad de amortización de un crédito de 28 000 € al 6,5% de interés durante 5 años. Hazlo aplicando la fórmula y la tabla de cuotas mensuales.

Solución:

a) Con la fórmula:

$$a=\frac{28\,000(1+0,065/12)^{12\cdot 5}\,0,065/12}{(1+0,065/12)^{12\cdot 5}-1}=547,85 \text{ €}$$

b) Con la tabla:

$195,66 \cdot 2,8 = 547,848 = 547,85$ €

47. Se ha solicitado una hipoteca por valor de 85 500 € a un interés fijo del 4,25% a devolver en 15 años. Utilizando la tabla de cuotas mensuales, calcula la mensualidad que se debe pagar.

Solución:

$a = 75,23 \cdot 8,55 = 643,22$ €

48. ¿Qué deuda se amortiza mediante el pago de 10 anualidades de 6 000 € al 7,5% de interés?

Solución:

$$\frac{D \cdot 1{,}075^{10} \cdot 0{,}075}{1{,}075^{10} - 1} = 6\,000$$

$$D = \frac{6\,000(1{,}075^{10} - 1)}{1{,}075^{10} \cdot 0{,}075} = 41\,184.49\ €$$

49. ¿Durante cuántos años se debe pagar una hipoteca de 44 136 € al 7,5% de interés fijo si la anualidad que se puede pagar es de 5 000 €?

Solución:

$$\frac{44\,136 \cdot (1 + 0{,}075)^t \cdot 0{,}075}{(1 + 0{,}075)^t - 1} = 5\,000$$

$$3310{,}2 \cdot 1{,}075^t = 5000 \cdot 1{,}075^t - 5000$$

$$1{,}075^t = \frac{5\,000}{1\,689{,}8} = 2{,}96$$

$$t = \frac{\log 2{,}96}{\log 1{,}075} = 15{,}005$$

A los 15 años.

Para ampliar

50. La cantidad de agua de un embalse ha disminuido un 24% con respecto a los 80,5 millones de litros que había el mes pasado. ¿Qué cantidad de agua queda en el embalse?

Solución:

Agua que queda: 80,5 · 0,76 = 61,18 millones de litros.

51. El precio de un ordenador ha bajado en el último año un 17%. Si ahora está a un precio de 870 €, ¿cuál era el precio hace un año?

Solución:

Precio inicial = 870 : 0,83 = 1 048,19 €

52. En una clase de 25 alumnos aprueban un examen 18 de ellos. ¿Qué porcentaje de aprobados y de suspensos hay?

Solución:

Aprueban: 18/25 = 0,72 ⇒ 72%

Suspenden: 100 – 72 = 28%

53. En una factura aplican un 15% de descuento y un 16% de IVA. Si el precio de la compra era de 350 €, ¿cuánto se pagará en total?

Solución:

Total = 350 · 0,85 · 1,16 = 345,1 €

54. Un artículo costaba 45 € el año pasado y 50,4 € este año. ¿Cuál es el porcentaje de subida?

Solución:

50,4 : 45 = 1,12 ⇒ 12% de subida.

55. En un producto que ha subido por costes de fabricación un 12% aplican un 20% de rebaja. Si dicho producto tiene un precio de 250 €, ¿cuál será su precio final?

Solución:

Precio final = 250 · 1,12 · 0,80 = 224 €

56. ¿Qué intereses genera un depósito de 12 500 € al 4% de interés simple durante 7 días, si Hacienda retiene el 18% de los mismos?

Solución:

El tanto por uno es: 0,04 · 0,82 = 0,0328

I = 12 500 · 0,0328 · 7/360 = 7,97 €

57. ¿Cuál es el tiempo en años que se ha dejado depositado un capital de 28 350 € al 4,5% de interés simple si han generado 5 230,58 € una vez retenido el 18% de Hacienda?

Solución:

28 350 · 0,045 · 0,82 · t = 5 230,58

t = 5 años.

58. ¿Cuál es el rédito al que se han depositado 15 250 € a interés simple durante 3 años si una vez retenido el 18% de Hacienda los intereses generados son de 1 313,03 €?

Solución:

15 250 · r · 0,82 · 3 = 1 313,03

r = 0,035 ⇒ R = 3,5%

59. Una entidad financiera ofrece un 4,25% anual por un depósito renovable todos los meses. Si los intereses no se acumulan en el depósito y se renueva 3 meses, ¿qué interés se obtiene por 24 800 €?

Solución:

$I = 24\,800 \cdot 0{,}0425 \cdot 3/12 = 263{,}5$ €

60. Calcula el capital que se acumula si se colocan 42 500 € al 4,5% de interés compuesto durante 4 años si los intereses se abonan…:

a) anualmente. b) trimestralmente.

c) mensualmente. d) diariamente.

Solución:

a) $C = 42\,500 \cdot 1{,}045^4 = 50\,682{,}04$ €

b) $C = 42\,500 \left(1 + \dfrac{0{,}045}{4}\right)^{4 \cdot 4} = 50\,830{,}63$ €

c) $C = 42\,500 \left(1 + \dfrac{0{,}045}{12}\right)^{12 \cdot 4} = 50\,864{,}61$ €

d) $C = 42\,500 \left(1 + \dfrac{0{,}045}{360}\right)^{360 \cdot 4} = 50\,881{,}17$ €

61. Se ha solicitado una hipoteca a interés fijo del 5,75% de 90 500 € para devolver en un período de 20 años. Calcula la mensualidad que se debe pagar.

Solución:

$a = \dfrac{90\,500 \cdot (1 + 0{,}0575/12)^{12 \cdot 20}\, 0{,}0575/12}{(1 + 0{,}0575/12)^{12 \cdot 20} - 1} = 635{,}39$ €

62. ¿En cuánto tiempo, a interés compuesto, un capital de 26 500 € al 4,75% de interés con abono de intereses anuales se convertirá en 33 421 €?

Solución:

$26\,500 \cdot 1{,}0475^t = 33\,421$

$1{,}0475^t = 1{,}26$

$t = \dfrac{\log 1{,}26}{\log 1{,}0475} = 4{,}98$

A los 5 años.

63. Calcula la tasa anual equivalente correspondiente a un rédito del 8% con períodos de capitalización…:

a) anuales.

b) trimestrales.

c) mensuales.

d) diarios.

Solución:

a) $TAE = [(1 + 0{,}08) - 1] \cdot 100 = 8\%$

b) $TAE = \left[\left(1 + \dfrac{0{,}08}{4}\right)^4 - 1\right] \cdot 100 = 8{,}24\%$

c) $TAE = \left[\left(1 + \dfrac{0{,}08}{12}\right)^{12} - 1\right] \cdot 100 = 8{,}30\%$

d) $TAE = \left[\left(1 + \dfrac{0{,}08}{360}\right)^{360} - 1\right] \cdot 100 = 8{,}33\%$

64. Se ingresan en un fondo de pensiones 300 € mensuales con un interés garantizado del 6,5%. ¿Qué capital se habrá acumulado después de 17 años?

Solución:

$C = \dfrac{300 \cdot (1 + 0{,}065/12)[(1 + 0{,}065/12)^{12 \cdot 17} - 1]}{0{,}065/12} =$

$= 111\,939{,}15$ €

65. Se ingresan anualmente 12 000 € en un fondo que garantiza un 7,5% de interés. ¿Qué capital se recuperará después de 10 años?

Solución:

$C = \dfrac{12\,000 \cdot 1{,}075(1{,}075^{10} - 1)}{0{,}075} = 182\,497{,}43$ €

66. ¿Qué cantidad se debe depositar anualmente al 5% de interés si después de 10 años se quieren rescatar 200 000 €?

Solución:

$\dfrac{a \cdot 1{,}05(1{,}05^{10} - 1)}{0{,}05} = 200\,000$

$a = \dfrac{200\,000 \cdot 0{,}05}{1{,}05(1{,}05^{10} - 1)} = 15\,143{,}73$ €

67. ¿Qué cantidad se ha dejado depositada durante 4 años al 6,5% de interés compuesto si, una vez hecha la retención del 18% de Hacienda, se han generado 3 523,54 €?

Solución:

$c \cdot 1{,}065^4 = c + 3\,523{,}54 : 0{,}82$

$c = \dfrac{4\,297}{1{,}065^4 - 1} = 15\,000$ €

68. ¿Durante cuántos años se debe invertir 5 000 € anualmente al 6% para poder rescatar 79 350 €?

Solución:

$\dfrac{5\,000 \cdot 1{,}06(1{,}06^t - 1)}{0{,}06} = 79\,350$

$1{,}06^t = \dfrac{79\,350 \cdot 0{,}06}{5\,000 \cdot 1{,}06} + 1 \Rightarrow 1{,}06^t = 1{,}9$

$t = \dfrac{\log 1{,}9}{\log 1{,}06} = 11{,}02$

A los 11 años.

69. Se debe amortizar un préstamo de 30 000 € a un interés del 12%, a devolver en un único pago al transcurrir 3 años. ¿Qué cantidad se devuelve al finalizar dicho período?

Solución:

$D = 30\,000 \cdot 1{,}12^3 = 42\,147{,}84$ €

70. Utiliza la tabla de cuotas mensuales y calcula la mensualidad correspondiente para amortizar un préstamo en los siguientes casos:

a) 20 000 € al 4,75% durante 15 años.

b) 20 000 € al 7% durante 20 años.

c) 30 000 € al 6,5% durante 10 años.

d) 30 000 € al 6,5% durante 20 años.

Solución:

a) $77{,}78 \cdot 2 = 155{,}56$ €

b) $77{,}53 \cdot 2 = 155{,}06$ €

c) $113{,}55 \cdot 3 = 340{,}65$ €

d) $74{,}56 \cdot 3 = 223{,}68$ €

71. Calcula la mensualidad de amortización de un crédito de 42 000 € al 5,5% de interés durante 7 años.

Solución:

$$a = \frac{42\,000 \cdot (1 + 0{,}055/12)^{12 \cdot 7}\, 0{,}055/12}{(1 + 0{,}055/12)^{12 \cdot 7} - 1} = 603{,}54 \text{ €}$$

72. ¿Qué capital inicial es necesario tener depositado para que a interés compuesto durante 3 años al 5,25% anual y con periodos de capitalización anuales se acumule un capital final de 35 444 €?

Solución:

$c \cdot 1{,}0525^3 = 35\,444$

$c = 30\,400{,}2$ €

$c = 30\,400$ €

Problemas

73. Una persona cobraba anualmente 1 502 € y actualmente cobra 1 682,24 €. ¿Qué porcentaje de subida ha experimentado?

Solución:

$1\,682{,}24 : 1\,502 = 1{,}12 \Rightarrow 12\%$

74. El precio de un artículo ha pasado de 3 000 a 1 200 €. ¿Cuál ha sido la disminución del precio expresada en porcentaje?

Solución:

$1\,200 : 3\,000 = 0{,}4 \Rightarrow 1 - 0{,}4 = 0{,}6 \Rightarrow 60\%$ de disminución.

75. Si el precio de una casa es de 72 000 € y sube un 8% cada año, ¿cuántos años tardará en duplicarse?

Solución:

$72\,000 \cdot 1{,}08^t = 2 \cdot 72\,000$

$1{,}08^t = 2$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}08} = 9{,}006$$

Aproximadamente a los 9 años.

76. Una entidad financiera paga el 9,5% del dinero depositado si se mantiene 3 años. Calcula cuánto se ganará al finalizar los tres años por cada 100 € si Hacienda retiene el 18% en los siguientes casos:

a) Los intereses se ingresan en una cuenta distinta.

b) Los intereses se ingresan en la misma cuenta.

Solución:

a) El interés es simple.

$I = 100 \cdot 0{,}095 \cdot 0{,}82 \cdot 3 = 23{,}37$ €

b) El interés es compuesto.

$C = 100 \cdot 1{,}095^3 = 131{,}29$

Interés neto $= 31{,}29 \cdot 0{,}82 = 25{,}66$ €

77. Calcula el rédito anual al que se han depositado 15 000 € a interés simple durante 18 meses si los intereses generados, con la retención de Hacienda descontada, han sido de 830,25 €

Solución:

$830{,}25 = 15\,000 \cdot r \cdot 0{,}82 \cdot 18/12$

$r = 738 \cdot 12 : (15\,000 \cdot 0{,}82 \cdot 18)$

$r = 0{,}045 \Rightarrow R = 4{,}5\%$

78. Un depósito ofrece un 4% de interés simple anual renovable mensualmente, además de no acumularse los intereses en el mismo. ¿Durante cuánto tiempo se deben depositar 12 000 € para generar unos intereses brutos de 800 €?

Solución:

$800 = 12\,000 \cdot 0{,}04 \cdot t/12$

$t = 800 \cdot 12 : (12\,000 \cdot 0{,}04)$

$t = 20$ meses.

79. ¿En cuánto tiempo, a interés compuesto, un capital de 25 000 € al 5% de interés, con abono mensual de intereses, generará unos intereses de 3 310,34 €, con el 18% de Hacienda descontado?

Solución:

$$25\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{12t} = 25\,000 + 3\,310,34 : 0,82$$

$$\left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{12t} = (25\,000 + 4\,037) : 25\,000$$

$$t = \frac{\log 1,16}{12 \log(1 + 0,05/12)} = 2,97$$

A los 3 años.

80. ¿Durante cuántos años debo invertir 300 € mensualmente al 6% para poder rescatar 139 305 €?

Solución:

$$\frac{300 \cdot (1 + 0,06/12)[(1 + 0,06/12)^{12t} - 1]}{0,06/12} = 139\,305$$

$$1,005^{12t} = \frac{139\,305 \cdot 0,005}{300 \cdot 1,005} + 1 \Rightarrow 1,005^{12t} = 3,31$$

$$t = \frac{\log 3,31}{12 \log 1,005} = 19,99$$

Lo recibirá a partir de los 20 años.

81. ¿En cuánto tiempo, a interés compuesto, un capital de 25 000 € al 4% de interés, con abono de intereses trimestrales, se convertirá en 28 170 €?

Solución:

$$25\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{4}\right)^{4t} = 28\,170$$

$$1,01^{4t} = 1,127$$

$$t = \frac{\log 1,127}{4 \log 1,01} = 3 \text{ años.}$$

82. Se piden prestados 10 000 €, a un interés del 9%, a devolver en un único pago al transcurrir 2 años. ¿Qué cantidad hay que devolver al finalizar dicho período?

Solución:

$$10\,000 \cdot 1,09^2 = 11\,881 \text{ €}$$

83. Se han pedido prestados 6 000 €, a devolver en un único pago, con un interés del 10%. Si se devuelven 7 986 €, ¿cuál es el período de devolución del préstamo?

Solución:

$$6\,000 \cdot 1,1^t = 7\,986$$

$$1,1^t = 1,331$$

$$t = \frac{\log 1,331}{\log 1,1} = 3 \text{ años.}$$

84. Calcula la mensualidad de amortización de un crédito de 20 000 € al 5% de interés durante 5 años.

Solución:

$$a = \frac{20\,000 \cdot 1,05^5 \cdot 0,05}{1,05^5 - 1} = 4\,619,50 \text{ €}$$

85. ¿Qué deuda se amortiza mediante el pago de 15 anualidades de 6 000 € al 4% de interés?

Solución:

$$\frac{D \cdot 1,04^{15} \cdot 0,04}{1,04^{15} - 1} = 6\,000$$

$$D = \frac{6\,000(1,04^{15} - 1)}{1,04^{15} \cdot 0,04} = 66\,710,32 \text{ €}$$

86. ¿Qué deuda se amortiza mediante el pago de 60 cuotas trimestrales de 1 500 € al 4% de interés? Compara el resultado con el problema anterior.

Solución:

$$\frac{D \cdot (1 + 0,04/4)^{4 \cdot 15} \cdot 0,04/4}{(1 + 0,04/4)^{4 \cdot 15} - 1} = 1\,500$$

$$D = \frac{1\,500(1,01^{60} - 1)}{1,01^{60} \cdot 0,01} = 67\,432,56 \text{ €}$$

Pagando al año, la misma cantidad, pero al hacerlo trimestralmente se amortizan 722,24 € más que al hacerlo anualmente.

87. ¿Durante cuántos años se debe pagar una hipoteca de 120 000 € al 6% de interés fijo si la mensualidad que se puede pagar es de 1 332 €?

Solución:

$$\frac{120\,000 \cdot (1 + 0,06/12)^{12t} \cdot 0,06/12}{(1 + 0,06/12)^{12t} - 1} = 1\,332$$

$$600 \cdot 1,005^{12t} = 1\,332 \cdot 1,005^{12t} - 1\,332$$

$$1,005^{12t} = \frac{1\,332}{732} \Rightarrow 1,005^{12t} = 1,82$$

$$t = \frac{\log 1,82}{12 \log 1,005} = 10,006$$

A los 10 años.

Para profundizar

88. En la compra de un coche se pide un crédito de 9 000 € al 8%. Por la gestión del crédito se cobran 300 €, que se incluyen en el capital del préstamo. Si el crédito se amortiza en 60 mensualidades, ¿a cuánto asciende cada una de ellas?

Solución:

$$a = \frac{9\,300 \cdot (1 + 0{,}08/12)^{60} \cdot 0{,}08/12}{(1 + 0{,}08/12)^{60} - 1} = 188{,}57 \text{ €}$$

89. Calcula el tiempo al que se deben depositar 10 000 € a interés compuesto con períodos de capitalización mensuales para que con un rédito del 4% se conviertan en 14 909 €

Solución:

$$10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^{12t} = 14\,909$$

$$\left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^{12t} = 1{,}4909$$

$$t = \frac{\log 1{,}4909}{12 \log (1 + 0{,}04/12)} = 10{,}001$$

A los 10 años.

90. Calcula el tiempo en años que hay que tener un capital depositado en un banco al 5,95% de interés compuesto para que se duplique.

Solución:

$$1{,}0595^t = 2$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}0595} = 11{,}99 \text{ años.}$$

A partir de los 12 años.

91. Hemos decidido solicitar una hipoteca de 60 000 € al 4,94% de interés variable con un período inicial de 1 año y con cláusula de revisión del euríbor más 0,4 y con un plazo de amortización de 20 años. La hipoteca tiene una comisión de apertura del 1,5% sobre el nominal.

a) ¿Cuál es la cuota mensual del primer año?

b) Si al finalizar el período inicial el euríbor está en 3,77, ¿qué interés se pagará el segundo año?

c) Si por los gastos de registro, notaría y gestoría se pagan 1 500 €, y por gastos de tasación y verificación registral, 200 €, ¿a cuánto ascienden los gastos de la hipoteca?

Solución:

a) $a = \dfrac{60\,000 \cdot (1 + 0{,}0494/12)^{12 \cdot 20} \cdot 0{,}0494/12}{(1 + 0{,}0494/12)^{12 \cdot 20} - 1} =$

$= 393{,}99 = 400$ €

b) $3{,}77 + 0{,}4 = 4{,}17\%$

c) $0{,}015 \cdot 60\,000 + 1\,500 + 200 = 2\,600$ €

92. Se ha solicitado un préstamo de 80 000 € para comprar una casa, al 6% de interés fijo durante 20 años.

a) Calcula la mensualidad con la tabla de cuotas mensuales.

b) Calcula lo que se paga al año.

c) Por la compra de la vivienda habitual, Hacienda permite desgravarse por las cantidades invertidas con los porcentajes de deducción siguientes: durante los dos años siguientes a la adquisición, el 25% sobre los primeros 4 508 € y el 15% sobre el exceso hasta el límite de 9 016 €. Con posterioridad, los porcentajes anteriores serán del 20% y del 15%, respectivamente. Calcula a cuánto asciende la deducción de Hacienda en los dos primeros años y posteriores.

d) Calcula cuánto se paga en total por el préstamo de los 80 000 €.

e) Calcula en porcentaje la cantidad total que se paga de intereses por el préstamo.

Solución:

a) $a = 71{,}64 \cdot 8 = 573{,}12$ €

b) Al año se paga: $573{,}12 \cdot 12 = 6\,877{,}44$ €

c) Los dos primeros años se desgrava:

$0{,}25 \cdot 4\,508 + 0{,}15 \cdot (6\,877{,}44 - 4\,508) = 1\,482{,}42$ €

A partir del 3^er^ año se desgrava:

$0{,}2 \cdot 4\,508 + 0{,}15 \cdot (6\,877{,}44 - 4\,508) = 1\,257{,}02$ €

d) Se paga por el préstamo:

$6\,877{,}44 \cdot 20 - 1\,482{,}42 \cdot 2 - 1\,257{,}02 \cdot 18 =$

$= 111\,957{,}6$ €

e) Intereses = 31 957,6 €

$31\,957{,}6 : 80\,000 = 0{,}399 = 39{,}9\%$

Paso a paso

93. Un frigorífico que costaba el año pasado 1 200 € ha aumentado su precio un 10%. Al comprarlo este año, nos rebajan un 10%. ¿Qué precio pagamos por el frigorífico?

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

94. Se depositan 4 500 € a un interés del 5,4% durante 3 meses. ¿A cuánto asciende dicho interés?

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

95. Calcula el TAE de un depósito al 5% si los períodos de capitalización son mensuales.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

96. Una persona ingresa 60 € mensualmente en un fondo de pensiones al 7%. ¿Qué capital tendrá acumulado al cabo de 30 años?

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

97. Calcula la mensualidad que hay que pagar para devolver 60 000 € al 5,5% de interés compuesto durante 10 años.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

98. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es,** elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

99. Una caldera de calefacción de 3 000 € aumenta su precio un 15%. ¿Cuánto vale ahora?

Solución:
$3\,000 \cdot 1,15$
3 450 €

100. Una máquina de hacer fotocopias cuesta 6 000 € y tiene una rebaja del 15%. ¿Qué precio se paga por ella?

Solución:
$6\,000 \cdot 0,85$
5 100 €

101. En el taller facturan 172,25 € por el arreglo de un coche y aumentan un 16% de IVA. ¿A cuánto asciende la factura en total?

Solución:
$172,25 \cdot 1,16$
199,81 €

102. Un empleado cobra mensualmente 2 043,44 €. Si le descuentan el 18% para el impuesto sobre la renta de las personas físicas (IRPF), ¿cuánto cobra?

Solución:
$2\,043,44 \cdot 0,82$
1 675,62 €

103. El precio de un determinado artículo aumenta un 15% y queda fijado en 287,5 €. ¿Cuál era su precio inicial?

Solución:
$287,5 : 1,15$
250 €

104. Un hotel cobra 80 € por día. ¿A cuánto asciende la factura de siete días si nos descuentan un 20% por un bono y aplican el 16% de IVA?

Solución:
$80 \cdot 0,8 \cdot 1,16 \cdot 7$
519,68 €

105. Se depositan 6 000 € en un banco al 4,75% de interés simple anual. ¿Cuánto supone dicho interés?

Solución:
$6\,000 \cdot 0,0475$
285 €

106. Se depositan 3 000 € a un interés simple del 6% durante 2 años. ¿Qué capital tendremos al finalizar ese tiempo?

Solución:
3 000 + 3 000 · 0,06 · 2
3 360 €

107. Se depositan 6 000 € durante 3 años a un 4,5% de interés. Si Hacienda retiene un 18% de los intereses, ¿qué interés se obtiene al acabar dicho período?

Solución:
0,82 · 0,045 = 0,0369
6 000 · 0,0369 · 3
664,2 €

108. Se depositan 3 000 € al 6% de interés compuesto durante 4 años. ¿Qué capital tendremos al finalizar ese tiempo si Hacienda retiene un 18%?

Solución:
$3\,000 \cdot 1{,}06^4 = 3\,787{,}43$ €
Intereses: 3 787,43 – 3 000 = 787,43 €
Hacienda: 787,43 · 0,18 = 141,74 €
Capital final: 3 787,43 – 141,74 = 3 645,69 €

109. En un fondo de pensiones que garantiza un 6% de interés se ingresan 100 € mensualmente. ¿Qué capital se habrá acumulado después de 20 años?

Solución:
Seleccionamos la fórmula del ejercicio 96
Sustituimos a = 100, n = 12, r = 0.06, t = 20
Obtenemos: 46 435,11 €

110. Se depositan 5 000 € a un interés compuesto del 7,5% durante 3 años con períodos de capitalización mensuales. Si Hacienda retiene el 18% cuando se recupera el capital, ¿cuál es el capital final?

Solución:
Introducimos la fórmula:
c(1+r/n)^(nt)
Sustituimos c = 5 000, r = 0.075, n = 12, t = 3
Obtenemos: 6 257,23 €
Intereses: 6 257,23 – 5 000 = 1 257,23 €
Hacienda: 1 257,23 · 0,18 = 226,30 €
Capital final: 6 257,23 – 226,30 = 6 030,93 €

111. ¿Cuál es el TAE de un depósito al 3,75% si los períodos de capitalización son mensuales?

Solución:
Seleccionamos la fórmula del ejercicio 95
Sustituimos n = 12, r = 0.0375
Obtenemos: TAE = 3,82%

112. Una persona deposita anualmente 720 € durante 30 años y se le garantiza un 7% de interés. ¿Qué capital tendrá al cabo de los 30 años?

Solución:
Introducimos la fórmula:
a(1+r)((1+r)^t–1)/r
Sustituimos a = 720, r = 0.07, t = 30
Obtenemos: 72 772,59 €

113. Calcula la mensualidad que hay que pagar para devolver 60 000 € al 5,5% de interés compuesto durante 10 años.

Solución:
Seleccionamos la fórmula del ejercicio 97
Sustituimos d = 60 000, r = 0.055, t = 10
Obtenemos: 651,16 €

114. Calcula la mensualidad de amortización de un crédito de 48 000 € al 6% de interés durante 10 años.

Solución:
Seleccionamos la fórmula del ejercicio 97
Sustituimos d = 48 000, r = 0.06, t = 10
Obtenemos: 532,90 €

3 Ecuaciones e inecuaciones

1. Ecuaciones de 1^{er} y 2° grado

■ Piensa y calcula

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

a) $x + 3 = 5$ b) $3x = 12$ c) $x^2 = 25$ d) $x(x - 7) = 0$ e) $5x^2 = 0$ f) $|x| = 7$

Solución:

a) $x = 2$ b) $x = 4$ c) $x = \pm 5$ d) $x = 0, x = 7$ e) $x = 0$ f) $x = \pm 7$

● Aplica la teoría

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3x - 1}{4} - \frac{6x + 5}{8} + 2 = 2x + \frac{1}{8}$

b) $\frac{4x - 3}{12} - \frac{5x + 3}{6} + 10 = 3x - \frac{5x - 2}{4} - \frac{5}{2}$

Solución:

a) $x = 1/2$ b) $x = 5$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + x - 6 = 0$ b) $x^2 - 10x + 25 = 0$

c) $6x^2 + 5x - 4 = 0$ d) $2x^2 + 7x - 15 = 0$

Solución:

a) $x_1 = 2, x_2 = -3$ b) $x_1 = x_2 = 5$

c) $x_1 = 1/2, x_2 = -4/3$ d) $x_1 = 3/2, x_2 = -5$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 - 12 = 0$ b) $2x^2 + 6x = 0$

c) $4x^2 - 9 = 0$ d) $5x^2 + 7x = 0$

Solución:

a) $x_1 = 2, x_2 = -2$ b) $x_1 = 0, x_2 = -3$

c) $x_1 = 3/2, x_2 = -3/2$ d) $x_1 = 0, x_2 = -7/5$

4. Sin resolver las siguientes ecuaciones, halla cuántas raíces tienen:

a) $2x^2 - 7x - 15 = 0$ b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

c) $x^2 - 4x + 13 = 0$ d) $6x^2 - 7x + 3 = 0$

Solución:

a) $\Delta = 169 > 0$

Tiene dos raíces reales y distintas.

b) $\Delta = 0$

Tiene una sola raíz real, que es doble.

c) $\Delta = -36 < 0$

No tiene raíces reales.

d) $\Delta = -23 < 0$

No tiene raíces reales.

5. Halla la descomposición factorial de los siguientes trinomios de 2° grado:

a) $x^2 + 5x - 14$ b) $6x^2 - x - 2$

c) $3x^2 - 10x + 3$ d) $5x^2 + 24x - 5$

Solución:

a) $(x - 2)(x + 7)$

b) $6(x - 2/3)(x + 1/2)$

c) $3(x - 3)(x - 1/3)$

d) $5(x + 5)(x - 1/5)$

6. Halla un número sabiendo que dicho número más su mitad y menos su sexta parte es igual a16

Solución:

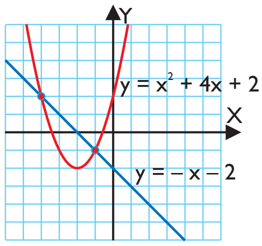
$x + x/2 - x/6 = 16$

$x = 12$

2. Aplicaciones de las ecuaciones de 2° grado

Piensa y calcula

Observando la representación gráfica, calcula las soluciones del sistema: $\left.\begin{array}{l} y = -x - 2 \\ y = x^2 + 4x + 2 \end{array}\right\}$



Solución:

$x_1 = -4, y_1 = 2 \quad x_2 = -1, y_2 = -1$

Aplica la teoría

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

c) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

d) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

Solución:

a) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3, x_4 = -3$

b) $x_1 = 2, x_2 = -2$

c) $x_1 = 1, x_2 = 2$

d) $x_1 = 1, x_2 = -2$

8. Resuelve las ecuaciones racionales:

a) $\dfrac{2x+3}{x-1} - 5 = \dfrac{5x-4}{x+1}$

b) $\dfrac{x-2}{x} = \dfrac{4x-3}{x-2}$

c) $\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{3x-1}{x+1} = -\dfrac{2}{3}$

d) $\dfrac{3x-1}{x+2} + \dfrac{x}{x-2} = -\dfrac{1}{5}$

Solución:

a) $x_1 = 2, x_2 = -1/4$ b) $x_1 = 1, x_2 = -4/3$

c) $x_1 = 3, x_2 = -1/4$ d) $x_1 = 1/3, x_2 = 6/7$

9. Resuelve las ecuaciones irracionales:

a) $3x + \sqrt{17 - 4x} = 4x + 1$

b) $3 - x + \sqrt{3x + 12} = x + 8$

c) $\sqrt{2x + 6} - \sqrt{x - 1} = 2$

d) $\sqrt{5x + 1} = 5 - \sqrt{x - 2}$

Solución:

a) $x = 2$ b) $x = -1$ c) $x = 5$ d) $x = 3$

10. Halla un número sabiendo que dicho número más su inverso es igual a 26/5

Solución:

$x + 1/x = 26/5 \Rightarrow x = 5, x = 1/5$

11. Halla un número, sabiendo que el número menos la raíz cuadrada, de dicho número al cuadrado menos 7 unidades, es igual a uno.

Solución:

$x - \sqrt{x^2 - 7} = 1$

$x = 4$

3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Piensa y calcula

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

a) $2^x = 8$ b) $2^x = 1/8$ c) $2^x = 1$ d) $2^x = 2$

e) $\log_5 x = 3$ f) $\log_5 x = -3$ g) $\log_5 x = 0$ h) $\log_5 x = 1$

Solución:

a) $x = 3$ b) $x = -3$ c) $x = 0$ d) $x = 1$

e) $x = 125$ f) $x = 1/125$ g) $x = 1$ h) $x = 5$

Aplica la teoría

12. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

a) $2^x + 2^{x+1} = 24$

b) $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

c) $5^{x-2} - 3^{x+1} = 0$

d) $\log (x + 3) + \log x = 1$

Solución:

a) $x = 3$ b) $x_1 = 0, x_2 = 2$

c) $x = 8{,}45$ d) $x = 2$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

a) $4 \log x + 1 = \log 16 + \log 5x$

b) $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$

c) $5^{x-1} + 5^x + 5^{x+1} = 31$

d) $6^{x-3} - 5^{x+4} = 0$

Solución:

a) $x = 2$ b) $x_1 = 3, x_2 = 1$

c) $x = 1$ d) $x = 64{,}79$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

a) $4^{x+1} - 7^{x-1} = 0$

b) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 39$

c) $\log_2 (2x + 5) - \log_2 x + \log_2 3 = \log_2 11$

d) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

Solución:

a) $4^{x+1} = 7^{x-1}$

$(x + 1) \log 4 = (x - 1) \log 7$

$x = 5{,}95$

b) $\dfrac{3^x}{3} + 3^x + 3 \cdot 3^x = 39$

$13 \cdot 3^x = 117$

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$

$x = 2$

c) $\dfrac{(2x + 5) \cdot 3}{x} = 11$

$x = 3$

d) $5^x = z$

$z^2 - 6z + 5 = 0$

$z_1 = 5, z_2 = 1$

$z_1 = 5 \Rightarrow 5^x = 5 \Rightarrow x = 1$

$z_2 = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow x = 0$

15. En la fórmula del capital final, en el interés compuesto $C = c(1 + r)^t$, donde **C** es el capital final, **c** el capital inicial, **r** el tanto por uno y **t** el número de años,. Calcula el número de años que tienen que transcurrir para que un capital de 10 000 € colocado al 5 % se transforme en 15 000 €

Solución:

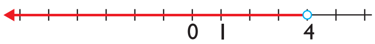
$10\,000 \cdot 1{,}05^t = 15\,000$

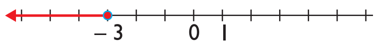
$t = 8{,}3$ años

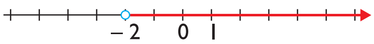
4. Inecuaciones de 1er grado

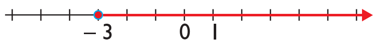
Piensa y calcula

Halla los intervalos correspondientes a los siguientes gráficos:

a) 

b) 

c) 

d) 

Solución:

a) $(-\infty, 4)$ b) $(-\infty, -3]$ c) $(-2, +\infty)$ d) $[-3, +\infty)$

Aplica la teoría

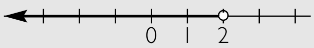
16. Resuelve las siguientes inecuaciones de 1er grado:

a) $4x + 5 < 3x + 7$ b) $2(x - 3) + 1 > 5x + 4$

c) $5(2x - 1) - 7x \leq \dfrac{x + 5}{2}$ d) $\dfrac{3x + 4}{2} - 4 \geq \dfrac{7x - 6}{3}$

Solución:

a) $x < 2$

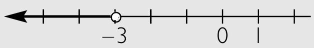


b) $2x - 6 + 1 > 5x + 4$

$-3x > 9$

$3x < -9$

$x < -3$

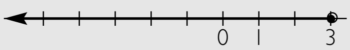


c) $10(2x - 1) - 14x \leq x + 5$

$20x - 10 - 14x \leq x + 5$

$5x \leq 15$

$x \leq 3$

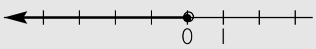


d) $3(3x + 4) - 24 \geq 2(7x - 6)$

$9x + 12 - 24 \geq 14x - 12$

$-5x \geq 0$

$x \leq 0$



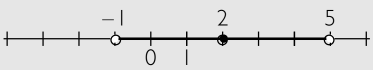
17. Resuelve las siguientes inecuaciones con valor absoluto:

a) $|x - 2| < 3$ b) $|4x + 1| > 5$

c) $|2x + 5| \leq 3$ d) $|5x - 3/2| \geq 1$

Solución:

a) Es un entorno, E(2, 3), de centro 2 y radio 3

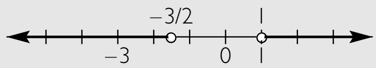


$(-1, 5)$

b) Se divide entre 4

$|x + 1/4| > 5/4$

Es lo que queda fuera del entorno, E(–1/4, 5/4), de centro –1/4 y radio 5/4

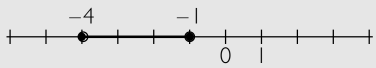


$(-\infty, -3/2) \cup (1, +\infty)$

c) Se divide entre 2

$|x + 5/2| \leq 3/2$

Es el entorno, E(–5/2, 3/2), de centro –5/2 y radio 3/2, incluyendo los extremos.

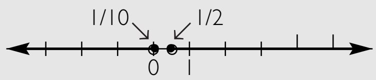


$[-4, -1]$

d) Se divide entre 5

$|x - 3/10| \geq 1/5$

Es lo que queda fuera del entorno, E(3/10, 1/5), de centro 3/10 y radio 1/5



$(-\infty, 1/10] \cup [1/2, +\infty)$

18. Dada la función $f(x) = -2x + 3$, halla:

a) cuándo vale cero.

b) cuándo es positiva.

c) cuándo es negativa.

d) Represéntala para comprobarlo.

Solución:

a) $-2x + 3 = 0$

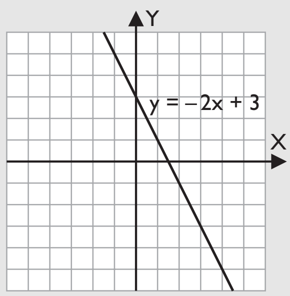
$x = 3/2$

b) $-2x + 3 > 0$

$x < 3/2$

c) $-2x + 3 < 0$

$x > 3/2$

d) 

19. El perímetro de un cuadrado es menor o igual que 25 m. Calcula cuánto puede medir el lado.

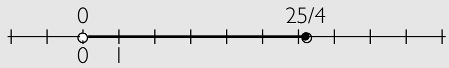
Solución:

$0 < 4x \leq 25$

Dividiendo entre 4

$0 < x \leq 25/4$

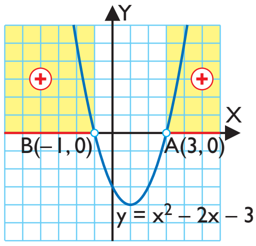
Es el intervalo semiabierto $(0, 25/4]$



5. Inecuaciones polinómicas y racionales

Piensa y calcula

Observando la gráfica, halla los intervalos de los valores de **x** en los que la parábola $y = x^2 - 2x - 3$ es positiva.



Solución:

Positiva (+) : $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

Aplica la teoría

20. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas:

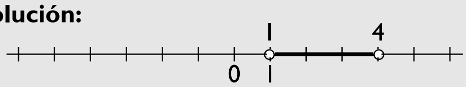
a) $x^2 - 5x + 4 < 0$

b) $x^2 + x + 2 > 0$

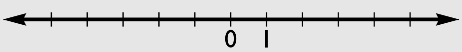
c) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$

d) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \geq 0$

Solución:

a) 

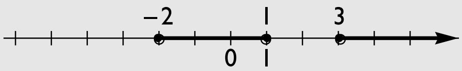
$(1, 4)$

b) 

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

c) 

$x = -3$

d) 

$[-2, 1] \cup [3, +\infty)$

21. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales:

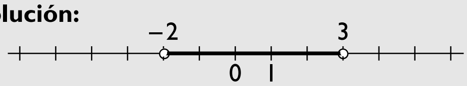
a) $\dfrac{x+2}{x-3} < 0$

b) $\dfrac{x^2-3x}{x-1} > 0$

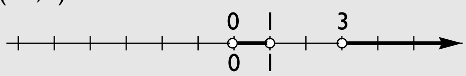
c) $\dfrac{x}{x^2-4} \leq 0$

d) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-6} \geq 0$

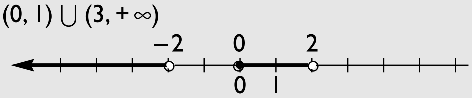
Solución:

a) 

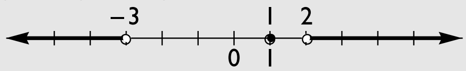
$(-2, 3)$

b) 

$(0, 1) \cup (3, +\infty)$

c) 

$(-\infty, -2) \cup [0, 2)$

d) 

$(-\infty, -3) \cup \{1\} \cup (2, +\infty)$

22. Dada la función $f(x) = -x^2 + 6x - 8$, halla:

a) cuándo vale cero.

b) cuándo es positiva.

c) cuándo es negativa.

Solución:

a) $x_1 = 2, x_2 = 4$

b) $(2, 4)$

c) $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

23. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4}$, halla:

a) cuándo vale cero.

b) cuándo es positiva.

c) cuándo es negativa.

Solución:

a) $x_1 = 0, x_2 = 1$

b) $(-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$

c) $(-2, 0) \cup (1, 2)$

6. Resolución de problemas

Piensa y calcula

Halla mentalmente tres números enteros consecutivos menores que 7, de forma que sean los lados de un triángulo rectángulo.

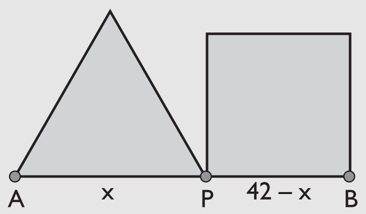
Solución:

3, 4 y 5, ya que $3^2 + 4^2 = 5^2$

Aplica la teoría

24. Un segmento AB tiene de longitud 42 cm. Halla un punto P de dicho segmento de forma que el triángulo equilátero construido sobre AP tenga el mismo perímetro que el cuadrado construido sobre PB.

Solución:



Medida de los segmentos:

AP = x, PB = 42 – x

$3x = 4(42 - x)$

$x = 24$ cm

25. Entre Sonia y Alba tienen 300 €. Alba tiene el triple de dinero que Sonia. ¿Cuánto dinero tiene cada una?

Solución:

Sonia tiene: x

Alba tiene: 300 – x

$300 - x = 3x$

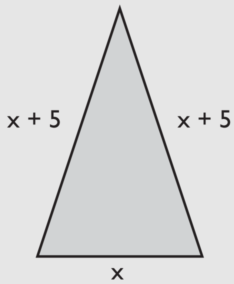
$x = 75$ €

Sonia tiene: 75 €

Alba tiene: 225 €

26. En un triángulo isósceles, cada uno de los lados iguales mide 5 m más que el desigual. Si el perímetro mide 34 m, ¿cuánto mide cada lado?

Solución:



El lado desigual: x

Cada lado igual: $x + 5$

$x + 2(x + 5) = 34$

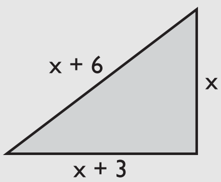
$x = 8$ m

El lado desigual mide 8 m

Cada lado igual mide 13 m

27. Los lados de un triángulo rectángulo son números que se diferencian en tres unidades. Calcula las longitudes de dichos lados.

Solución:



Cateto menor: x

Cateto mayor: $x + 3$

Hipotenusa: $x + 6$

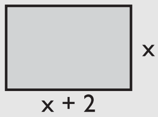
$x^2 + (x + 3)^2 = (x + 6)^2$

Si $x = 9$, los lados miden: 9, 12 y 15

Si $x = -3$, los lados miden: -3, 0 y 3, que no son valores válidos.

28. Un piso tiene forma rectangular y su área es de 120 m^2. Si el largo mide 2 m más que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del piso?

Solución:



Ancho: x

Largo: $x + 2$

$x(x + 2) = 120$

Si $x = 10$, el ancho es 10 m y el largo 12 m

Si $x = -12$, los lados son -12 y 10, que no son valores válidos.

Ejercicios y problemas

1. Ecuaciones de 1er y 2° grado

29. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 25$

b) $\frac{2x-3}{4} - \frac{5x+1}{6} = \frac{1}{12} - 2x$

c) $\frac{3x-1}{6} - \frac{2x+5}{8} = 4x - \frac{8}{3}$

d) $-\frac{2x-5}{3} + \frac{-3x+7}{5} + 2x = \frac{8}{5}$

Solución:

a) $x = 12$ b) $x = 3/5$

c) $x = 1/2$ d) $x = -2$

30. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 3x - 10 = 0$ b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $3x^2 - 7x - 6 = 0$ d) $6x^2 + 7x + 2 = 0$

Solución:

a) $x_1 = 2, x_2 = -5$

b) $x_1 = x_2 = 3$

c) $x_1 = 3, x_2 = -2/3$

d) $x_1 = -1/2, x_2 = -2/3$

31. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - 20 = 0$ b) $3x^2 + 6x = 0$

c) $9x^2 - 25 = 0$ d) $3x^2 - 8x = 0$

Solución:

a) $x_1 = 2, x_2 = -2$

b) $x_1 = 0, x_2 = -2$

c) $x_1 = 5/3, x_2 = -5/3$

d) $x_1 = 0, x_2 = 8/3$

32. Sin resolver las siguientes ecuaciones, halla cuántas raíces tienen:

a) $x^2 + 10x + 25 = 0$ b) $3x^2 + 8x - 3 = 0$

c) $x^2 - 6x + 13 = 0$ d) $x^2 + 8x + 15 = 0$

Solución:

a) $\Delta = 0$

Tiene una sola raíz real, que es doble.

b) $\Delta = 100 > 0$

Tiene dos raíces reales y distintas.

c) $\Delta = -16 < 0$

No tiene raíces reales.

d) $\Delta = 4 > 0$

Tiene dos raíces reales y distintas.

33. Halla la descomposición factorial de los siguientes trinomios de 2° grado:

a) $x^2 - x - 6$ b) $9x^2 + 12x + 4$

c) $2x^2 - 9x - 5$ d) $6x^2 - 5x - 6$

Solución:

a) $(x + 2)(x - 3)$ b) $9(x + 2/3)^2$

c) $2(x - 5)(x + 1/2)$ d) $6(x - 3/2)(x + 2/3)$

34. Halla ecuaciones de 2° grado que tengan las siguientes raíces:

a) $x_1 = -3, x_2 = 1$ b) $x_1 = -2, x_2 = 3$

c) $x_1 = -1/2, x_2 = 5$ d) $x_1 = 3, x_2 = 3/4$

Solución:

a) $(x + 3)(x - 1) = x^2 + 2x - 3$

b) $(x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$

c) $2(x + 1/2)(x - 5) = 2x^2 - 9x - 5$

d) $4(x - 3)(x - 3/4) = 4x^2 - 15x + 9$

35. Sin resolver las siguientes ecuaciones, halla la suma y el producto de sus raíces:

a) $x^2 + 2x - 8 = 0$ b) $x^2 - 7x + 10 = 0$

c) $15x^2 + x - 2 = 0$ d) $4x^2 - 19x - 5 = 0$

Solución:

a) $S = -2, P = -8$ b) $S = 7, P = 10$

c) $S = -1/15, P = -2/15$ d) $S = 19/4, P = -5/4$

2. Aplicaciones de las ecuaciones de 2° grado

36. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

c) $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$

d) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Solución:

a) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 3, x_4 = -3$

b) $x_1 = 2, x_2 = -2$

c) $x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5}$

d) $x_1 = 2, x_2 = -1$

37. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{5x-1}{x+1} - \frac{2x+3}{x} = \frac{21}{2}$

b) $12 + \sqrt{3x + 10} = 2x + 7$

c) $3x - \frac{2x - 1}{x + 3} = \frac{3}{2}$

d) $\sqrt{x + 6} + 4 = 6 + \sqrt{2x - 5}$

Solución:

a) $x_1 = -2, x_2 = -1/5$

b) $x = 5$

c) $x_1 = 1/2, x_2 = -7/3$

d) $x = 3$

38. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x - \sqrt{x + 2} = 3x + 2$

b) $\frac{7x - 3}{x + 2} - \frac{5x + 1}{x - 2} + 8 = \frac{5}{3}$

c) $\sqrt{x + 9} + \sqrt{x} = 9$

d) $\frac{2x + 3}{x - 3} - \frac{x}{x + 3} = \frac{5x + 2}{x^2 - 9} - 5$

Solución:

a) $x = 2$ | b) $x_1 = 4, x_2 = -16/25$

c) $x = 16$ | d) $x_1 = 2, x_2 = -19/6$

3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

39. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

a) $3^x + 3^{x - 1} = 12$

b) $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$

c) $2^{x + 1} = 3^{x - 1}$

d) $\log (x + 3) - \log (x - 2) + 2 \log 5 = 2$

Solución:

a) $x = 2$ | b) $x_1 = 3, x_2 = 1$

c) $x = 4{,}42$ | d) $x = 11/3$

40. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

a) $3^{x + 2} - 4^{x - 3} = 0$

b) $5^{x + 2} - 4 \cdot 5^{x + 1} - 8 \cdot 5^{x - 1} = 85$

c) $\log_3 (5x + 2) - \log_3 (2x - 1) = 1$

d) $4 \cdot 2^{2x} - 33 \cdot 2^x + 8 = 0$

Solución:

a) $x = 22{,}09$ | b) $x = 2$

c) $x = 5$ | d) $x_1 = 3, x_2 = -2$

41. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

a) $L\, x + L\, (x + 1) - L\, 2 = L\, 3$

b) $3 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$

c) $2^{x - 2} + 2^{x - 1} + 2^x + 2^{x + 1} = 30$

d) $5^{x - 2} - 4^{x + 1} = 0$

Solución:

a) $x = 2$ | b) $x_1 = 2, x_2 = -1$

c) $x = 3$ | d) $x = 20{,}64$

42. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

a) $4^{x + 1} - 7^{x - 1} = 0$

b) $3^{x - 1} + 3^x + 3^{x + 1} = 39$

c) $\log_2 (2x + 5) - \log_2 x + \log_2 3 = \log_2 11$

d) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

Solución:

a) $x = 5{,}95$ | b) $x = 2$

c) $x = 3$ | d) $x_1 = 0, x_2 = 1$

4. Inecuaciones de 1^er^ grado

43. Resuelve las siguientes inecuaciones de 1^er^ grado:

a) $5x + 7 < 3x + 6$

b) $3(x - 2) + 7 > 5x - 2$

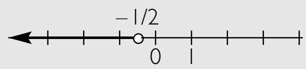
c) $2(x - 1) + \frac{5x}{2} \le \frac{3x - 2}{4}$

d) $\frac{2x + 1}{4} + \frac{3x}{2} \ge \frac{5x - 1}{6}$

Solución:

a) $2x < -1$

$x < -1/2$

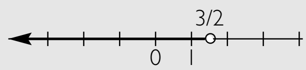


b) $3x - 6 + 7 > 5x - 2$

$-2x > -3$

$2x < 3$

$x < 3/2$

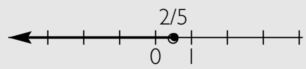


c) $8(x - 1) + 10x \le 3x - 2$

$8x - 8 + 10x \le 3x - 2$

$15x \le 6$

$x \le 2/5$

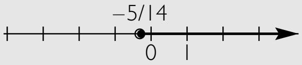


d) $3(2x + 1) + 18x \geq 2(5x - 1)$

$6x + 3 + 18x \geq 10x - 2$

$14x \geq -5$

$x \geq -5/14$



44. Resuelve las siguientes inecuaciones con valor absoluto:

a) $|x + 1| < 2$

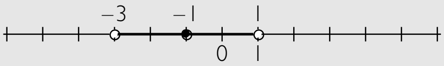
b) $|-3x + 5| > 1$

c) $|3x - 6| \leq 5$

d) $|-2x - 6| \geq 3$

Solución:

a) Es un entorno, $E(-1, 2)$, de centro -1 y radio 2

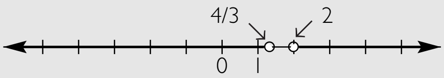


$(-3, 1)$

b) Se tiene en cuenta que $|-3x + 5| = |3x - 5|$ y se divide entre 3

$|x - 5/3| > 1/3$

Es lo que queda fuera del entorno, $E(5/3, 1/3)$, de centro 5/3 y radio 1/3

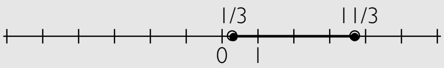


$(-\infty, 4/3) \cup (2, +\infty)$

c) Se divide entre 3

$|x - 2| \leq 5/3$

Es el entorno, $E(2, 5/3)$, de centro 2 y radio 5/3, incluyendo los extremos

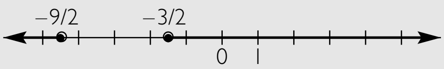


$[1/3, 11/3]$

d) Se tiene en cuenta que $|-2x - 6| = |2x + 6|$ y se divide entre 2

$|x + 3| \geq 3/2$

Es lo que queda fuera del entorno, $E(-3, 3/2)$, de centro -3 y radio 3/2



$(-\infty, -9/2] \cup [-3/2, +\infty)$

45. Dada la función $f(x) = 2x - 5$, halla:

a) cuándo vale cero.

b) cuándo es positiva.

c) cuándo es negativa.

d) Represéntala para comprobarlo.

Solución:

a) $2x - 5 = 0$

$x = 5/2$

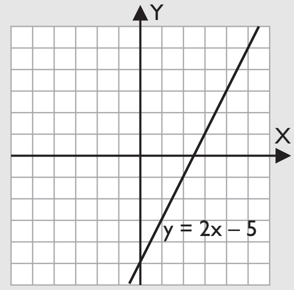
b) $2x - 5 > 0$

$x > 5/2$

c) $2x - 5 < 0$

$x < 5/2$

d)



46. El perímetro de un triángulo equilátero es menor o igual que 15 m. Calcula cuánto puede medir el lado.

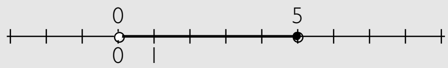
Solución:

$0 < 3x \leq 15$

Dividiendo entre 3

$0 < x \leq 5$

Es el intervalo semiabierto $(0, 5]$



5. Inecuaciones polinómicas y racionales

47. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas:

a) $x^2 - x - 2 < 0$

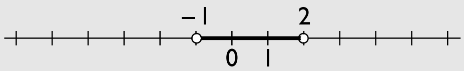
b) $x^2 - x - 6 > 0$

c) $-x^2 + 4x - 4 \leq 0$

d) $x^2 - 4 \geq 0$

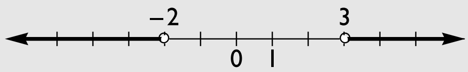
Solución:

a)



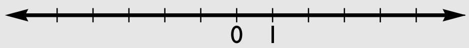
$(-1, 2)$

b)



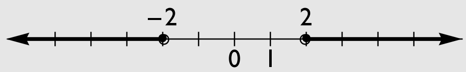
$(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

c)



$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

d)



$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

48. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales:

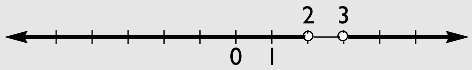
a) $\dfrac{x - 2}{3 - x} < 0$

b) $\dfrac{x + 3}{x^2 - x} > 0$

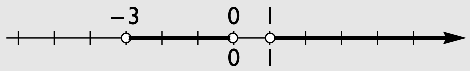
c) $\dfrac{x^2 + 2}{x - 3} \leq 0$

d) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x + 1} \geq 0$

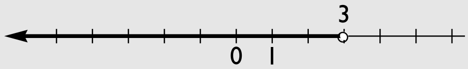
Solución:

a) 

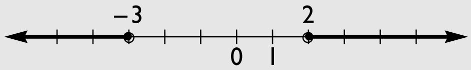
$(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

b) 

$(-3, 0) \cup (1, +\infty)$

c) 

$(-\infty, 3)$

d) 

$(-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

49. Dada la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, halla:

a) cuándo vale cero.

b) cuándo es positiva.

c) cuándo es negativa.

Solución:

a) $x_1 = 3, x_2 = -1$

b) $(-1, 3)$

c) $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

50. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 9}$, halla:

a) cuándo vale cero.

b) cuándo es positiva.

c) cuándo es negativa.

Solución:

a) $x_1 = -1, x_2 = 1$

b) $(-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$

c) $(-3, -1) \cup (1, 3)$

6. Resolución de problemas

51. Ismael tiene tres años más que Ana, y Sonia tiene 2 años más que Ismael. Entre los tres tienen 53 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Solución:

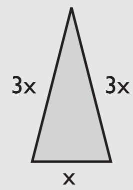
Ana: x	Ismael: $x + 3$	Sonia: $x + 5$

$x + x + 3 + x + 5 = 53 \Rightarrow x = 15$

Ana: 15 años.	Ismael: 18 años.	Sonia: 20 años.

52. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles mide el triple que el lado desigual. Si el perímetro mide 42 m, ¿cuánto mide cada lado?

Solución:



El lado desigual: x

Cada lado igual: $3x$

$x + 2 \cdot 3x = 42$

$x = 6$ m

El lado desigual mide 6 m

Cada lado igual mide 18 m

53. Se mezcla café del tipo A de 5,5 €/kg con café del tipo B de 4 €/kg para obtener una mezcla de 90 kg a 5 €/kg. ¿Cuántos kilogramos de café debemos tomar de cada tipo?

Solución:

Café de tipo A: x a 5,5 €/kg

Café de tipo B: $90 - x$ a 4 €/kg

$5{,}5x + 4(90 - x) = 5 \cdot 90$

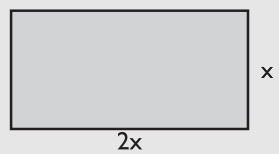
$x = 60$ kg

Café de tipo A: 60 kg

Café de tipo B: 30 kg

54. Halla las longitudes de los lados de un rectángulo sabiendo que el largo es el doble que el ancho y que la superficie mide 50 m^2

Solución:



Ancho: x

Largo: $2x$

$x \cdot 2x = 50$

Si $x = 5$, el ancho mide 5 m y el largo mide 10 m

Si $x = -5$, se obtienen valores no válidos.

55. Un frutero compra una caja de plátanos a 0,8 €/kg. Se le estropean 3 kg, que tira a la basura, y el resto los vende a 1,2 €. Si gana 18 €, ¿cuántos kilogramos de plátanos contenía la caja inicialmente?

Solución:

Compra: x kg a 0,8 €/kg

Vende: $x - 3$ a 1,2 €/kg

$0{,}8x + 18 = (x - 3)1{,}2$

$x = 54$ kg

Para ampliar

56. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 3x^2 = 0$

b) $x^6 - 27x^3 = 0$

c) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

d) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

Solución:

a) $x_1 = x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3}, x_4 = -\sqrt{3}$

b) $x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 3$

c) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = \sqrt{3}, x_4 = -\sqrt{3}$

d) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1/2, x_4 = -1/2$

57. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

a) $x(x + 3) = 0$

b) $(x + 1)(x - 5) = 0$

c) $x(x + 2)(3x - 6) = 0$

d) $x(x - 1)(2x + 5) = 0$

Solución:

a) $x_1 = 0, x_2 = -3$

b) $x_1 = -1, x_2 = 5$

c) $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$

d) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -5/2$

58. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 = 0$ b) $x^2 - 9 = 0$

c) $x^2 - 4x = 0$ d) $3x^2 - 7x = 0$

Solución:

a) $x_1 = x_2 = 0$ b) $x_1 = 3, x_2 = -3$

c) $x_1 = 0, x_2 = 4$ d) $x_1 = 0, x_2 = 7/3$

59. Halla mentalmente la descomposición factorial de los siguientes trinomios de 2º grado:

a) $x^2 - 7x$ b) $x^2 + 12x + 36$

c) $x^2 - 25$ d) $x^2 - 14x + 49$

Solución:

a) $x(x - 7)$ b) $(x + 6)^2$

c) $(x + 5)(x - 5)$ d) $(x - 7)^2$

60. Halla ecuaciones de 2º grado que tengan las siguientes raíces:

a) $x_1 = 2, x_2 = -5$

b) $x_1 = -1, x_2 = 4$

c) $x_1 = 1/2, x_2 = 2/3$

d) $x_1 = 4, x_2 = -1/3$

Solución:

a) $(x - 2)(x + 5) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$

b) $(x + 1)(x - 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

c) $(x - 1/2)(x - 2/3) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 7x + 2 = 0$

d) $(x - 4)(x + 1/3) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 11x - 4 = 0$

61. Sin resolver las siguientes ecuaciones, halla la suma y el producto de sus raíces:

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ b) $x^2 + 3x - 10 = 0$

c) $5x^2 - 14x - 3 = 0$ d) $6x^2 + x - 2 = 0$

Solución:

a) $S = -5, P = 6$ b) $S = -3, P = -10$

c) $S = 14/5, P = -3/5$ d) $S = -1/6, P = -1/3$

62. Halla la descomposición factorial de los siguientes trinomios de 2º grado:

a) $6x^2 - 5x - 1$ b) $9x^2 - 18x + 8$

c) $15x^2 - 17x + 2$ d) $6x^2 - 5x - 6$

Solución:

a) $6(x - 1)(x + 1/6)$ b) $9(x - 2/3)(x - 4/3)$

c) $15(x - 1)(x - 2/15)$ d) $6(x - 3/2)(x + 2/3)$

63. Plantea una ecuación de segundo grado que tenga:

a) Una solución real doble.

b) Dos soluciones reales y distintas.

Solución:

a) $(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

b) $(x + 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

64. Sabiendo que la ecuación $4x^2 + kx - 9 = 0$ tiene dos raíces opuestas, halla el valor de **k**

Solución:

$k = 0$

65. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 5x^2 = 0$ b) $x^6 - 8x^3 = 0$

c) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ d) $3x^4 - 10x^2 + 3 = 0$

Solución:

a) $x_1 = x_2 = 0, x_3 = -\sqrt{5}, x_4 = \sqrt{5}$

b) $x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 2$

c) $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = \sqrt{2}, x_4 = -\sqrt{2}$

d) $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}/3, x_4 = -\sqrt{3}/3$

66. Dada la función $f(x) = |3x + 5|$, halla:

a) cuándo vale cero.

b) cuándo es positiva.

c) cuándo es negativa.

d) Represéntala para comprobarlo.

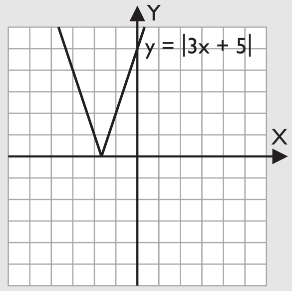
Solución:

a) $x = -5/3$

b) $\mathbb{R} - \{-5/3\} = (-\infty, -5/3) \cup (-5/3, +\infty)$

c) Nunca es negativa: $\varnothing$

d)



67. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 - 4x + 4 < 0$

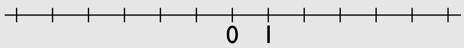
b) $x^2 - 4x + 4 > 0$

c) $x^2 - 4x + 4 \le 0$

d) $x^2 - 4x + 4 \ge 0$

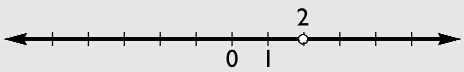
Solución:

a)



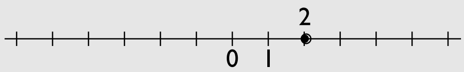
La solución es el conjunto vacío: $\varnothing$

b)



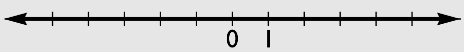
$\mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

c)



La solución es el punto: $\{2\}$

d)



La solución es toda la recta real: $\mathbb{R}$

68. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^2 + 2x + 3 < 0$

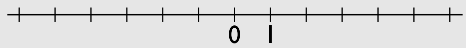
b) $x^2 + 2x + 3 > 0$

c) $x^2 + 2x + 3 \le 0$

d) $x^2 + 2x + 3 \ge 0$

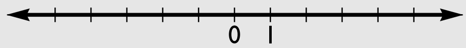
Solución:

a)



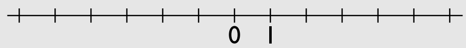
La solución es el conjunto vacío: $\varnothing$

b)



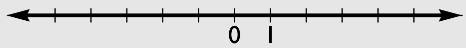
La solución es toda la recta real: $\mathbb{R}$

c)



La solución es el conjunto vacío: $\varnothing$

d)



La solución es toda la recta real: $\mathbb{R}$

69. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^3 - 4x \le 0$

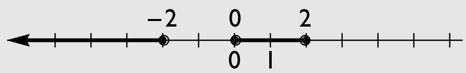
b) $x^4 - x^2 > 0$

c) $\dfrac{5}{(x-2)^3} > 0$

d) $\dfrac{9 - x^2}{x^2 - 1} \ge 0$

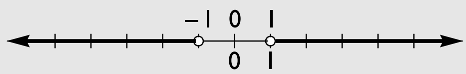
Solución:

a)



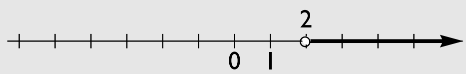
$(-\infty, -2] \cup [0, 2]$

b)



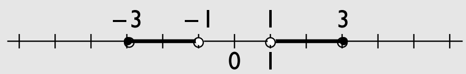
$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

c)



$(2, +\infty)$

d)



$[-3, -1) \cup (1, 3]$

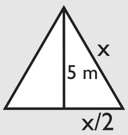
Problemas

70. Un número entero más el anterior y más el siguiente es igual a 51. ¿De qué número se trata?

Solución:
Número entero: x
Anterior: x – 1
Siguiente: x + 1
$x + x - 1 + x + 1 = 51 \Rightarrow x = 17$

71. La altura de un triángulo equilátero es de 5 m. Calcula cuánto mide el lado.

Solución:



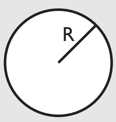
Se aplica el teorema de Pitágoras:
$(x/2)^2 + 5^2 = x^2$

$x = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ m

$x = -\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$, este valor no es válido.

72. El área de una plaza de toros mide 2 827 m². Calcula el radio de la plaza.

Solución:



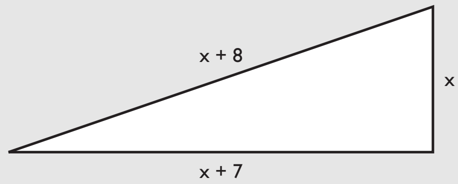
$A = \pi R^2$
$\pi R^2 = 2\,827$
$R = 30$ m
$R = -30$, este valor no es válido.

73. Halla dos números enteros consecutivos sabiendo que su producto es 156

Solución:
Un número: x
El siguiente: x + 1
$x(x + 1) = 156$
Los números pueden ser: 12 y 13, o bien – 13 y – 12

74. El cateto mayor de un triángulo rectángulo es 7 unidades más largo que el menor y una unidad menor que la hipotenusa. Calcula las dimensiones de los catetos y de la hipotenusa de dicho triángulo rectángulo.

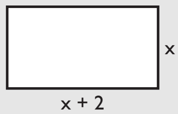
Solución:



Cateto menor: x
Cateto mayor: x + 7
Hipotenusa: x + 8
$x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2$
Si x = 5, los catetos miden 5 y 12, y la hipotenusa, 13
Si x = – 3, se obtienen valores no válidos.

75. Halla las dimensiones de una habitación rectangular de 15 m² de superficie sabiendo que es 2 metros más larga que ancha.

Solución:



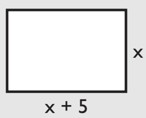
Lado menor: x
Lado mayor: x + 2
$x(x + 2) = 15$
Si x = 3, los lados miden 3 y 5 m
Si x = – 5, se obtienen valores no válidos.

76. El número de días de un año no bisiesto es igual al cuadrado de un número entero, más el cuadrado del siguiente y más el cuadrado del siguiente. ¿De qué número entero se trata?

Solución:
Nº de días de un año no bisiesto: 365
Número: x
Número siguiente: x + 1
Número siguiente del siguiente: x + 2
$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 365$
$x = 10$
$x = -12$

77. Una finca es 5 m más larga que ancha y tiene 750 m² de superficie. Calcula las dimensiones de la finca.

Solución:



Lado menor: x
Lado mayor: x + 5
$x(x + 5) = 750$
Si x = 25, los lados miden 25 y 30 m
Si x = – 30, se obtienen valores no válidos.

78. Halla un número sabiendo que si a dicho número elevado a la cuarta potencia le restamos su cuadrado, se obtiene 72

Solución:
Número: x
$x^4 - x^2 = 72$
$x = 3, x = -3$

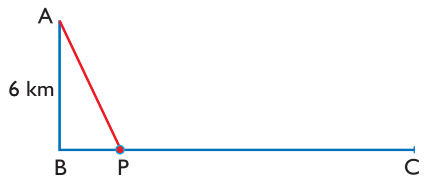
79. Halla un número sabiendo que si le sumamos su raíz cuadrada, se obtiene 30

Solución:
Número: x
$x + \sqrt{x} = 30$
$x = 25$

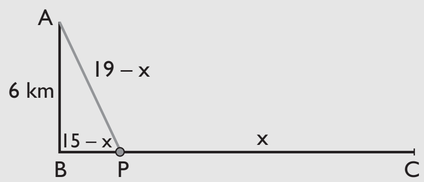
80. Halla un número sabiendo que la suma de su opuesto con su inverso es igual a 5/6

Solución:
Número: x
$-x + 1/x = 5/6$
$x = 2/3$, o bien $x = -3/2$

81. Para ir del punto A al punto C, hacemos el recorrido AP y luego PC, y andamos en total 19 km. Si la distancia de B a C es de 15 km, ¿a qué distancia de C está el punto P?



Solución:
$(15 - x)^2 + 6^2 = (19 - x)^2$
$x = 12,5$ km



82. La cantidad de un medicamento en la sangre viene dada por la fórmula $c = 50 \cdot 0,85^t$, donde **c** se mide en miligramos y **t** en horas. Si cuando la cantidad baja de 14 mg se tiene que administrar una nueva dosis, ¿cada cuánto tiempo hay que administrar las dosis? Redondea el tiempo a horas.

Solución:
$50 \cdot 0,85^t = 14$
$\log 50 + t \log 0,85 = \log 14$
$t = \dfrac{\log 14 - \log 50}{\log 0,85} = 7,8$
Cada 8 horas.

83. Un cultivo de bacterias crece según la fórmula $y = 2^{t/5}$, donde **y** es el número de miles de bacterias y **t** se mide en horas. ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que haya más de 28 000 bacterias?

Solución:
$2^{t/5} = 28\,000$
$\dfrac{t}{5} \log 2 = \log 28\,000$
$t = \dfrac{5 \cdot \log 28\,000}{\log 2} = 73,87$
Deben transcurrir casi 74 horas.

84. La longitud de la circunferencia de un árbol crece según la fórmula $c = 0,05e^{0,2t}$, donde **c** es la longitud de la circunferencia medida en metros y **t** el número de años. ¿Cuántos años tardará en medir 1 m?

Solución:
$0,05e^{0,2t} = 1$
$L\ 0,05 + 0,2t = 0$
$t = -\dfrac{L\ 0,05}{0,2} = 14,98$
Tardará casi 15 años.

85. Una determinada alga cuya superficie es de 0,5 m^2 se duplica cada semana. Se colocan cinco de estas algas en un lago de 6 km^2. ¿Cuánto tiempo tardarán en colonizar todo el lago?

Solución:
$5 \cdot 0,5 \cdot 2^t = 6 \cdot 10^6$
$\log 2,5 + t \log 2 = 6 + \log 6$
$t = \dfrac{6 + \log 6 - \log 2,5}{\log 2} = 21,19$
Tardarán aproximadamente 21 semanas.

86. La mitad de un número más su cuadrado es menor de 39. ¿Qué valores puede tomar dicho número?

Solución:
$x/2 + x^2 < 39$
Los números del intervalo abierto: $(-13/2, 6)$

87. El perímetro de un rectángulo mide 24 m. ¿Qué valores pueden tomar los lados para que la superficie sea mayor de 32 m^2?

Solución:

Base: x

Altura: 12 – x

$x(12 - x) > 32$

Los números del intervalo abierto: (4, 8)

88. Halla cuándo es positiva la función: $f(x) = -x^2 + 5x - 4$

Solución:

$-x^2 + 5x - 4 > 0$

En el intervalo: (1, 4)

89. Halla cuándo es negativa la función: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

Solución:

$\dfrac{x^2 - 4}{x} < 0$

$(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

90. En la ecuación de 2º grado $x^2 + 4x + c = 0$, determina qué valores debe tomar **c** para que:

a) tenga una sola raíz real.

b) tenga dos raíces reales.

c) no tenga raíces reales.

Solución:

$\Delta = 16 - 4c$

a) $16 - 4c = 0 \Rightarrow c = 4$

b) $16 - 4c > 0 \Rightarrow c < 4$

c) $16 - 4c < 0 \Rightarrow c > 4$

91. En una familia de tres miembros ingresan entre los tres 3 250 € al mes. La madre gana el doble que el hijo y el hijo gana el 75% del sueldo del padre. ¿Cuál es el salario de cada uno?

Solución:

Padre: x Hijo: 0,75 x Madre: 1,5 x

$x + 0{,}75x + 1{,}5x = 3\,250$

$x = 1\,000$ €

Padre: 1 000 € Hijo: 750 € Madre: 1 500 €

92. Una colección de 126 discos se ha dividido en tres partes. La primera tiene el doble de discos que la segunda, y entre las dos primeras suman la mitad de la colección. ¿Cuántos discos tiene cada parte?

Solución:

Primera: 2x

Segunda: x

$2x + x = 63$

$x = 21$

Primera: 42 discos.

Segunda: 21 discos.

Tercera: 63 discos.

93. De una cierta cantidad de dinero se ha gastado primero la mitad, y luego la tercera parte de lo que quedaba, y aún quedan 4 000 €. ¿Cuánto dinero había inicialmente?

Solución:

$\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x}{2} + 4\,000 = x$

$x = 12\,000$ €

94. Hoy la edad de un padre es 6 veces la de su hijo, y dentro de 9 años la edad del padre será el triple de la edad de su hijo. ¿Cuántos años tiene hoy cada uno?

Solución:

	Ahora	Dentro de 9 años
Hijo	x	x + 9
Padre	6x	6x + 9

$6x + 9 = 3(x + 9)$

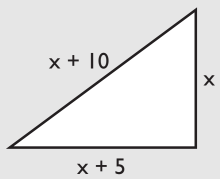
$x = 6$

La edad del hijo hoy: 6 años.

La edad del padre hoy: 36 años.

95. Los lados de un triángulo rectángulo son números que se diferencian en cinco unidades. Calcula las longitudes de dichos lados.

Solución:



Cateto menor: x

Cateto mayor: x + 5

Hipotenusa: x + 10

$x^2 + (x + 5)^2 = (x + 10)^2$

Si x = 15, los catetos miden: 15 y 20, y la hipotenusa mide 30

Si x = –5, se obtienen valores no válidos.

Para profundizar

96. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $|2x + 3| = 5$

b) $|-3x + 5| = |x - 7|$

c) $|x^2 + 5| = 9$

d) $|x^2 - 1| = 8$

Solución:

a) $2x + 3 = 5 \Rightarrow x = 1$

$2x + 3 = -5 \Rightarrow x = -4$

b) $-3x + 5 = x - 7 \Rightarrow x = 3$

$-3x + 5 = -x + 7 \Rightarrow x = -1$

c) $x^2 + 5 = 9 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$

$x^2 + 5 = -9 \Rightarrow$ No tiene solución real.

d) $x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3$

$x^2 - 1 = -8 \Rightarrow$ No tiene solución real.

97. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $|x^2 - 5x| = 6$

b) $|x^2 + 7| = 2$

c) $|x^2 - x| = 12$

d) $|2x^2 + 5x| = 3$

Solución:

a) $x^2 - 5x = 6 \Rightarrow x_1 = 6, x_2 = -1$

$x^2 - 5x = -6 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$

b) $x^2 + 7 = 2 \Rightarrow$ No tiene solución real.

$x^2 + 7 = -2 \Rightarrow$ No tiene solución real.

c) $x^2 - x = 12 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = -3$

$x^2 - x = -12 \Rightarrow$ No tiene solución real.

d) $2x^2 + 5x = 3 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 1/2$

$2x^2 + 5x = -3 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -3/2$

98. La suma de un número par más el par anterior y más el impar siguiente es 77. ¿De qué número se trata?

Solución:

Número par: $2x$

Par anterior: $2x - 2$

Impar siguiente: $2x + 1$

$2x + 2x - 2 + 2x + 1 = 77$

$x = 13$

Número par: 26   Par anterior: 24   Impar siguiente: 27

99. Halla dos números enteros consecutivos, sabiendo que su producto dividido por su suma es igual a 6/5

Solución:

Números: $x, x + 1$

$\frac{x(x + 1)}{x + x + 1} = \frac{6}{5} \Rightarrow x = 2$

Los números son: 2 y 3

Aparece también la solución $x = -3/5$, pero no es un número entero.

100. Halla dos números enteros consecutivos, sabiendo que su suma más la raíz cuadrada de su suma es igual a 30

Solución:

Números: $x, x + 1$

$x + x + 1 + \sqrt{x + x + 1} = 30 \Rightarrow x = 12$

Los números son: 12 y 13

101. La fórmula de revalorización de un sueldo viene dada por $S = s(1 + r)^t$, donde **S** es el sueldo final, **s** el sueldo inicial, **r** el tanto por uno y **t** el número de años. Calcula el número de años que tienen que transcurrir para que un sueldo anual de 20 000 €, con una revalorización del 3,5% anual, se transforme en 30 000 €

Solución:

$20\,000 \cdot 1{,}035^t = 30\,000 \Rightarrow t = 11{,}79$ años.

102. En un lago artificial se introducen 85 truchas, que se reproducen según la fórmula $N = 85e^{2t}$, donde **N** es el número de truchas y **t** el número de años. ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que haya más de un millón de truchas?

Solución:

$85e^{2t} = 1\,000\,000 \Rightarrow t = 4{,}69$ años.

103. La población de una ciudad viene dada por la fórmula $p = 2e^{0{,}005t}$, donde **p** es el número de millones de habitantes, y **t,** el tiempo en años. Calcula cuántos años tienen que transcurrir para que la población sea de 2,5 millones de habitantes.

Solución:

$2e^{0{,}005t} = 2{,}5$

$L\,2 + 0{,}005t = L\,2{,}5$

$t = \frac{L\,2{,}5 - L\,2}{0{,}005} = 44{,}6$

Deben transcurrir 44,6 años.

104. La población de una cierta especie animal en peligro de extinción se reduce según la fórmula $P = 5\,000 \cdot 2^{-0,3t}$, donde **P** es la población final, y **t,** el número de años. Si se considera que la extinción es inevitable si hay menos de 100 ejemplares, ¿en cuántos años se alcanzará el punto en el que se considera que la extinción es inevitable?

Solución:

$5\,000 \cdot 2^{-0,3t} = 100$

$\log 5\,000 - 0,3t \log 2 = 2$

$t = \dfrac{\log 5\,000 - 2}{0,3 \log 2} = 18,81$

Se alcanzará a los 18,81 años.

105. El polonio tiene un período de semidesintegración de 140 días, es decir, cada 140 días se transforma en la mitad de su peso. Si tenemos 200 g de polonio, ¿en cuánto tiempo se transformará en 25 g?

Solución:

$200 \cdot (1/2)^t = 25$

$\log 200 - t \log 2 = \log 25$

$t = \dfrac{\log 200 - \log 25}{\log 2} = 3$

Tiempo: $3 \cdot 140 = 420$ días.

Serán 3 períodos.

106. Halla el radio de la sección de un tronco de un árbol para que tenga 1 m^2 de área.

Solución:

$A = \pi R^2 \Rightarrow \pi R^2 = 1 \Rightarrow R = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,56 \text{ m} = 56 \text{ cm}$

107. Halla dos números impares consecutivos cuyo producto sea 323

Solución:

Números impares consecutivos: $2x + 1, 2x + 3$

$(2x + 1)(2x + 3) = 323 \Rightarrow x_1 = 8, x_2 = -10$

Los números son: 17 y 19, o bien –19 y –17

108. Se mezcla café del tipo A de 6 €/kg con café del tipo B de 4,5 €/kg para obtener una mezcla de 60 kg a 5 €/kg. ¿Cuántos kilogramos de café debemos tomar de cada tipo?

Solución:

Tipo A: x a 6 €/kg   Tipo B: 60 – x a 4,5 €/kg

$6x + 4,5(60 - x) = 60 \cdot 5 \Rightarrow x = 20$ kg

Tipo A: 20 kg   Tipo B: 40 kg

Paso a paso

109. Resuelve la ecuación y haz la representación gráfica correspondiente:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

110. Resuelve la ecuación:

$$3^{x+2} + 3^x = 90$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

111. Resuelve la ecuación:

$$\log(2x + 3) - \log x = 1$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

112. Resuelve la inecuación y haz la representación gráfica correspondiente:

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

113. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es,** elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

114. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x-2}{3} - \dfrac{x-1}{2} + 4 = x - \dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{5x-2}{3} - \dfrac{3-4x}{4} = \dfrac{47}{12}$

Solución:

a) $x = \dfrac{7}{2}$

b) $x = 2$

115. Resuelve las ecuaciones siguientes y haz la representación gráfica correspondiente:

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $9x^2 - 4 = 0$

c) $x^2 - 3x = 0$

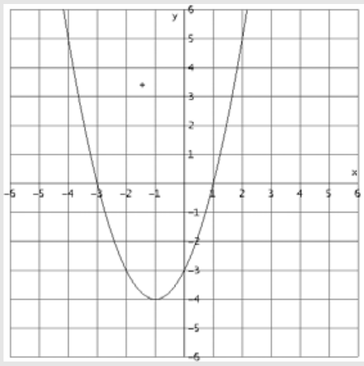
d) $x^2 - x - 2 = 0$

e) $x^2 + 6x + 9 = 0$

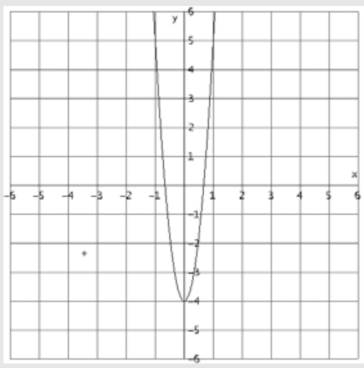
f) $x^2 - 6x + 10 = 0$

Solución:

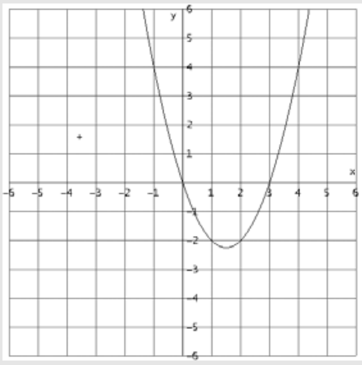
a) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$



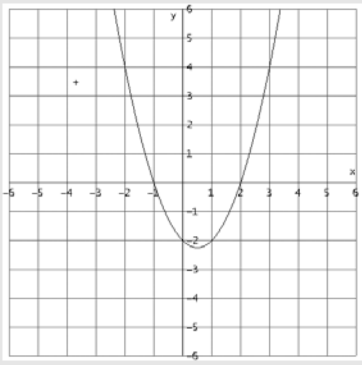
b) $x_1 = -2/3$, $x_2 = 2/3$



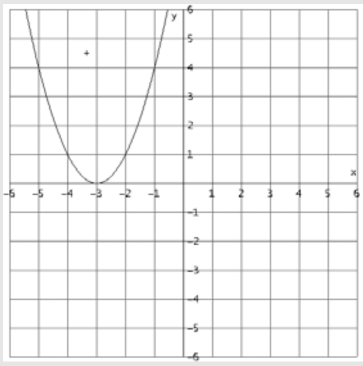
c) $x_1 = 0, x_2 = 3$



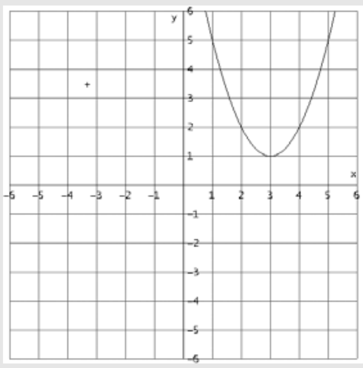
d) $x_1 = -1, x_2 = 2$



e) $x_1 = x_2 = -3$



f) No tiene raíces reales.



116. Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^2 + 3x - 10$

b) $x^2 + 5x - 14$

Solución:

a) $(x - 2)(x + 5)$

$x_1 = 2, x_2 = -5$

b) $(x - 2)(x + 7)$

$x_1 = 2, \ x_2 = -7$

117. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

c) $\dfrac{2x + 1}{x + 3} + \dfrac{x - 3}{x} = \dfrac{1}{2}$

d) $5 + \sqrt{3x + 7} = x + 6$

e) $\sqrt{2x + 6} - \sqrt{3x - 6} = 2x - 9$

Solución:

a) $x_1 = -3, x_2 = 3, x_3 = -1, x_4 = 1$

b) $x_1 = 1, x_2 = 2$

c) $x_1 = -9/5, x_2 = 2$

d) $x = 3$

e) $x = 5$

118. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3^{x+2} + 3^x = 90$

b) $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$

c) $7^{x-1} - 2^x = 0$

d) $\log (x + 3) - \log (x - 2) + 2 \log 5 = 2$

Solución:

a) $x = 2$

b) $x = 3$

c) $x = \dfrac{L\,7}{L\,(7/2)} = 1{,}553294755$

d) $x = \dfrac{11}{3} = 3{,}6667$

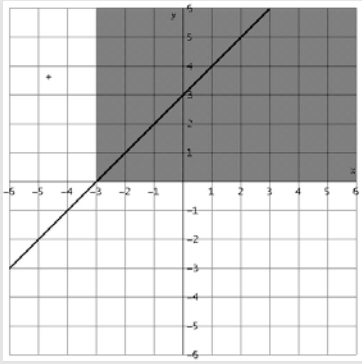
119. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $3x - 2 < 5x + 4$

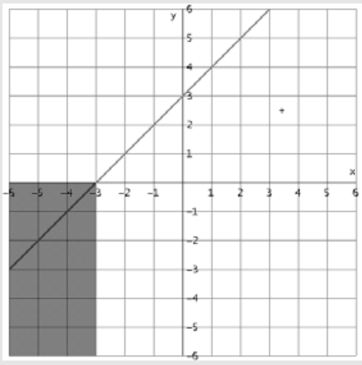
b) $2(x - 3) + 1 > 5x + 4$

Solución:

a) $x > -3$



b) $x < -3$



120. Resuelve las inecuaciones siguientes y haz la representación gráfica correspondiente:

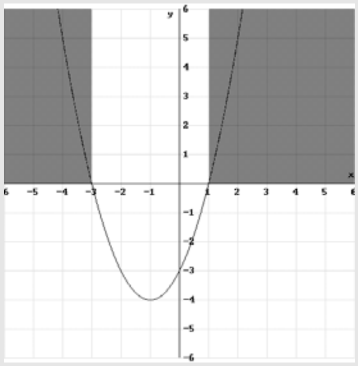
a) $x^2 + 2x - 3 > 0$

b) $\dfrac{(x + 2)(x - 3)^2}{5(x - 1)} \geq 0$

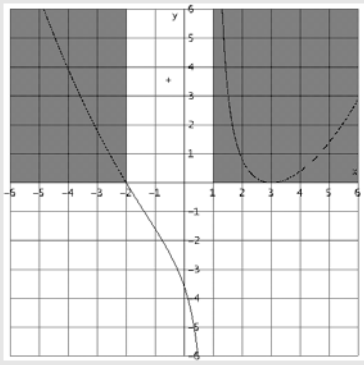
Solución:

a) $x < -3$ o $x > 1$

Son los intervalos: $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$



b) $x \leq -2$ o $x > 1$



Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE.

121. Halla las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son tres números enteros consecutivos.

Solución:

$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$

La única solución correcta es $x = 3$

Los lados miden: 3, 4 y 5 unidades.

122. Halla un número sabiendo que la suma de su raíz cuadrada y el doble de dicho número es igual a 21

Solución:

$\sqrt{x} + 2x = 21$

$x = 9$

123. Un rectángulo tiene 15 cm^2 de área y su diagonal mide $\sqrt{34}$. Calcula las dimensiones del rectángulo.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} xy = 15 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{array}\right\}$$

b) $x_1 = 3, y_1 = 5; x_2 = -3, y_2 = -5; x_3 = 5, y_3 = 3;$
$x_4 = -5, y_4 = -3$

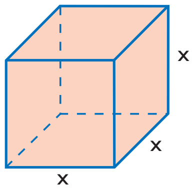
Las dimensiones del rectángulo son: 5 cm × 3 cm

4 Polinomios

1. Polinomios

Piensa y calcula

Calcula mentalmente el área y el volumen del cubo del dibujo.



Solución:
$A(x) = 6x^2$ $V(x) = x^3$

Aplica la teoría

1. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son monomios? Indica su grado.

a) $8x^4y^3$ b) $3x^{-5}y^3$
c) $7a^2b^4 + 3ab$ d) $5p^3$

Solución:
a) Monomio de grado: 4 + 3 = 7
b) No es monomio porque tiene un exponente que es negativo.
c) No es monomio; es un binomio.
d) Monomio de grado: 3

2. Escribe los términos, el grado, los coeficientes, el coeficiente principal y el término independiente de los siguientes polinomios:

a) $7x^4 - 5x^3 + 8$ b) $-9x^6 - 6x^4 + 3x^2 - 5$
c) $8x^3 - 5x^2 + 4x$ d) $-x^7 - x^6 - x^2 + 9x - 4$

Solución:
a) Términos: $7x^4, -5x^3, 8$
Grado: 4
Coeficientes: 7, –5, 8
Coeficiente principal: 7
Término independiente: 8
b) Términos: $-9x^6, -6x^4, 3x^2, -5$
Grado: 6
Coeficientes: –9, –6, 3, –5
Coeficiente principal: –9
Término independiente: –5
c) Términos: $8x^3, -5x^2, 4x$
Grado: 3
Coeficientes: 8, –5, 4
Coeficiente principal: 8
Término independiente: 0
d) Términos: $-x^7, -x^6, -x^2, 9x, -4$
Grado: 7
Coeficientes: –1, –1, –1, 9, –4
Coeficiente principal: –1
Término independiente: –4

3. Suma los siguientes polinomios:
$P(x) = 6x^5 - 4x^3 + 5x^2 - 3$
$Q(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$

Solución:
$6x^5 + 2x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 4$

4. Calcula $P(x) - Q(x)$:
$P(x) = 3x^5 + 2x^3 - 4x^2 - 6$
$Q(x) = x^5 - 5x^3 + 3x^2 + 2x$

Solución:
$2x^5 + 7x^3 - 7x^2 - 2x - 6$

5. Dados los polinomios:

$P(x) = 4x^5 + 5x^2 - 3x - 8$

$Q(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x + 7$

$R(x) = 6x^5 + 4x^3 - 5x^2 - 1$

calcula:

a) $P(x) + Q(x) + R(x)$

b) $P(x) - Q(x) - R(x)$

Solución:

a) $10x^5 + 2x^4 + x^3 - x - 2$

b) $-2x^5 - 2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x - 14$

6. Los ingresos de una empresa han seguido, en función del tiempo, **t,** el polinomio $I(t) = t^2 - 2t + 3$, y los gastos han seguido el polinomio $G(t) = t^2 - 3t + 8$. Halla el polinomio que expresa el beneficio.

Solución:

$B(t) = I(t) - G(t)$

$B(t) = t - 5$

2. Producto y división de polinomios

Piensa y calcula

Desarrolla mentalmente las siguientes potencias y productos:

a) $(x + 1)^2$ b) $(x - 3)^2$ c) $x(5x + 2)$ d) $(x + 5)(x - 5)$

Solución:

a) $x^2 + 2x + 1$ b) $x^2 - 6x + 9$ c) $5x^2 + 2x$ d) $x^2 - 25$

Aplica la teoría

7. Desarrolla los siguientes productos:

a) $4x^3(2x^2 - x + 2)$

b) $-x^2(2x^5 - 3x^2)$

c) $-4x(-x^4 - 5x^2)$

d) $x^4(-x^2 + 3)$

Solución:

a) $8x^5 - 4x^4 + 8x^3$

b) $-2x^7 + 3x^4$

c) $4x^5 + 20x^3$

d) $-x^6 + 3x^4$

8. Multiplica los polinomios:

$P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5$ $Q(x) = x^2 + x - 1$

Solución:

$4x^5 + x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 5x - 5$

9. Multiplica los polinomios:

$P(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3$ $Q(x) = 4x^3 + x^2 - 2$

Solución:

$4x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 12x^3 - x^2 - 4x + 6$

10. Divide P(x) entre Q(x) y haz la prueba.

$P(x) = 4x^5 - 6x^4 + 10x^2 + 12$

$Q(x) = x^2 - 2x - 1$

Solución:

$C(x) = 4x^3 + 2x^2 + 8x + 28$

$R(x) = 64x + 40$

Prueba: $(x^2 - 2x - 1)(4x^3 + 2x^2 + 8x + 28) + 64x + 40 =$

$= 4x^5 - 6x^4 + 10x^2 + 12$

11. Divide por Ruffini P(x) entre Q(x)

$P(x) = 3x^3 - 6x^2 + 8x + 5$ $Q(x) = x + 3$

Solución:

$C(x) = 3x^2 - 15x + 53$

$R = -154$

12. Divide por Ruffini

$P(x) = x^4 - 4x^3 + 12x + 9$ entre $Q(x) = x - 4$

Solución:

$C(x) = x^3 + 12$

$R = 57$

13. Expresa el resultado de las siguientes divisiones en la forma:

$$\frac{D}{d} = C + \frac{R}{d}$$

a) $\frac{x + 5}{x - 3}$ b) $\frac{x^3 - 5x^2 - 3}{x^2 + 3x + 1}$

Solución:

a) $\frac{x + 5}{x - 3} = 1 + \frac{8}{x - 3}$

b) $\frac{x^3 - 5x^2 - 3}{x^2 + 3x + 1} = x - 8 + \frac{23x + 5}{x^2 + 3x + 1}$

14. La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos ¿es par o impar? Razona la respuesta.

Solución:

$P(x) = x^2 + (x + 1)^2$

$P(x) = x^2 + x^2 + 2x + 1$

$P(x) = 2x^2 + 2x + 1$

$P(x) = 2(x^2 + x) + 1$

Es impar.

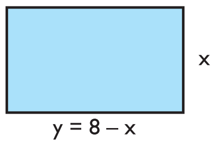
3. Teorema del resto y del factor

Piensa y calcula

En un rectángulo de 16 cm de perímetro, el área se puede expresar: $A(x) = x(8 - x)$

Calcula mentalmente el área para los siguientes valores de **x:**

x	1	2	3	4	5	6	7
A(x) = x(8 – x)							



Solución:

x	1	2	3	4	5	6	7
A(x) = x(8 – x)	7	12	15	16	15	12	7

Aplica la teoría

15. Calcula mentalmente el valor numérico del polinomio $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 3$ para los valores que se indica:

a) Para $x = 0$ b) Para $x = 1$

Solución:

a) $P(0) = -3$

b) $P(1) = 1 - 3 + 2 - 3 = -3$

16. Calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = x^5 - 2x^3 + 5x - 1$ para los valores que se indica:

a) Para $x = -1$ b) Para $x = 2$

Solución:

a) $P(-1) = -5$

b) $P(2) = 25$

17. Halla, sin hacer la división, el resto de dividir:

a) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ entre $x - 3$

b) $Q(x) = 3x^4 - 2x^3 - x - 4$ entre $x + 2$

Solución:

a) $R = P(3) = 32$

b) $R = Q(-2) = 62$

18. Halla el valor de **k** para que el resto de la siguiente división sea 2

$(x^4 + kx^3 - 4x + 2) : (x + 1)$

Solución:

Se aplica el teorema del resto y se resuelve la ecuación:

$P(-1) = 2$

$k = 5$

19. Comprueba si los números – 3, 2 y 4 son raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$

Solución:
Se aplica el teorema del factor y se calcula el valor numérico. Los que den cero son raíces.

$R = P(-3) = 0 \Rightarrow x = -3$ es raíz.

$R = P(2) = -10 \Rightarrow x = 2$ no es raíz.

$R = P(4) = 0 \Rightarrow x = 4$ es raíz.

20. Comprueba, sin hacer la división, que el polinomio $P(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$ es divisible entre $x + 3$

Solución:
$R = P(-3) = 0$

21. Halla el valor de **k** para que el polinomio $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + kx + 2$ sea divisible entre $x - 2$

Solución:
Se aplica el teorema del factor y se resuelve la ecuación:

$P(2) = 0$

$k = 5$

4. Factorización de polinomios

Piensa y calcula

Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^2 + 5x$ b) $x^2 + 2x + 1$ c) $x^2 - 6x + 9$ d) $x^2 - 16$

Solución:
a) $x(x + 5) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -5$
b) $(x + 1)^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1$
c) $(x - 3)^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 3$
d) $(x + 4)(x - 4) \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 4$

Aplica la teoría

22. Factoriza mentalmente los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 3x$ b) $x^2 - 4$
c) $x^2 - 2x + 1$ d) $x^2 + 4x + 4$

Solución:
a) $x(x + 3)$ b) $(x + 2)(x - 2)$
c) $(x - 1)^2$ d) $(x + 2)^2$

23. Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^3 - 4x$ b) $x^3 + 2x^2 + x$
c) $x^4 - 25x^2$ d) $x^3 - 6x^2 + 9x$

Solución:
a) $x(x + 2)(x - 2) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$
b) $x(x + 1)^2 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = x_3 = -1$
c) $x^2(x + 5)(x - 5) \Rightarrow x_1 = x_2 = 0, x_3 = -5, x_4 = 5$
d) $x(x - 3)^2 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = x_3 = 3$

24. Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$
b) $x^3 - x^2 - 8x + 12$

Solución:
a) $(x - 2)(x + 3)(x - 5)$
$x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = 5$
b) $(x + 3)(x - 2)^2$
$x_1 = -3, x_2 = x_3 = 2$

25. Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$
b) $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2$

Solución:
a) $(x - 1)^2(x + 2)^2$
$x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = -2$
b) $(x - 1)^2(x + 1)^2(x - 2)$
$x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = -1, x_5 = 2$

26. Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $6x^3 - 7x^2 - 14x + 8$

b) $5x^4 - 33x^3 + 66x^2 - 28x - 24$

Solución:

a) $6(x - 2)(x - 1/2)(x + 4/3)$

$x_1 = 2, x_2 = 1/2, x_3 = -4/3$

b) $5(x - 2)^2(x - 3)(x + 2/5)$

$x_1 = x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = -2/5$

27. Halla un polinomio que tenga las siguientes raíces:

a) $x_1 = 1, x_2 = 2$ b) $x_1 = 3/5, x_2 = 0$

c) $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3$ d) $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1, x_4 = 3$

Solución:

a) $(x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2$

b) $5x(x - 3/5) = 5x^2 - 3x$

c) $(x - 2)(x + 1)(x - 3) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

d) $x(x - 1)^2(x - 3) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x$

5. Fracciones algebraicas

Piensa y calcula

Factoriza mentalmente el numerador y el denominador, y simplifica la fracción algebraica $\dfrac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$

Solución:

$\dfrac{x(x + 1)}{(x + 1)^2} = \dfrac{x}{x + 1}$

Aplica la teoría

28. Descompón mentalmente en factores el numerador y el denominador, y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2 + x}{2x + 2}$ b) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

Solución:

a) $\dfrac{x\cancel{(x + 1)}}{2\cancel{(x + 1)}} = \dfrac{x}{2}$ b) $\dfrac{(x + 1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x + 1)}(x - 1)} = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

29. Completa:

a) $\dfrac{x + 3}{x^2 - 9} = \dfrac{2x + 1}{\dots}$ b) $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{\dots}{2x + 5}$

Solución:

a) $2x^2 - 5x - 3$ b) $2x^2 + 7x + 5$

30. Calcula:

a) $\dfrac{2}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 1}$ b) $\dfrac{2x}{x^2 - 4} - \dfrac{x + 1}{x + 2}$

Solución:

a) $\dfrac{3x + 1}{x^2 - 1}$ b) $\dfrac{-x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$

31. Efectúa:

a) $\dfrac{x + 2}{x - 1} \cdot \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ b) $\dfrac{x + 3}{x + 1} \cdot \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 9}$

Solución:

a) $\dfrac{x^2}{x^2 - 3x + 2}$ b) $\dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x - 3}$

32. Calcula:

a) $\dfrac{x + 2}{x + 4} : \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 16}$ b) $\dfrac{2x + 2}{x^2 + 1} : \dfrac{x^2 - 1}{3x^2 + 3}$

Solución:

a) $\dfrac{x - 4}{x - 2}$ b) $\dfrac{6}{x - 1}$

33. Opera y simplifica:

a) $\left(\dfrac{2}{x + 1} - \dfrac{1}{x - 2}\right) : \dfrac{2}{x^2 - 4x + 4}$

b) $\left(\dfrac{1}{x^2 - 9} + \dfrac{1}{x - 3}\right)\left(\dfrac{1}{x} : \dfrac{1}{x + 4}\right)$

Solución:

a) $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{2(x + 1)}$ b) $\dfrac{(x + 4)^2}{x(x^2 - 9)}$

Ejercicios y problemas

1. Polinomios

34. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son monomios? Indica su grado.

a) $4x^5y^2z$ b) $6a^{-4}b^3$ c) $p^5q^4 + 3pq$ d) $\sqrt{2}\,x^3$

Solución:

a) Monomio de grado: $5 + 2 + 1 = 8$

b) No es monomio porque tiene un exponente que es negativo.

c) No es monomio; es un binomio.

d) Monomio de grado: 3

35. Escribe los términos, el grado, los coeficientes, el coeficiente principal y el término independiente de los siguientes polinomios:

a) $5x^3 - 7x^2 + 8$ b) $-x^8 - 2x^4 + x^2 - 5$

c) $7x^4 - 9x + 3$ d) $-x^9 + x^6 - 2x^4 - 4$

Solución:

a) Términos: $5x^3, -7x^2, 8$
Grado: 3
Coeficientes: $5, -7, 8$
Coeficiente principal: 5
Término independiente: 8

b) Términos: $-x^8, -2x^4, x^2, -5$
Grado: 8
Coeficientes: $-1, -2, 1, -5$
Coeficiente principal: -1
Término independiente: -5

c) Términos: $7x^4, -9x, 3$
Grado: 4
Coeficientes: $7, -9, 3$
Coeficiente principal: 7
Término independiente: 3

d) Términos: $-x^9, x^6, -2x^4, -4$
Grado: 9
Coeficientes: $-1, 1, -2, -4$
Coeficiente principal: -1
Término independiente: -4

36. Suma los siguientes polinomios:

$P(x) = 4x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 1$

$Q(x) = x^5 + 8x^3 - 2x^2 + 4x + 2$

Solución:

$x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

37. Calcula $P(x) - Q(x)$:

$P(x) = 8x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 4$

$Q(x) = 2x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1$

Solución:

$6x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 3x + 5$

38. Dados los polinomios:

$P(x) = 7x^5 + 2x^3 - 5x - 4$

$Q(x) = 3x^4 - 7x^2 + 9x + 2$

$R(x) = x^5 + 5x^4 - 8x^2 - 5$

calcula:

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$

b) $P(x) - Q(x) + R(x)$

Solución:

a) $6x^5 - 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 3$

b) $8x^5 + 2x^4 + 2x^3 - x^2 - 14x - 11$

39. Expresa mediante una incógnita los siguientes enunciados:

a) Un número más el triple de dicho número.

b) El área de un cuadrado en función de su lado.

Solución:

a) $x + 3x = 4x$

b) $A(x) = x^2$

2. Producto y división de polinomios

40. Multiplica los polinomios:

$P(x) = x^5 - x^4 - 3x^2 + 2$

$Q(x) = 3x^4 + x^2 - 1$

Solución:

$3x^9 - 3x^8 + x^7 - 10x^6 - x^5 + 4x^4 + 5x^2 - 2$

41. Divide $P(x)$ entre $Q(x)$ y haz la prueba:

$P(x) = 4x^5 + 6x^4 - 12x^3 + 8x^2 + 2x - 4$

$Q(x) = 2x^3 - 4x + 3$

Solución:

$C(x) = 2x^2 + 3x - 2$

$R(x) = 14x^2 - 15x + 2$

Prueba:

$(2x^3 - 4x + 3)(2x^2 + 3x - 2) + 14x^2 - 15x + 2 =$

$= 4x^5 + 6x^4 - 12x^3 + 8x^2 + 2x - 4$

42. Divide $P(x)$ entre $Q(x)$:

$P(x) = 2x^8 + 4x^6 - x^5 - 3x^4 + x^2 + 4$

$Q(x) = 2x^5 - 3x^2 + x - 3$

Solución:

$C(x) = x^3 + 2x + 1$

$R = -4x^4 + 9x^3 + 2x^2 + 5x + 7$

43. Divide por Ruffini P(x) entre Q(x):

$P(x) = x^4 - 4x^2 + 5x + 6$ $\quad Q(x) = x + 1$

Solución:

$C(x) = x^3 - x^2 - 3x + 8$

$R = -2$

44. Divide por Ruffini P(x) entre Q(x):

$P(x) = 4x^3 - x^2 + x + 1$ $\quad Q(x) = x - 4$

Solución:

$C(x) = 4x^2 + 15x + 61$

$R = 245$

45. Expresa el resultado de las siguientes divisiones en la forma:

$$\frac{D}{d} = C + \frac{R}{d}$$

a) $\dfrac{x-2}{x+3}$

b) $\dfrac{x^3 - 4x + 1}{x^2 - 4x + 3}$

Solución:

a) $\dfrac{x-2}{x+3} = 1 + \dfrac{-5}{x+3}$

b) $\dfrac{x^3 - 4x + 1}{x^2 - 4x + 3} = x + 4 + \dfrac{9x - 11}{x^2 - 4x + 3}$

3. Teorema del resto y del factor

46. Calcula mentalmente el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ para los valores indicados:

a) Para $x = 0$ $\quad$ b) Para $x = 1$

Solución:

a) $P(0) = -1$ $\quad$ b) $P(1) = 1 - 3 + 4 - 1 = 1$

47. Calcula el valor numérico del polinomio

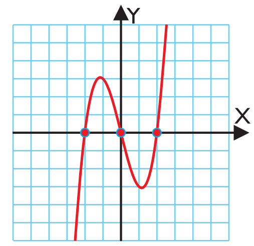
$P(x) = x^4 - 5x^2 + 3x - 2$ para los valores que se indica:

a) Para $x = 3$ $\quad$ b) Para $x = -2$

Solución:

a) $P(3) = 43$ $\quad$ b) $P(-2) = -12$

48. Observando la gráfica, calcula las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 4x$



Solución:

$x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$

49. Comprueba si los números –2, 1 y 3 son raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 7x - 6$

Solución:

Se aplica el teorema del factor y se calcula el valor numérico. Los que den cero son raíces.

$R = P(-2) = 0 \Rightarrow x = -2$ es raíz.

$R = P(1) = -12 \Rightarrow x = 1$ no es raíz.

$R = P(3) = 0 \Rightarrow x = 3$ es raíz.

50. Halla, sin hacer la división, el resto de dividir:

a) $P(x) = x^5 - 3x^2 - 7x + 3$ entre $x - 2$

b) $Q(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x - 1$ entre $x + 2$

Solución:

a) $R = P(2) = 9$ $\quad$ b) $R = Q(-2) = 65$

51. Comprueba, sin hacer la división, que el polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 11x + 20$ es divisible entre $x + 5$

Solución:

$R = P(-5) = 0$

52. Halla el valor de **k** para que el resto de la siguiente división sea 10: $(x^4 + kx^3 - 5x^2 + 6) : (x - 1)$

Solución:

Se aplica el teorema del resto y se resuelve la ecuación:

$P(1) = 10$

$k = 8$

53. Halla el valor de **k** para que el polinomio

$P(x) = 2x^3 - x^2 + kx - 4$ sea divisible entre $x - 2$

Solución:

Se aplica el teorema del factor y se resuelve la ecuación:

$P(2) = 0$

$k = -4$

54. Halla el valor de **k** para que el resto de la siguiente división sea 7:

$(x^5 + kx^2 - 7x + 1) : (x + 2)$

Solución:

Se aplica el teorema del resto y se resuelve la ecuación:

$P(-2) = 7$

$k = 6$

4. Factorización de polinomios

55. Factoriza mentalmente los siguientes polinomios:

a) $x^4 - 2x^2$ b) $x^2 - 16$

c) $x^2 + 6x + 9$ d) $x^2 - 10x + 25$

Solución:

a) $x^2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ b) $(x + 4)(x - 4)$

c) $(x + 3)^2$ d) $(x - 5)^2$

56. Factoriza mentalmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^3 - 9x$ b) $x^3 + 10x^2 + 25x$

c) $x^4 - 16x^2$ d) $x^3 - 8x^2 + 16x$

Solución:

a) $x(x + 3)(x - 3) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -3, x_3 = 3$

b) $x(x + 5)^2 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = x_3 = -5$

c) $x^2(x + 4)(x - 4) \Rightarrow x_1 = x_2 = 0, x_3 = -4, x_4 = 4$

d) $x(x - 4)^2 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = x_3 = 4$

57. Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios y calcula sus raíces:

a) $15x^3 - 8x^2 - 9x + 2$

b) $5x^3 - 2x^2 - 20x + 8$

c) $49x^3 - 28x^2 + 4x$

d) $3x^4 - x^3 - 57x^2 - 71x + 30$

Solución:

a) $15(x - 1)(x - 1/5)(x + 2/3)$

$x_1 = 1, x_2 = 1/5, x_3 = -2/3$

b) $5(x - 2)(x + 2)(x - 2/5)$

$x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 2/5$

c) $49x(x - 2/7)^2$

$x_1 = 0, x_2 = x_3 = 2/7$

d) $3(x + 2)(x + 3)(x - 5)(x - 1/3)$

$x_1 = -2, x_2 = -3, x_3 = 5, x_4 = 1/3$

58. Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^3 - 5x^2 - 2x + 10$ b) $8x^5 + 18x^4 + x^3 - 6x^2$

Solución:

a) $(x - 5)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

$x_1 = 5, x_2 = \sqrt{2}, x_3 = -\sqrt{2}$

b) $8x^2(x + 2)(x - 1/2)(x + 3/4)$

$x_1 = x_2 = 0, x_3 = -2, x_4 = 1/2, x_5 = -3/4$

59. Escribe un polinomio que tenga las siguientes raíces:

a) $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1$

b) $x_1 = x_2 = 3, x_3 = 0$

c) $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3$

d) $x_1 = 2, x_2 = x_3 = 1, x_4 = -2$

Solución:

a) $(x - 2)(x - 3)(x - 1) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

b) $(x - 3)^2 x = x^3 - 6x^2 + 9x$

c) $(x - 1)(x + 2)(x - 3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

d) $(x - 2)(x - 1)^2(x + 2) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

5. Fracciones algebraicas

60. Descompón mentalmente en factores el numerador y el denominador, y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{3x^2 - 3x}{6x - 6}$ b) $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$

Solución:

a) $\dfrac{3x(x - 1)}{6(x - 1)} = \dfrac{x}{2}$ b) $\dfrac{(x + 2)^2}{(x + 2)(x - 2)} = \dfrac{x + 2}{x - 2}$

61. Completa:

a) $\dfrac{x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{2x + 3}{\ldots}$ b) $\dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 9} = \dfrac{\ldots}{x - 3}$

Solución:

a) $2x^2 + x - 3$

b) x

62. Calcula:

a) $\dfrac{3x}{x - 2} + \dfrac{5}{x + 2}$ b) $\dfrac{x}{x^2 + 6x + 9} - \dfrac{2x + 1}{x + 3}$

Solución:

a) $\dfrac{3x^2 + 11x - 10}{x^2 - 4}$ b) $\dfrac{-2x^2 - 6x - 3}{(x + 3)^2}$

63. Efectúa:

a) $\dfrac{x + 1}{x - 1} \cdot \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1}$ b) $\dfrac{x}{x + 1} \cdot \dfrac{x - 3}{x^2}$

Solución:

a) $\dfrac{3x^2+1}{x^2-1}$ b) $\dfrac{x-3}{x^2+x}$

64. Calcula:

a) $\dfrac{x+1}{x+5} : \dfrac{x^2-1}{x^2+10x+25}$ b) $\dfrac{x+2}{x^2+1} : \dfrac{x^2+4x+4}{5x^2+5}$

Solución:

a) $\dfrac{x+5}{x-1}$ b) $\dfrac{5}{x+2}$

65. Opera y simplifica:

a) $\left(\dfrac{5x}{x-1} - \dfrac{2x+3}{x-2}\right) : \dfrac{x-5}{x-2}$

b) $\left(\dfrac{1}{2x-3} + 4\right)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-3}\right)$

Solución:

a) $\dfrac{3x^2-11x+3}{x^2-6x+5}$

b) $\dfrac{-24x+33}{2x^3-9x^2+9x}$

Para ampliar

66. Reduce a un solo monomio:

a) $5x^3 - 2x^3 + 4x^3 - x^3$

b) $5x + 2x - 4x + 4x - 3x$

c) $2ax^2 + 5ax^2 - 8ax^2 + ax^2$

d) $3k^2z + 5k^2z - 8k^2z + k^2z$

Solución:

a) $6x^3$ b) $4x$

c) 0 d) k^2z

67. Dados los polinomios:

$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 4$

$Q(x) = x^4 - x^3 + 5x^2 - 3$

$R(x) = -2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 2x + 1$

calcula :

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$

b) $Q(x) - P(x) + R(x)$

Solución:

a) $3x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 5x$

b) $-x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x - 6$

68. Dados los polinomios:

$P(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{3}{4}x^2 - 2x + 1$

$Q(x) = 2x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{2}{3}$

$R(x) = 4x^3 - x^2 + 5x + 3$

calcula :

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - R(x)$

c) $P(x) - Q(x) + R(x)$

d) $Q(x) - R(x) + P(x)$

Solución:

a) $\dfrac{5}{2}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 - 2x + \dfrac{1}{3}$

b) $\dfrac{1}{2}x^4 - 4x^3 + \dfrac{1}{4}x^2 - 7x - 2$

c) $-\dfrac{3}{2}x^4 + \dfrac{13}{3}x^3 - \dfrac{9}{4}x^2 + 3x - \dfrac{14}{3}$

d) $\dfrac{5}{2}x^4 - \dfrac{13}{3}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 - 7x - \dfrac{8}{3}$

69. Escribe, mediante una incógnita, los siguientes enunciados:

a) El cuádruplo de un número menos el triple del número más cinco.

b) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos.

Solución:

a) $4x - 3x + 5 = x + 5$

b) $x^2 + (x+1)^2 = x^2 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2x + 1$

70. Halla un polinomio tal que al dividirlo entre

$2x^3 + x^2 - 2x + 5$ se obtiene de cociente $x^2 - 5x + 3$, y de resto, $8x - 6$

Solución:

$(2x^3 + x^2 - 2x + 5)(x^2 - 5x + 3) + 8x - 6 =$

$= 2x^5 - 9x^4 - x^3 + 18x^2 - 23x + 9$

71. Aplica la regla de Ruffini: $(x^4 - 32) : (x + 2)$

Solución:

$C(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

$R = -16$

72. Divide por Ruffini:

a) $(x^3 - x^2 - x + 3) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$

b) $(2{,}5x^3 - 3{,}5x^2 - 1{,}5x + 2{,}5) : (x - 1)$

Solución:

a) $C(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$

$R = \frac{19}{8}$

b) $C(x) = 2{,}5x^2 - x - 2{,}5$

$R = 0$

73. Divide por Ruffini:

a) $(x^4 - a^4) : (x - a)$ b) $(x^4 - a^4) : (x + a)$

c) $(x^5 + a^5) : (x + a)$ d) $(x^5 - a^5) : (x - a)$

Solución:

a) $C(x) = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3$

$R = 0$

b) $C(x) = x^3 - ax^2 + a^2x - a^3$

$R = 0$

c) $C(x) = x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4$

$R = 0$

d) $C(x) = x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$

$R = 0$

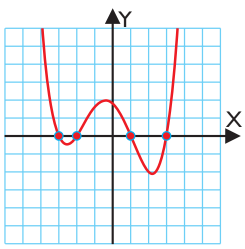
74. Calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 3$ para los valores:

a) $x = 3$ b) $x = -3$

Solución:

a) $P(3) = 57$ b) $P(-3) = -81$

75. Observando la gráfica, calcula las raíces del polinomio representado.



Solución:

$x_1 = -3, x_2 = -2,$

$x_3 = 1, x_4 = 3$

76. Comprueba si los números $-1, -2$ y 3 son raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 - 17x^2 + 18x + 72$

Solución:

Se aplica el teorema del resto:

$R = P(-1) = 40 \Rightarrow x = -1$ no es raíz.

$R = P(-2) = 0 \Rightarrow x = -2$ es raíz.

$R = P(3) = 0 \Rightarrow x = 3$ es raíz.

77. Halla, sin hacer la división, el resto de:

a) $(x^4 - x^2 - 6x + 8) : (x - 3)$

b) $(2x^3 - 4x^2 + 7x - 3) : (x + 1)$

Solución:

Se aplica el teorema del resto:

a) $R = P(3) = 62$ b) $R = P(-1) = -16$

78. Halla el valor de **k** para que las siguientes divisiones tengan el resto indicado:

a) $(x^4 - x^3 - kx^2 + 2) : (x - 2)$ Resto = 4

b) $(x^3 + (k - 1)x^2 - kx + 1) : (x + 2)$ Resto = 1

Solución:

Se aplica el teorema del resto y se resuelve la ecuación resultante:

a) $P(2) = 4$

$k = 3/2$

b) $P(-2) = 1$

$k = 2$

79. Halla el valor de **k** para que los siguientes polinomios sean divisibles entre los binomios correspondientes:

a) $(x^3 - kx^2 + kx - 1) : (x - 1)$

b) $(x^4 - kx^2 + (k + 2)x + 1) : (x + 1)$

Solución:

Se aplica el teorema del resto y se resuelve la ecuación resultante:

a) $P(1) = 0$

Se obtiene una identidad, $0 = 0$

Por tanto, sirve cualquier valor de **k**

b) $P(-1) = 0$

$k = 0$

80. Factoriza mentalmente los siguientes polinomios:

a) $x^2 + x + 1/4$

b) $x^2 - 3$

Solución:

a) $(x + 1/2)^2$

b) $\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$

81. Factoriza mentalmente los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 2x/3 + 1/9$ b) $4x^2 - 12x + 9$

c) $x^2 + 2x/5 + 1/25$ d) $9x^2 - 25$

Solución:

a) $(x + 1/3)^2$ b) $(2x - 3)^2$

c) $(x + 1/5)^2$ d) $(3x + 5)(3x - 5)$

82. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^5 - 16x$

b) $x^6 - 25x^2$

Solución:

a) $x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

b) $x^2\left(x + \sqrt{5}\right)\left(x - \sqrt{5}\right)(x^2 + 5)$

83. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^4 - 81$ b) $x^4 - 9x^2$

Solución:

a) $(x + 3)(x - 3)(x^2 + 9)$

b) $x^2(x - 3)(x + 3)$

84. Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $14x^3 - 27x^2 - 6x + 8$

b) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

c) $x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 21x$

d) $x^4 - 4x^3 - x^2 + 20x - 20$

Solución:

a) $14(x - 2)(x - 1/2)(x + 4/7)$

$x_1 = 2, x_2 = 1/2, x_3 = -4/7$

b) $(x - 1)(x + 3)(x - 5)$

$x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = 5$

c) $x(x - 7)\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right)$

$x_1 = 0, x_2 = 7, x_3 = -\sqrt{3}, x_4 = \sqrt{3}$

d) $(x - 2)^2\left(x + \sqrt{5}\right)\left(x - \sqrt{5}\right)$

$x_1 = x_2 = 2, x_3 = -\sqrt{5}, x_4 = \sqrt{5}$

85. Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando la factorización de polinomios:

a) $x^3 - 27 = 0$ b) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

c) $x^3 - 2x^2 - 49x + 98 = 0$ d) $4x^3 - 16x^2 - x + 4 = 0$

Solución:

a) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

$x_1 = 3$

b) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 3)$

$x_1 = 1, x_2 = -1$

c) $(x - 2)(x - 7)(x + 7)$

$x_1 = 2, x_2 = 7, x_3 = -7$

d) $4(x - 4)(x - 1/2)(x + 1/2)$

$x_1 = 4, x_2 = 1/2, x_3 = -1/2$

86. Escribe un polinomio que tenga las siguientes raíces:

a) $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = -2$

b) $x_1 = x_2 = -1, x_3 = 4$

c) $x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = 1$

d) $x_1 = -3, x_2 = x_3 = 2, x_4 = 1$

Solución:

a) $(x - 3)(x + 1)(x + 2) \Rightarrow x^3 - 7x - 6$

b) $(x + 1)^2(x - 4) \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

c) $(x + 2)(x - 2)(x - 1) \Rightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4$

d) $(x + 3)(x - 2)^2(x - 1) \Rightarrow x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$

87. Descompón mentalmente en factores el numerador y el denominador y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{3x^2 - 9x}{x^2 - 6x + 9}$ b) $\dfrac{x^2 + 10x + 25}{x^2 - 25}$

Solución:

a) $\dfrac{3x(x - 3)}{(x - 3)^2} = \dfrac{3x}{x - 3}$ b) $\dfrac{(x + 5)^2}{(x + 5)(x - 5)} = \dfrac{x + 5}{x - 5}$

88. Calcula:

a) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x - 2} - \dfrac{x + 1}{x^2 - 4}$ b) $\dfrac{x}{x^2 - 1} + \dfrac{x + 2}{x^2 - x} - \dfrac{3}{x}$

Solución:

a) $\dfrac{6x^2 + 5x - 16}{x(x^2 - 4)}$ b) $\dfrac{-x^2 + 3x + 5}{x(x^2 - 1)}$

89. Efectúa:

a) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4} \cdot \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 2x + 1}$ b) $\dfrac{x^3 - x^2}{x^2 + 5x + 6} \cdot \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x}$

Solución:

a) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$ b) $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 3}$

90. Calcula:

a) $\dfrac{3x^2 + 6x + 3}{x^4 + x^3} : \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3 + x^2}$

b) $\dfrac{4x^2 - 1}{x^2 - 10x + 25} : \dfrac{2x + 1}{x^2 - 25}$

Solución:

a) $\dfrac{3x^2 + 6x + 3}{x^3 + 2x^2 + 2x}$ b) $\dfrac{2x^2 + 9x - 5}{x - 5}$

Problemas

91. Dados los polinomios

$P(x) = 3x^4 - 5x^3 - x^2 + 3$

$Q(x) = x^5 + 8x^3 - x^2 + 5x - 1$

calcula un polinomio R(x) tal que:

$P(x) + Q(x) - R(x) = x^5 - 2x^4 + 7x^3 - x^2 + x + 7$

Solución:

Si $P(x) + Q(x) - R(x) = x^5 - 2x^4 + 7x^3 - x^2 + x + 7$

$-R(x) = x^5 - 2x^4 + 7x^3 - x^2 + x + 7 - P(x) - Q(x)$

$R(x) = -x^5 + 2x^4 - 7x^3 + x^2 - x - 7 + P(x) + Q(x)$

$R(x) = 5x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x - 5$

92. Expresa mediante un polinomio los siguientes enunciados:

a) La suma de los cuadrados de dos números.

b) El volumen de un prisma cuadrangular cuya altura es el doble que la longitud de la arista de la base.

c) El cuadrado de un número más el número disminuido en cinco.

d) La suma de dos números pares consecutivos.

Solución:

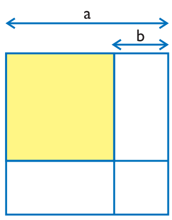
a) $x^2 + y^2$

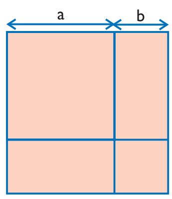
b) $x^2 \cdot 2x = 2x^3$

c) $x^2 + x - 5$

d) $2x + 2x + 2 = 4x + 2$

93. Expresa mediante polinomios en las variables **a** y **b** las siguientes regiones coloreadas.





Solución:

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

94. La diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos ¿es par o impar? Razona la respuesta.

Solución:

$(x + 1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$

Es impar.

95. Calcula el valor de **m** y **n** para que sea exacta la división $(2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + mx + n) : (x^2 - 3x + 2)$

Solución:

Se efectúa la división y se iguala a cero el resto. Se obtiene:

$(m + 1)x + n - 2 = 0$

$m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$

$n - 2 = 0 \Rightarrow n = 2$

96. Calcula, aplicando Ruffini, el valor de **m** para que la división $(x^4 - 3x^2 + mx + 1) : (x + 2)$ sea exacta.

Solución:

Se efectúa por Ruffini la división y se iguala a cero el resto. Se obtiene:

$-2m + 5 = 0 \Rightarrow m = 5/2$

97. El polinomio de Euler: $P(x) = x^2 + x + 41$

tiene la característica de que para $x = 0, 1, 2, \ldots, 39$ es un número primo.

Halla tres números primos aplicando dicha característica.

Solución:

$P(0) = 41$

$P(1) = 43$

$P(2) = 47$

98. Calcula el valor de **k** para que las siguientes divisiones sean exactas:

a) $(x^4 + kx^2 + (k - 1)x - 2) : (x - 1/2)$

b) $(x^3 - x^2 + 2\sqrt{3}\,x + k) : (x - \sqrt{3})$

Solución:

Se aplica el teorema del factor y se resuelve la ecuación resultante:

a) $P(1/2) = 0$

$k = 13/4$

b) $P(\sqrt{3}) = 0$

$k = -3\sqrt{3} - 3$

99. Justifica si el polinomio $x^2 + 4$ tiene alguna raíz real.

Solución:

No tiene raíces reales porque x^2 es cero o positivo, y al sumarle 4 se obtiene siempre un número positivo.

100. Opera y simplifica:

a) $\left(\dfrac{x}{x + 3} - 1\right) \cdot \left(\dfrac{x + 1}{x - 2} + 2\right)$

b) $\left(\dfrac{2x + 1}{2x^2 + 2x} - \dfrac{3x - 5}{x^2 + 5x + 6}\right) : \left(\dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{1}{x + 3}\right)$

Solución:

a) $\dfrac{-9x + 9}{x^2 + x - 6}$

b) $\dfrac{-4x^3 + 15x^2 + 27x + 6}{2x^2 + 2x}$

101. Calcula los polinomios P(x) y Q(x) en cada caso:

a) $\dfrac{x - 5}{x + 2} = 1 + \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

b) $\dfrac{x^3 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 1} = x - 2 + \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Solución:

a) $\dfrac{x - 5}{x + 2} = 1 + \dfrac{-7}{x + 2}$

b) $\dfrac{x^3 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 1} = x - 2 + \dfrac{x + 6}{x^2 + 2x + 1}$

Para profundizar

102. Si el polinomio P(x) es de grado 5 y el polinomio Q(x) es de grado 4, ¿cuál es el grado de la suma P(x) + Q(x)?

Solución:

P(x) + Q(x) es de grado 5

103. Escribe dos polinomios P(x) y Q(x) de grado 3 tales que el grado de su suma sea 2. ¿Qué se puede decir del grado de la suma de dos polinomios de grado 3?

Solución:

$P(x) = 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$

$Q(x) = -7x^3 + 8x^2 + 2x - 9$

El grado de la suma de dos polinomios es menor o igual al mayor de los grados de dichos polinomios.

104. Con una cuerda de 24 m se quiere construir un rectángulo. Calcula la expresión general del área de dicho rectángulo.

Solución:

$2x + 2y = 24$

$x + y = 12$

$y = 12 - x$

$A(x) = x(12 - x)$

$A(x) = 12x - x^2$

105. En una división de polinomios, el dividendo es de grado 6, y el divisor, de grado 2. ¿Cuál es el grado del cociente? ¿Qué se puede decir del grado del resto?

Solución:

El grado del cociente es: 6 – 2 = 4

El grado del resto es siempre menor que el grado del divisor; por tanto, es de grado uno o cero.

106. El polinomio de Euler

$P(x) = x^2 - 79x + 1\,601$

tiene la característica de que para x = 0, 1, 2, …, 79 es un número primo.

Halla tres números primos aplicando dicha característica.

Solución:

P(0) = 1 601

P(1) = 1 523

P(2) = 1 447

107. Halla el polinomio que calcula las diagonales de un polígono convexo. ¿Cuántas diagonales tiene un decágono?

Solución:

Cada vértice se puede unir con todos los demás menos con el mismo, el anterior y el siguiente. De esta forma, cada diagonal está contada dos veces.

$d(n) = \dfrac{n(n - 3)}{2}$

d(10) = 35

108. Observando el dividendo y el divisor, indica cuál de las siguientes divisiones no puede ser exacta:

a) $(2x^3 - 6x^2 - 6x - 8) : (x - 4)$

b) $(2x^3 - 6x^2 - 6x - 8) : (x - 3)$

Solución:

La b), porque 3 no divide al término independiente 8

109. Un trinomio de segundo grado es divisible por x – 3 y x + 2. Halla dicho trinomio.

Solución:

$(x - 3)(x + 2) = x^2 - x - 6$

110. Halla el valor de **m** y **n,** sabiendo que el polinomio:

$x^3 + mx + n$ es divisible por $x^2 - 4x + 3$

Solución:

El resto que se obtiene al hacer la división es:

$(m + 13)x + n - 12$

Por tanto, tiene que ser:

$m + 13 = 0 \Rightarrow m = -13$

$n - 12 = 0 \Rightarrow n = 12$

111. Calcula el valor de A y B en cada caso:

a) $\dfrac{2x+5}{x^2-9} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+3}$

b) $\dfrac{2x+5}{x^2-5x+6} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3}$

Solución:

a) $\dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+3} = \dfrac{Ax+3A+Bx-3B}{x^2-9} =$

$= \dfrac{(A+B)x+3A-3B}{x^2-9}$

$\left.\begin{aligned} A + B &= 2 \\ 3A - 3B &= 5 \end{aligned}\right\}$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

A = 11/6, B = 1/6

b) $\dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3} = \dfrac{Ax-3A+Bx-2B}{x^2-5x+6} =$

$= \dfrac{(A+B)x-3A-2B}{x^2-5x+6}$

$\left.\begin{aligned} A + B &= 2 \\ -3A - 2B &= 5 \end{aligned}\right\}$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

A = –9, B = 11

112. Calcula el valor numérico de las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$ para x = 3

b) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}$ para x = – 2

Solución:

Se deben simplificar previamente:

a) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9} = \dfrac{(x-3)^2}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{x-3}{x+3}$

Para x = 3 se obtiene 0/6 = 0

b) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-6} = \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{x+1}{x-3}$

Para x = –2 se obtiene $\dfrac{-1}{-5} = \dfrac{1}{5}$

Paso a paso

113. Multiplica los polinomios:

$P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5$

$Q(x) = 3x^2 - x + 2$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

114. Divide:

$P(x) = 4x^4 - 7x^3 + 9x - 8$ entre $Q(x) = x^2 + 3$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

115. Calcula el valor numérico del polinomio

$P(x) = x^5 - 3x^2 + 4x - 5$

para $x = 2$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

116. Factoriza el polinomio:

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

117. Simplifica la fracción algebraica:

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2 - 4}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Wiris o DERIVE.

118. Halla el valor de **k** para que el resto de la siguiente división sea 4

$$(x^3 + kx^2 - 3x - 8) : (x - 2)$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

119. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es,** elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

120. Multiplica los polinomios:

$P(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3 \qquad Q(x) = 4x^3 + x^2 - 2$

Solución:
$4x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 12x^3 - x^2 - 4x + 6$

121. Halla el cociente y el resto de la división de P(x) entre Q(x)

$P(x) = 4x^5 - 6x^4 + 10x^2 + 12$

$Q(x) = x^2 - 2x - 1$

Solución:
$C(x) = 4x^3 + 2x^2 + 8x + 28$
$R(x) = 64x + 40$

122. Calcula el valor numérico del polinomio

$P(x) = x^5 - 2x^3 + 5x - 1$ para los valores que se indica:

a) Para $x = -1$ b) Para $x = 2$

Solución:
a) $P(-1) = -5$
b) $P(2) = 25$

123. Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ b) $x^3 - x^2 - 8x + 12$

Solución:
a) $(x - 2)(x + 3)(x - 5)$

$x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = 5$

b) $(x + 3)(x - 2)^2$

$x_1 = -3, x_2 = x_3 = 2$

124. Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

b) $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2$

Solución:

a) $(x-1)^2(x+2)^2$

$x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = x_4 = -2$

b) $(x-1)^2(x+1)^2(x-2)$

$x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = x_4 = -1,\ x_5 = 2$

125. Simplifica las fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2 + x}{2x + 2}$

b) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

Solución:

a) $\dfrac{x\cancel{(x+1)}}{2\cancel{(x+1)}} = \dfrac{x}{2}$

b) $\dfrac{(x+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+1)}(x-1)} = \dfrac{x+1}{x-1}$

126. Calcula:

a) $\left(\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{x-2}\right) : \dfrac{2}{x^2 - 4x + 4}$

b) $\left(\dfrac{1}{x^2-9} + \dfrac{1}{x-3}\right)\left(\dfrac{1}{x} : \dfrac{1}{x+4}\right)$

Solución:

a) $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{2(x+1)}$

b) $\dfrac{(x+4)^2}{x(x^2-9)}$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE.

127. Halla un polinomio tal que al dividirlo entre $12x^3 + 5x^2 - 20x + 9$ se obtiene $3x^2 - 6x + 3$ de cociente, y de resto, $x - 6$

Solución:

$36x^5 - 57x^4 - 54x^3 + 162x^2 - 113x + 21$

128. Escribe un polinomio con coeficientes enteros que tenga las siguientes raíces:

a) $x_1 = 1,\ x_2 = 2$

b) $x_1 = 3/5,\ x_2 = 0$

c) $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3$

d) $x_1 = 0,\ x_2 = x_3 = 1,\ x_4 = 3$

Solución:

a) $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$

b) $5x(x - 3/5) = 5x^2 - 3x$

c) $(x-2)(x+1)(x-3) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

d) $x(x-1)^2(x-3) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x$

129. Halla el valor de **k** para que el resto de la siguiente división sea 2

$(x^4 + kx^3 - 4x + 2) : (x + 1)$

Solución:

Se aplica el teorema del resto y se resuelve la ecuación:

$P(-1) = 2$

$k = 5$

130. Halla el valor de **k** para que el polinomio

$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + kx + 2$ sea divisible entre $x - 2$

Solución:

Se aplica el teorema del resto y se resuelve la ecuación:

$P(2) = 0$

$k = 5$

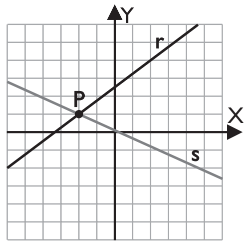
5 Sistema de ecuaciones e inecuaciones

1. Sistemas lineales. Resolución gráfica

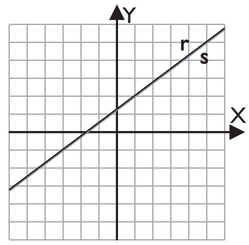
Piensa y calcula

Indica, en cada caso, cómo son las rectas y en qué puntos se cortan:

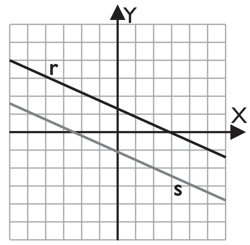
a)



b)



c)



Solución:

a) Las rectas **r** y **s** son secantes, se cortan en el punto P(– 2, 1)

b) Las rectas **r** y **s** son coincidentes, tienen todos los puntos comunes.

c) Las rectas **r** y **s** son paralelas, no se cortan.

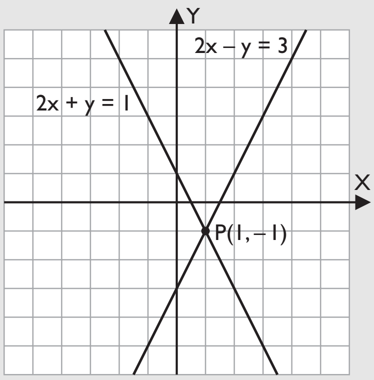
Aplica la teoría

1. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= -6 \\ 8x - 3y &= 12 \end{aligned}\right\}$

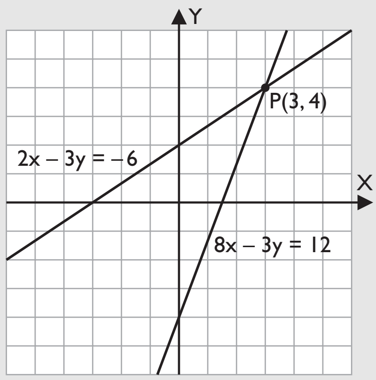
Solución:

a)



Solución: x = 1, y = – 1

b)



Solución: x = 3, y = 4

2. Clasifica sin resolver los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} 5x - 4y &= 7 \\ 2x + 3y &= 4 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 3x - 5y &= -4 \\ 6x - 10y &= -7 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) $\dfrac{5}{2} \neq \dfrac{-4}{3}$ Sistema compatible determinado.

b) $\dfrac{3}{6} = \dfrac{-5}{-10} \neq \dfrac{-4}{-7}$ Sistema incompatible.

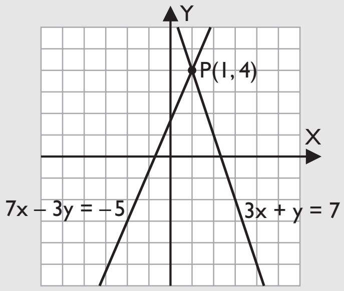
3. Clasifica los siguientes sistemas y resuélvelos gráficamente:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + y = 7 \\ 7x - 3y = -5 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 4x - 5y = -10 \\ 12x - 15y = 12 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 4x + 3y = 8 \\ -8x - 6y = -16 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} x - 3y = -6 \\ 5x - 3y = 6 \end{array}\right\}$

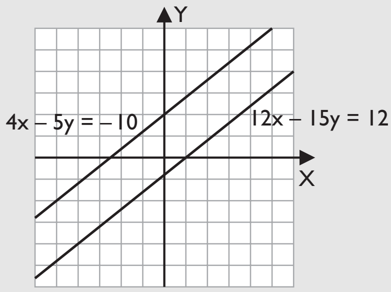
Solución:

a) $\dfrac{3}{7} \neq \dfrac{1}{-3}$ Sistema compatible determinado.



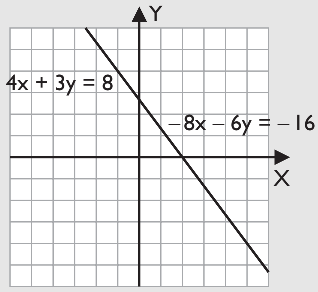
Solución: x = 1, y = 4

b) $\dfrac{4}{12} = \dfrac{-5}{-15} \neq \dfrac{-10}{12}$ Sistema incompatible.



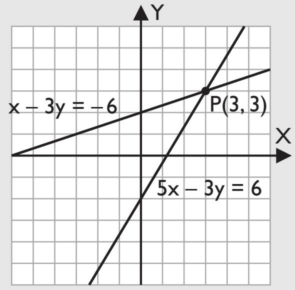
Rectas paralelas.

c) $\dfrac{4}{-8} = \dfrac{3}{-6} = \dfrac{8}{-16}$ Sistema compatible indeterminado.



Rectas coincidentes.

d) $\dfrac{1}{5} \neq \dfrac{-3}{-3}$ Sistema compatible determinado.



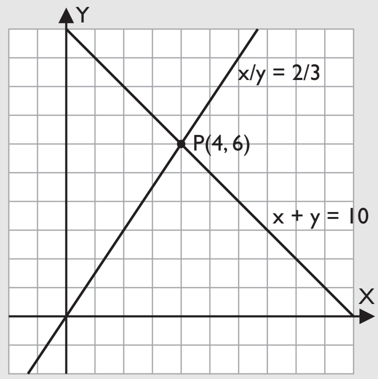
Solución: x = 3, y = 3

4. Halla una fracción equivalente a 2/3 sabiendo que la suma de sus términos es 10

Solución:

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \\ x + y = 10 \end{array}\right\}$

Se resuelve gráficamente:



Solución: x = 4, y = 6

5. Determina el valor de **k** para que el siguiente sistema sea:

a) Compatible indeterminado.

b) Compatible determinado.

$\left.\begin{array}{r} 3x + ky = 2 \\ 6x - y = 4 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\dfrac{3}{6} = \dfrac{k}{-1} = \dfrac{2}{4} \Rightarrow k = -\dfrac{1}{2}$

b) $k \neq -\dfrac{1}{2}$

2. Sistemas lineales. Resolución algebraica

Piensa y calcula

Dado el siguiente sistema, suma mentalmente las dos ecuaciones y halla el valor de **x.** Luego sustituye el valor que hayas obtenido en la primera ecuación y halla el valor de **y**

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x - y &= 9 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$3x = 9 \Rightarrow x = 3$

$3 + y = 0 \Rightarrow y = -3$

Aplica la teoría

6. Resuelve por el método más adecuado los siguientes sistemas y razona por qué eliges ese método:

a) $\left.\begin{aligned} x + 3y &= 6 \\ 5x - 2y &= 13 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 6x - 7y &= 10 \\ 14x - 12y &= 32 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Sustitución, porque es muy fácil despejar la **x** de la 1ª ecuación.
Solución: x = 3, y = 1

b) Reducción, porque no es fácil despejar ninguna incógnita.
Solución: x = 4, y = 2

7. Resuelve por el método más adecuado los siguientes sistemas y razona por qué eliges ese método:

a) $\left.\begin{aligned} x + 3y &= 11 \\ x - 2y &= -14 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 2x - y &= -4 \\ 3x + 5y &= 7 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Igualación o reducción, porque es muy fácil despejar **x** en las dos ecuaciones, y porque se pueden restar y desaparece la **x**
Solución: x = –4, y = 5

b) Sustitución, porque es muy fácil despejar la **y** de la 1ª ecuación.
Solución: x = – 1, y = 2

8. Resuelve por el método más adecuado los siguientes sistemas y razona por qué eliges ese método:

a) $\left.\begin{aligned} 4x - y &= 7 \\ 3x + y &= 7 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 7x + 3y &= 1 \\ 5x - 6y &= 17 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Igualación o reducción, porque es muy fácil despejar **y** en las dos ecuaciones, y porque se pueden sumar y desaparece la **y**
Solución: x = 2, y = 1

b) Reducción, porque no es fácil despejar ninguna incógnita.
Solución: x = 1, y = –2

9. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-4}{5} &= \frac{y+1}{10} \\ \frac{x-2}{10} &= \frac{y-4}{5} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se multiplican por 10 ambas ecuaciones y se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 8 &= y + 1 \\ x - 2 &= 2y - 8 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 9 \\ x - 2y &= -6 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por sustitución despejando **x** de la 2ª ecuación:

Solución: x = 8, y = 7

10. La suma de dos números es 88 y su diferencia es 40. Halla los dos números.

Solución:

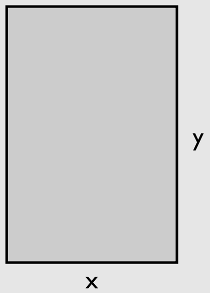
$$\left.\begin{aligned} x + y &= 88 \\ x - y &= 40 \end{aligned}\right\}$$

Se resuelve por reducción:

Solución: x = 64, y = 24

11. Halla los lados de un rectángulo sabiendo que el perímetro mide 120 m y que la base es los 2/3 de la altura.

Solución:



$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 120 \\ x \quad\; = 2y/3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 60 \\ 3x \quad = 2y \end{array}\right\}$$

Se resuelve por sustitución, despejando **y** de la 1ª ecuación:

Solución: x = 24 m, y = 36 m

3. Método de Gauss

■ Piensa y calcula

Calcula mentalmente el valor de **z** en la 3ª ecuación. Sustituye ese valor en la 2ª ecuación y calcula mentalmente el valor de **y.** Sustituye el valor de **z** y de **y** en la 1ª ecuación, y calcula mentalmente el valor de **x**

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ y + z = 6 \\ 3z = 6 \end{array}\right\}$$

Solución:

z = 2 y = 4 x = –2

● Aplica la teoría

12. Resuelve, aplicando el método de Gauss, los sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y - 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 19 \\ 3x + 4y - z = 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 11 \\ x + 2y - z = -2 \end{array}\right\}$

Solución:

a) x = 5, y = –3, z = 2

b) x = 3, y = –2, z = 1

13. Resuelve, aplicando el método de Gauss, los sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = -8 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 13 \\ -3x + 2y + 5z = -8 \end{array}\right\}$

Solución:

a) x = –3, y = 4, z = 2

b) x = 3, y = –2, z = 1

14. Resuelve, aplicando el método de Gauss, los sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 11 \\ x - y + 3z = 15 \\ 3x + 2y - 5z = -17 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 4x - y - z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \\ 6x - 2y - 3z = -6 \end{array}\right\}$

Solución:

a) x = 2, y = –4, z = 3 b) x = 1/2, y = –3, z = 5

15. Calcula tres números tales que la suma de los tres es 9. El mediano disminuido en una unidad es la tercera parte de la suma del mayor y el menor. La diferencia entre el mayor y el menor excede en uno al mediano.

Solución:

x: el número menor.

y: el número mediano.

z: el número mayor.

x + y + z = 9

y – 1 = (x + z)/3

z – x = y + 1

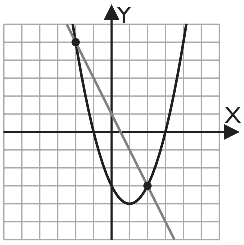
x = 1, y = 3, z = 5

4. Sistemas de ecuaciones no lineales

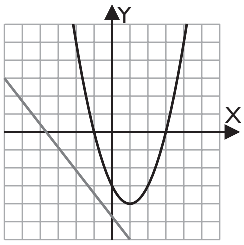
Piensa y calcula

Indica en cada caso cómo son la parábola y la recta y en cuántos puntos se cortan:

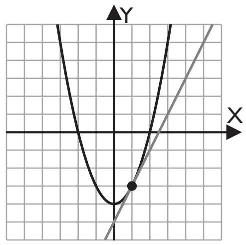
a)



b)



c)



Solución:

a) La parábola y la recta son secantes, se cortan en dos puntos.

b) La parábola y la recta son exteriores, no se cortan.

c) La parábola y la recta son tangentes, se cortan en un punto.

Aplica la teoría

16. Resuelve los siguientes sistemas y di si son compatibles o incompatibles:

a) $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 20 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} y &= \frac{2}{x-3} \\ x - y &= 2 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Se despeja **x** en la 1ª ecuación y se sustituye en la 2ª

Soluciones: $x_1 = 4, y_1 = 2; x_2 = -4, y_2 = -2$

Sistema compatible.

b) Se sustituye el valor de **y** de la 1ª ecuación en la 2ª

Soluciones: $x_1 = 1, y_1 = -1; x_2 = 4, y_2 = 2$

Sistema compatible.

17. Resuelve el siguiente sistema y di si es compatible o incompatible:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ y &= x^2 - 3x - 4 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se sustituye el valor de **y** de la 2ª ecuación en la 1ª

Soluciones: $x_1 = 3, y_1 = -4; x_2 = -2, y_2 = 6$

Sistema compatible.

18. Resuelve el sistema y di si es compatible o incompatible:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{2}{x-1} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se multiplica la 2ª ecuación por 2 y se sustituye el valor de **y** de la 1ª ecuación en la 2ª

No tiene solución.

Sistema incompatible.

19. La suma de los cuadrados de dos números es 52 y la diferencia entre los dos números es 2. Calcula dichos números.

Solución:

$x^2 + y^2 = 52$

$x - y = 2$

Se despeja **x** en la 2ª ecuación y se sustituye su valor en la 1ª

Soluciones: $x_1 = 6, y_1 = 4; x_2 = -4, y_2 = -6$

20. Calcula dos números cuyo cociente es 16 y su producto es 256

Solución:

$x/y = 16$

$xy = 256$

Se despeja **x** de la 1ª ecuación y se sustituye en la 2ª

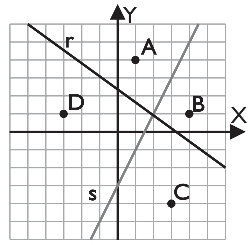
Soluciones: $x_1 = 64, y_1 = 4; x_2 = -64, y_2 = -4$

5. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

Piensa y calcula

Comprueba qué puntos de los representados en el dibujo verifican a la vez las inecuaciones:

$$3x + 4y \leq 10$$
$$2x - y \leq 3$$



Solución:

Punto A(1, 4):

$3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 3 + 16 = 19$ no es ≤ 10

$2 \cdot 1 - 4 = 2 - 4 = -2 \leq 3$

Punto B(4, 1):

$3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 12 + 4 = 16$ no es ≤ 10

$2 \cdot 4 - 1 = 8 - 1 = 7$ no es ≤ 3

Punto C(3, –4):

$3 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) = 9 - 16 = -7 \leq 10$

$2 \cdot 3 + 4 = 6 + 4 = 10$ no es ≤ 3

Punto D(– 3, 1):

$3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 = -9 + 4 = -5 \leq 10$

$2 \cdot (-3) - 1 = -6 - 1 = -7 \leq 3$

Solo el punto D(–3, 1)

Aplica la teoría

21. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x + y < 5$

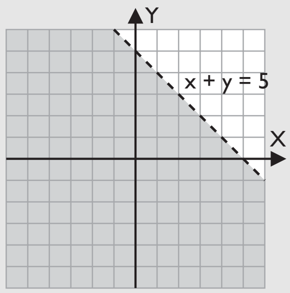
b) $2x + 3y \geq 6$

c) $x + 3y > 9$

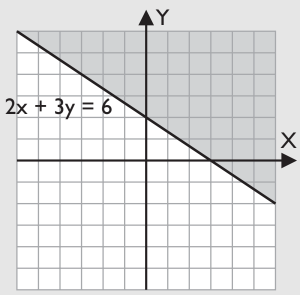
d) $x - y \leq 3$

Solución:

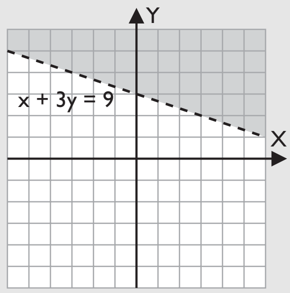
a)



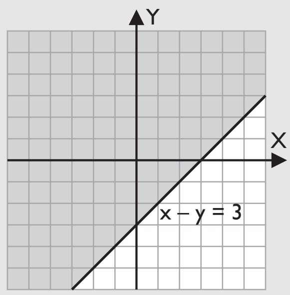
b)



c)



b)

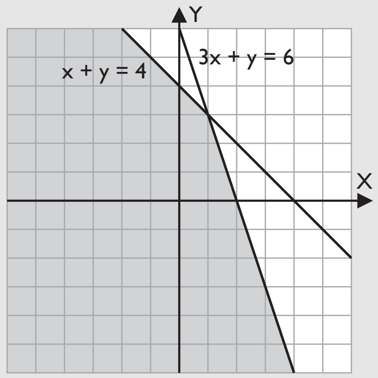


22. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

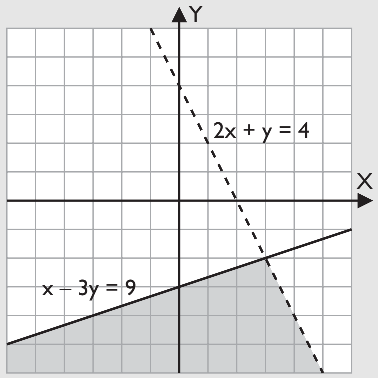
a) $\begin{cases} x + y \le 4 \\ 3x + y \le 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y < 4 \\ x - 3y \ge 9 \end{cases}$

Solución:

a)



b)



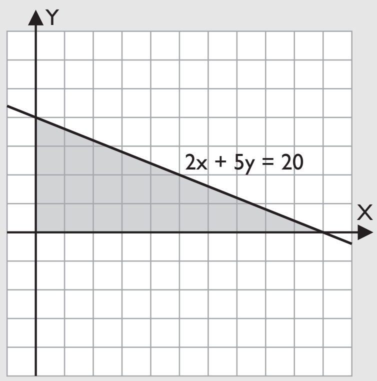
23. Se dispone de 20 € para comprar cuerda de dos tipos que valen 2 € y 5 € el metro, respectivamente. Representa en el plano la región que nos da todas las soluciones posibles de metros de cuerda que se pueden comprar.

Solución:

$x \ge 0$

$y \ge 0$

$2x + 5y \le 20$



24. Un comerciante desea comprar dos tipos de televisores T1 y T2, que cuestan 200 € y 400 €, respectivamente. Solo dispone de sitio para almacenar 20 televisores y de 5 000 € para gastar. Representa en el plano el recinto de todas las posibles soluciones de la cantidad de televisores de cada tipo que puede comprar.

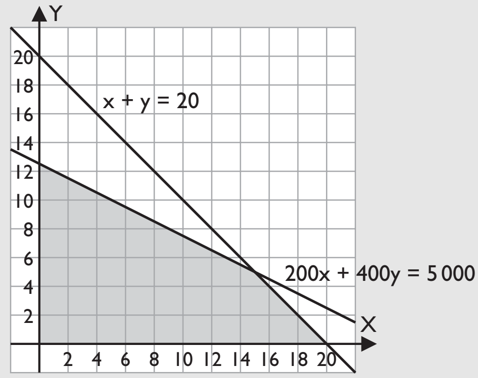
Solución:

$x \ge 0$

$y \ge 0$

$x + y \le 20$

$200x + 400y \le 5\,000$



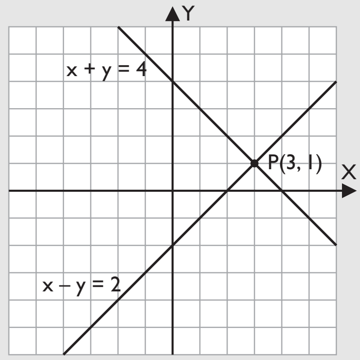
1. Sistemas lineales. Resolución gráfica

25. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x - 3y = 0 \\ -x + y = 2 \end{array}\right\}$

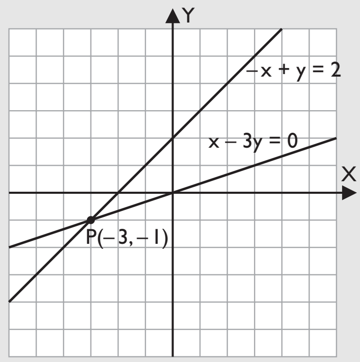
Solución:

a)



Solución: x = 3, y = 1

b)



Solución: x = –3, y = – 1

26. Clasifica, sin resolver, los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - y = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 5x - y = 4 \\ 10x - 2y = 8 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{-1}{-3}$ Sistema compatible determinado.

b) $\dfrac{5}{10} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{4}{8}$ Sistema compatible indeterminado.

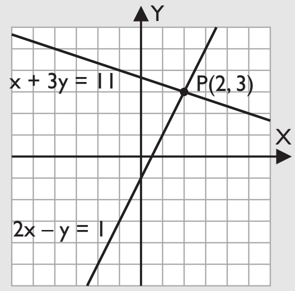
27. Clasifica los siguientes sistemas y resuélvelos gráficamente:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 11 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 2 \\ 6x + 4y = 4 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - 10y = 6 \\ 3x - 15y = 9 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{l} x - y = 3 \\ -x + y = 2 \end{array}\right\}$

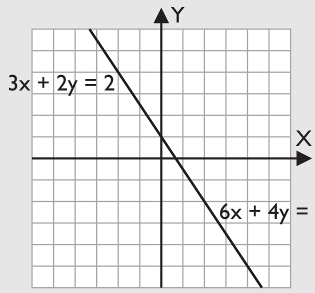
Solución:

a) $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{-1}{3}$ Sistema compatible determinado.



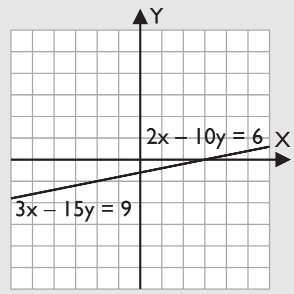
Solución: x = 2, y = 3

b) $\dfrac{3}{6} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{2}{4}$ Sistema compatible indeterminado.



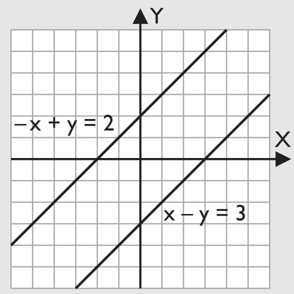
Rectas coincidentes.

c) $\dfrac{2}{3} = \dfrac{-10}{-15} = \dfrac{6}{9}$ Sistema compatible indeterminado.



Rectas coincidentes.

d) $\dfrac{1}{-1} = \dfrac{-1}{1} \neq \dfrac{3}{2}$ Sistema incompatible.



Rectas paralelas.

2. Sistemas lineales. Resolución algebraica

28. Resuelve por el método más adecuado los siguientes sistemas y razona por qué eliges ese método:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 16 \\ 5x + y = 18 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 6x + 5y = -2 \\ 7x + 9y = 42 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Sustitución, porque es muy fácil despejar la **y** de la 2ª ecuación.
Solución: $x = 4, y = -2$

b) Reducción, porque no es fácil despejar ninguna incógnita.
Solución: $x = -12, y = 14$

29. Resuelve por el método más adecuado los siguientes sistemas y razona por qué eliges ese método:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 14 \\ 7x - 3y = -29 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 2 \\ x - 8y = -3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Reducción, porque no es fácil despejar ninguna incógnita.
Solución: $x = -2, y = 5$

b) Igualación o reducción, porque es muy fácil despejar **x** en las dos ecuaciones y porque se pueden restar y desaparece la **x**
Solución: $x = 1, y = 1/2$

30. Resuelve por el método más adecuado los siguientes sistemas y razona por qué eliges ese método:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = -2 \\ 5x + 8y = -60 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 13 \\ 3x - y = 7 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Reducción, porque no es fácil despejar ninguna incógnita.
Solución: $x = -4, y = -5$

b) Igualación o reducción, porque es muy fácil despejar **y** en las dos ecuaciones y porque se pueden sumar y desaparece la **y**
Solución: $x = 4, y = 5$

31. Resuelve por el método más adecuado el siguiente sistema y razona por qué eliges ese método:

$$\left.\begin{array}{l} x + 5y = 21 \\ x - y = 3 \end{array}\right\}$$

Solución:

Igualación o reducción, porque es muy fácil despejar **x** en las dos ecuaciones y porque se pueden restar y desaparece la **x**

Solución: $x = 6, y = 3$

32. Resuelve por el método más adecuado el siguiente sistema y razona por qué eliges ese método:

$$\left.\begin{array}{l} 8x - 5y = 15 \\ 2x + 3y = 25 \end{array}\right\}$$

Solución:

Reducción, porque no es fácil despejar ninguna incógnita.

Solución: $x = 5, y = 5$

33. Resuelve por el método más adecuado el siguiente sistema y razona por qué eliges ese método:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 5 \\ 5x - y = 11 \end{array}\right\}$$

Solución:

Igualación o reducción, porque es muy fácil despejar **y** en las dos ecuaciones y porque se pueden sumar y desaparece la **y**

Solución: $x = 2, y = -1$

34. Resuelve por el método más adecuado el siguiente sistema y razona por qué eliges ese método:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 6 \\ 2x + 5y = -15 \end{array}\right\}$$

Solución:

Reducción, porque no es fácil despejar ninguna incógnita.

Solución: $x = 0, y = -3$

35. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x - y}{3} + 5 = 2y + \dfrac{x + 1}{6} \\ x + y = 1 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se multiplica por 6 la primera ecuación y se trasponen términos.

Solución: $x = -1, y = 2$

36. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} = 1 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\}$$

Solución:

Se multiplica la 1ª ecuación por 4 y la 2ª por 6

Solución: $x = 2, y = 1$

37. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=4 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{4}=2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se multiplica la 1ª ecuación por 6 y la 2ª por 4

Solución: $x = 6, y = 4$

38. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}-y=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}=\dfrac{3}{4} \end{array}\right\}$$

Solución:

Se multiplica la 1ª ecuación por 3 y la 2ª por 4

Solución: $x = 2, y = -1$

39. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}=0 \\ x+\dfrac{y}{3}=4 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se multiplica la 1ª ecuación por 15 y la 2ª por 3

Solución: $x = 5, y = -3$

40. Se tienen 13,9 € en 47 monedas de 20 céntimos y de 50 céntimos. ¿Cuántas monedas de cada tipo se tienen?

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=47 \\ 0{,}2x+0{,}5y=13{,}9 \end{array}\right\}$$

$x = 32$ monedas de 20 céntimos.

$y = 15$ monedas de 50 céntimos.

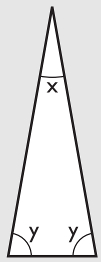
41. El ángulo desigual de un triángulo isósceles mide la cuarta parte de cada uno de los ángulos iguales. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos?

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=180 \\ x=y/4 \end{array}\right\}$$

$x = 20°$

$y = 80°$



3. El Método de Gauss

42. Resuelve el siguiente sistema aplicando el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ 2x-y-3z=-9 \\ 3x+y-2z=-1 \end{array}\right\}$$

Solución:

$x = 1, y = 2, z = 3$

43. Resuelve el siguiente sistema aplicando el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-2z=-10 \\ 3x-4y+5z=14 \\ x+y-z=-4 \end{array}\right\}$$

Solución:

$x = -1, y = 2, z = 5$

44. Resuelve el siguiente sistema aplicando el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=10 \\ x+y-2z=-5 \\ 5x-2y-2z=6 \end{array}\right\}$$

Solución:

$x = 2, y = -1, z = 3$

45. Resuelve el siguiente sistema aplicando el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y-z=7 \\ 4x+y-2z=-5 \\ 2x-3y-4z=-7 \end{array}\right\}$$

Solución:

$x = 2, y = -3, z = 5$

4. Sistemas de ecuaciones no lineales

46. Resuelve el siguiente sistema y di si es compatible o incompatible:

$$\left.\begin{array}{l} 5x-y=3 \\ 5x^2-y=13 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se despeja **y** de las dos ecuaciones y se igualan los valores obtenidos.

Soluciones: $x_1 = 2, y_1 = 7; x_2 = -1, y_2 = -8$

Sistema compatible.

47. Resuelve el siguiente sistema y di si es compatible o incompatible:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{6}{x} \\ 2y = 3x \end{array}\right\}$$

Solución:

Se sustituye el valor de **y** de la 1ª ecuación en la 2ª

Soluciones: $x_1 = 2, y_1 = 3; x_2 = -2, y_2 = -3$

Sistema compatible.

48. Resuelve el siguiente sistema y di si es compatible o incompatible:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se despeja **y** en la 1ª ecuación y se sustituye en la 2ª

No tiene solución.

Sistema incompatible.

49. Resuelve el siguiente sistema y di si es compatible o incompatible:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{4x}{3} + y = \dfrac{25}{3} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se despeja **y** en la 1ª ecuación y se sustituye en la 2ª

Solución: $x = 4, y = 3$

Sistema compatible.

50. Resuelve el sistema y di si es compatible o incompatible:

$$\left.\begin{array}{l} 8x - y^2 = 0 \\ 2x - y = 8 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se despeja **y** en la 2ª ecuación y se sustituye en la 1ª

Soluciones: $x_1 = 2, y_1 = -4; x_2 = 8, y_2 = 8$

Sistema compatible.

51. Resuelve el sistema y di si es compatible o incompatible:

$$\left.\begin{array}{l} 4x = y^2 \\ 2x - y = -2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se despeja **y** en la 2ª ecuación y se sustituye en la 1ª

No tiene solución.

Sistema incompatible.

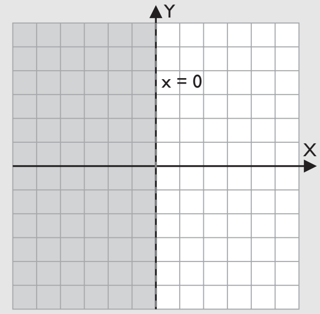
5. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

52. Representa en el plano las regiones limitadas por las siguientes inecuaciones:

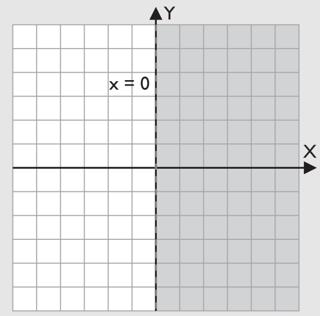
a) $x < 0$ b) $x > 0$

Solución:

a)



b)

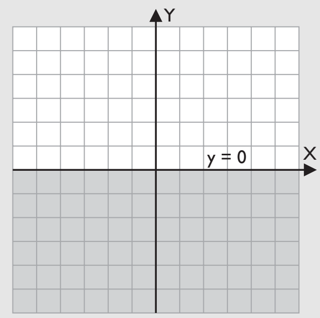


53. Representa en el plano las regiones limitadas por las siguientes inecuaciones:

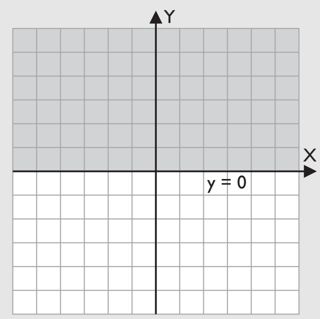
a) $y \le 0$ b) $y \ge 0$

Solución:

a)



b)

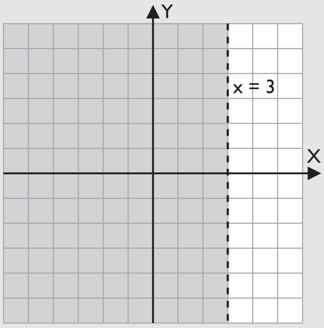


54. Representa en el plano las regiones limitadas por las siguientes inecuaciones:

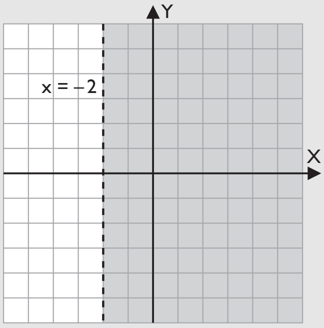
a) $x < 3$ b) $x > -2$

Solución:

a)



b)

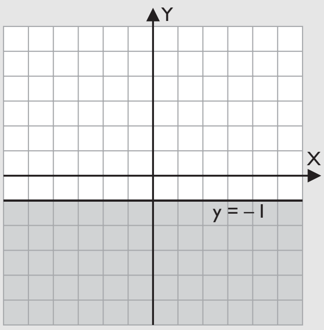


55. Representa en el plano las regiones limitadas por las siguientes inecuaciones:

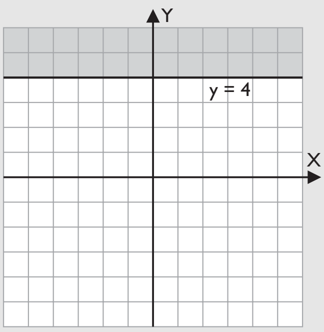
a) $y \leq -1$ b) $y \geq 4$

Solución:

a)



b)

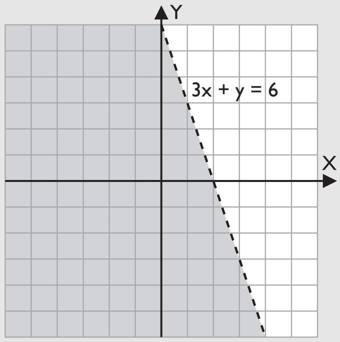


56. Resuelve las siguientes inecuaciones:

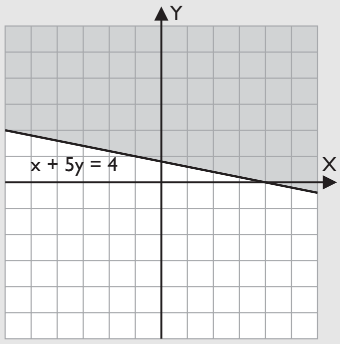
a) $3x + y < 6$ b) $x + 5y \geq 4$

Solución:

a)



b)

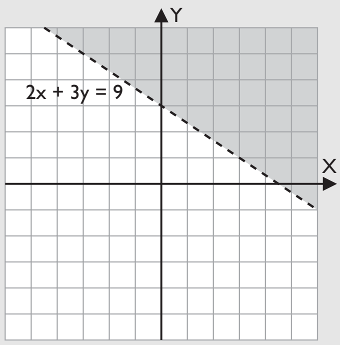


57. Resuelve las siguientes inecuaciones:

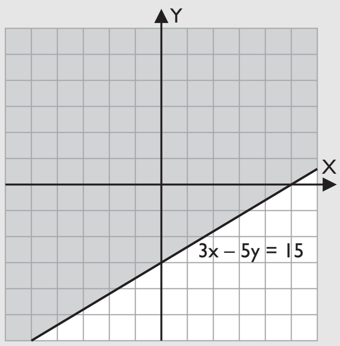
a) $2x + 3y > 9$ b) $3x - 5y \leq 15$

Solución:

a)



b)

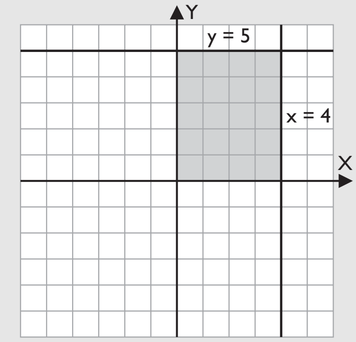


58. Representa en el plano las regiones limitadas por los siguientes sistemas:

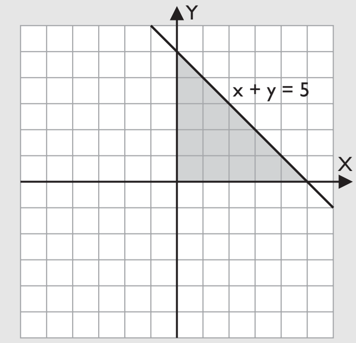
a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 5 \\ x \leq 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$

Solución:

a)



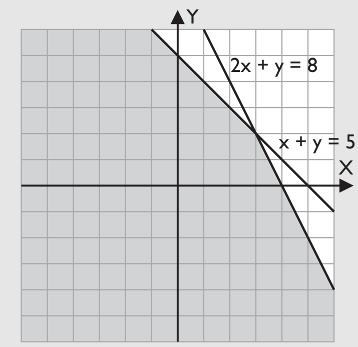
b)



59. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$\left.\begin{array}{r} x + y \leq 5 \\ 2x + y \leq 8 \end{array}\right\}$

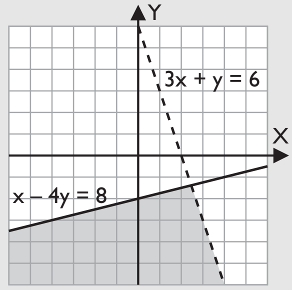
Solución:



60. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$\left.\begin{array}{r} 3x + \ \ y < 6 \\ x - 4y \geq 8 \end{array}\right\}$

Solución:

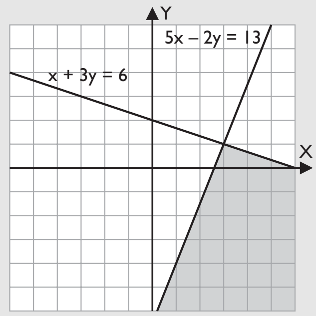


61. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

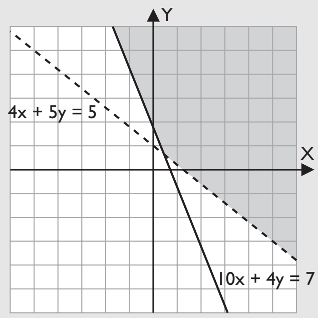
a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y \leq \ 6 \\ 5x - 2y \geq 13 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 4x + 5y > 5 \\ 10x + 4y \geq 7 \end{array}\right\}$

Solución:

a)



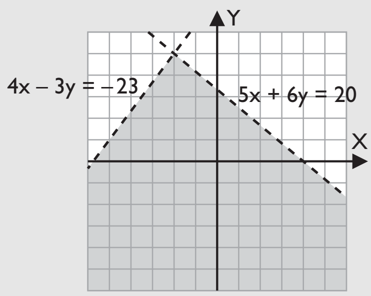
b)



62. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$\left.\begin{array}{r} 5x + 6y < \ \ 20 \\ 4x - 3y > -23 \end{array}\right\}$

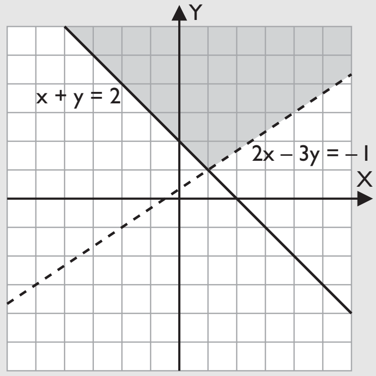
Solución:



63. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y < -1 \\ x + y \geq 2 \end{array}\right\}$$

Solución:



64. En una fábrica de bicicletas se utiliza 1 kg de acero para un tipo de bicicletas y 2 kg para otro tipo. En la fábrica solo se dispone de 80 kg. Representa en el plano la región de todas las soluciones posibles del número de bicicletas que pueden fabricar de cada tipo.

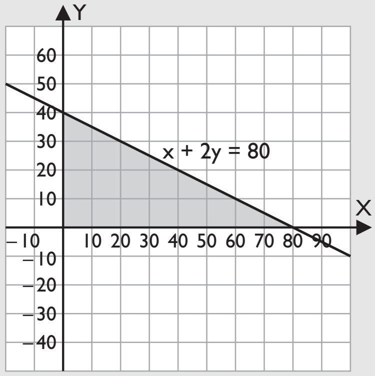
Solución:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x + 2y \leq 80$

Las posibles soluciones son los pares (x, y) de números enteros que hay en el recinto.



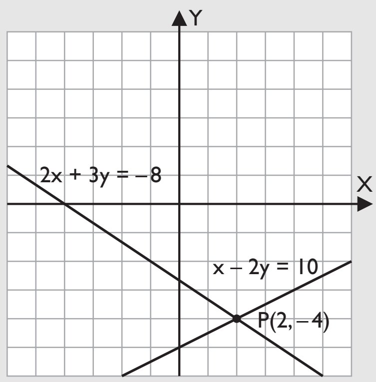
Para ampliar

65. Clasifica el sistema siguiente y resuélvelo gráficamente:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 10 \\ 2x + 3y = -8 \end{array}\right\}$$

Solución:

$\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{3}$ Sistema compatible determinado.



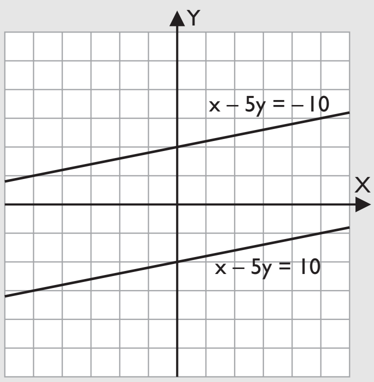
Solución: $x = 2, y = -4$

66. Clasifica el sistema siguiente y resuélvelo gráficamente:

$$\left.\begin{array}{r} x - 5y = 10 \\ x - 5y = -10 \end{array}\right\}$$

Solución:

$\frac{1}{1} = \frac{-5}{-5} \neq \frac{10}{-10}$ Sistema incompatible.



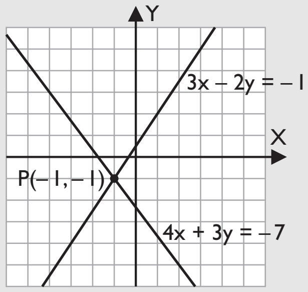
Rectas paralelas, no tiene solución.

67. Clasifica los sistemas siguientes y resuélvelos gráficamente:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = -1 \\ 4x + 3y = -7 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 2 \\ -2x + 4y = -4 \end{array}\right\}$

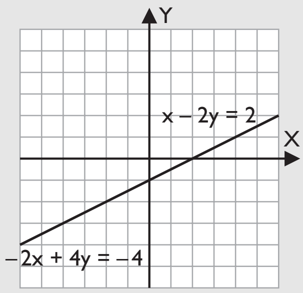
Solución:

a) $\dfrac{3}{4} \neq \dfrac{-2}{3}$ Sistema compatible determinado.



Solución: $x = -1, y = -1$

b) $\dfrac{1}{-2} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{2}{-4}$ Sistema compatible indeterminado.



Rectas coincidentes.

68. Determina el valor de **k** para que el siguiente sistema sea:

a) Compatible indeterminado.

b) Incompatible.

$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = k \\ 8x + 12y = 7 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\dfrac{2}{8} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{k}{7} \Rightarrow k = \dfrac{7}{4}$

b) $k \neq \dfrac{7}{4}$

69. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{6} - \dfrac{y-x}{3} = 2 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{2x+y}{3} = \dfrac{14}{3} \end{array}\right\}$$

Solución:

Se multiplica la 1ª ecuación por 6 y la 2ª también por 6

$x = 4, y = 0$

70. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}7x - 1{,}4y = -\dfrac{28}{5} \\ 1{,}2x + 0{,}8y = 0 \end{array}\right\}$$

Solución:

$x = -2, y = 3$

71. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + z = \dfrac{17}{12} \\ \dfrac{x+y}{3} - \dfrac{z}{2} = -\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y+z}{6} = 1 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se multiplica la 1ª ecuación por 12, la 2ª y 3ª por 6 y se resuelve por Gauss.

$x = 2, y = -1, z = 1$

72. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{z}{5} \end{array}\right\}$$

Solución:

Se multiplica la 2ª ecuación por 12, la 3ª por 15 y se resuelve por Gauss.

$x = 9/2, y = 6, z = 15/2$

73. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{6}{x} \\ x^2 + y^2 = 13 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se sustituye el valor de **y** de la 1ª ecuación en la 2ª

$x_1 = 2, y_1 = 3$ $x_2 = -2, y_2 = -3$

$x_3 = 3, y_3 = 2$ $x_4 = -3, y_4 = -2$

74. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = \dfrac{3}{x} \\ y + x = \dfrac{2}{y} \end{array}\right\}$$

Solución:

Se multiplica la 1ª ecuación por **x** y la 2ª por **y.** Se despeja **x** de la 2ª ecuación y se sustituye su valor en la 1ª

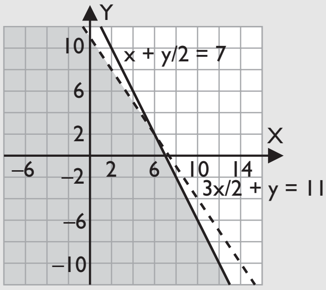
$x_1 = 1, y_1 = 1$ $x_2 = -1, y_2 = -1$

75. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

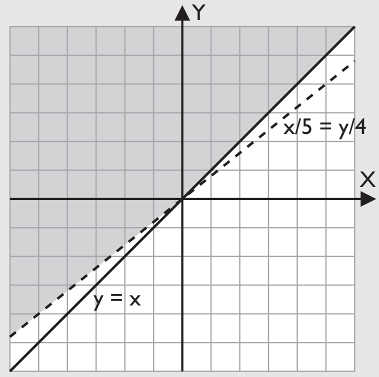
a) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{3x}{2} + y \le 11 \\ x + \dfrac{y}{2} < 7 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{5} < \dfrac{y}{4} \\ y \ge x \end{array}\right.$

Solución:

a)



b)



Problemas

76. Halla dos números tales que el doble del mayor más el triple del menor es 19 y el mayor excede en dos unidades al menor.

Solución:

$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 19 \\ x = y + 2 \end{array}\right\}$

$x = 5, y = 3$

77. Halla dos números sabiendo que uno es el triple del otro y que entre los dos suman 64

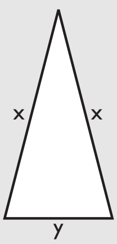
Solución:

$\left.\begin{array}{r} y = 3x \\ x + y = 64 \end{array}\right\}$

$x = 16, y = 48$

78. El perímetro de un triángulo isósceles mide 75 m y cada uno de los lados iguales mide el doble del lado desigual. ¿Cuánto mide cada lado?

Solución:



$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 75 \\ x = 2y \end{array}\right\}$

$x = 30$ m, $y = 15$ m

79. Halla dos números cuya suma es 87 y el menor, aumentado en 30 unidades, es el doble del mayor.

Solución:

$\left.\begin{array}{l} x + y = 87 \\ x + 30 = 2y \end{array}\right\}$

$x = 48, y = 39$

80. Halla los términos de una fracción tal que si se les suman 3 unidades a sus términos es equivalente a 1/2 y si se les restan 4 unidades es equivalente a 2/5

Solución:

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{y+3} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x-4}{y-4} = \dfrac{2}{5} \end{array}\right\}$

$x = 18, y = 39$

81. Por 3 camisas y 2 corbatas se han pagado 186 €, y por 5 camisas y 4 corbatas se han pagado 330 €. Calcula el precio de cada artículo.

Solución:

$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 186 \\ 5x + 4y = 330 \end{array}\right\}$

Cada camisa: $x = 42$ €

Cada corbata: $y = 30$ €

82. Si se suman las edades de un padre y un hijo, se obtienen 54 años. Dentro de 9 años la edad del padre será el triple de la del hijo. ¿Qué edad tiene actualmente cada uno?

Solución:

	Ahora	Dentro de 9 años
Padre	x	x + 9
Hijo	y	y + 9

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 54 \\ x + 9 &= 3(y + 9) \end{aligned}\right\}$$

Edad del padre ahora: x = 45 años.

Edad del hijo ahora: y = 9 años.

83. El cuádruplo de un número más otro número es igual a 42 y el doble del primero menos la tercera parte del segundo es igual a 16. Calcula dichos números.

Solución:

$$\left.\begin{aligned} 4x + y &= 42 \\ 2x - y/3 &= 16 \end{aligned}\right\}$$

$x = 9, y = 6$

84. La diferencia de dos números es 50 y su suma es 42. Halla dichos números.

Solución:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 50 \\ x + y &= 42 \end{aligned}\right\}$$

$x = 46, y = -4$

85. Calcula dos números tales que un cuarto de su suma es 45 y un tercio de la diferencia es 30

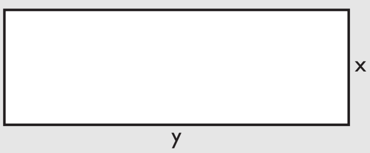
Solución:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x + y}{4} &= 45 \\ \frac{x - y}{3} &= 30 \end{aligned}\right\}$$

$x = 135, y = 45$

86. El perímetro de un rectángulo mide 128 m y uno de los lados es el triple del otro. ¿Cuánto mide cada lado?

Solución:



$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 128 \\ y &= 3x \end{aligned}\right\}$$

$x = 16$ m, $y = 48$ m

87. Se ha comprado un libro y un disco que costaban 48 €. Sobre el precio se ha hecho una rebaja en cada artículo del 15% y del 10%, respectivamente. Si se ha ahorrado 5,7 €, ¿cuánto costaba cada producto?

Solución:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 48 \\ 0,15x + 0,1y &= 5,7 \end{aligned}\right\}$$

Libro: x = 18 €

Cuaderno: y = 30 €

88. Hace 8 años la edad de un padre era 8 veces la de su hijo. Si dentro de 16 años la edad del padre será solamente el doble de la del hijo, ¿cuáles son las edades de ambos?

Solución:

	Ahora	Hace 8 años	Dentro de 16 años
Padre	x	x – 8	x + 16
Hijo	y	y – 8	y + 16

$$\left.\begin{aligned} x - 8 &= 8(y - 8) \\ x + 16 &= 2(y + 16) \end{aligned}\right\}$$

Edad del padre ahora: x = 40 años.

Edad del hijo ahora: y = 12 años.

89. Calcula dos números cuya diferencia es 5 y la suma de sus cuadrados es 73

Solución:

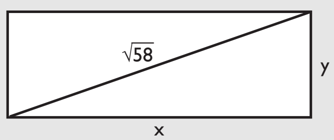
Números: x e y

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 5 \\ x^2 + y^2 &= 73 \end{aligned}\right\}$$

Los números son 8 y 3, o bien –3 y –8

90. Un rectángulo tiene 21 cm^2 de área y su diagonal mide $\sqrt{58}$. Calcula las dimensiones del rectángulo.

Solución:



$$\left.\begin{aligned} xy &= 21 \\ x^2 + y^2 &= 58 \end{aligned}\right\}$$

$x = 7, y = 3$; o bien $x = 3, y = 7$

Las dimensiones del rectángulo son 7 cm y 3 cm

El resto de soluciones no son válidas.

91. Para vallar una finca rectangular de 600 m^2 se han utilizado 100 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} xy = 600 \\ x + y = 50 \end{array}\right\}$$

x = 30, y = 20; o bien, x = 20, y = 30

Las dimensiones de la finca son 30 m y 20 m

92. La suma de dos números es 13 y la suma de sus inversos es 13/42. Calcula dichos números.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 13 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{13}{42} \end{array}\right\}$$

x = 6, y = 7; o bien, x = 7, y = 6

93. Halla dos números positivos sabiendo que su diferencia es 4 y su producto es 32

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 4 \\ xy = 32 \end{array}\right\}$$

$x_1 = 8, y_1 = 4$

$x_2 = -4, y_2 = -8$

Como se piden valores positivos, la solución negativa no es válida.

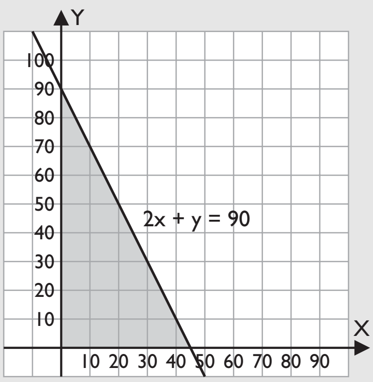
94. En una granja hacen dos clases de pienso, A y B, de forma que el tipo A requiere dos toneladas de un ingrediente vitamínico V, y el tipo B requiere 1 tonelada del mismo ingrediente. Representa en el plano la región de todas las soluciones posibles de la cantidad de pienso de los tipos A y B que se pueden fabricar si se dispone de 90 toneladas del ingrediente V.

Solución:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$2x + y \leq 90$



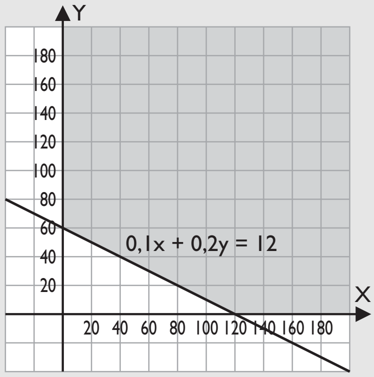
95. Para abonar una parcela de labranza se necesitan al menos 12 kg de nitrógeno. Se dispone de dos productos, P y Q, que llevan, respectivamente, un 10% y un 20% de nitrógeno. Representa en el plano la región que nos da las soluciones posibles de la cantidad de cada producto P y Q que se pueden usar.

Solución:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$0,1x + 0,2y \geq 12$



96. Una fábrica vende dos modelos de mesa, M1 y M2. Para su fabricación se necesitan 2 horas y 3 horas de trabajo manual, respectivamente, y 2 horas y 1 hora para acabado de pintura. El fabricante no puede sobrepasar las 120 horas de trabajo manual y el acabado de pintura de 100 horas al mes. Representa en el plano el recinto de las soluciones de la cantidad de mesas M1 y M2 que puede fabricar en un mes.

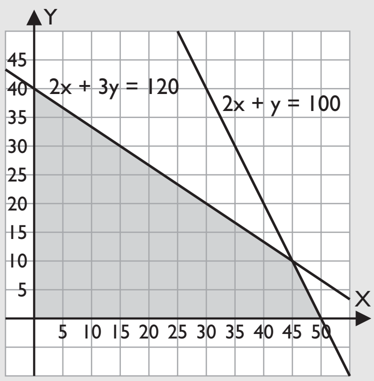
Solución:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$2x + 3y \leq 120$

$2x + y \leq 100$



Las soluciones posibles son los pares (x, y) de números enteros que hay en el recinto.

97. Se dispone de 50 € para comprar revistas de deportes y de informática. El precio de las revistas es de 3 € y 6 €, respectivamente, y se desea comprar al menos el mismo número de revistas deportivas que de informática. Representa en el plano el recinto de las soluciones del número de revistas que se pueden comprar.

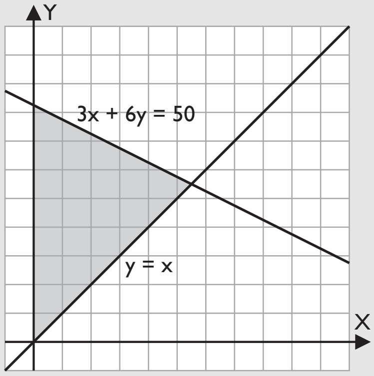
Solución:

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$3x + 6y \leq 50$

$x \leq y$



Las soluciones posibles son los pares (x, y) de números enteros que hay en el recinto.

Para profundizar

98. Analiza si para algún valor de **k** el siguiente sistema puede ser:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = k \\ 4x + 8y = 4 \end{array}\right\}$$

a) Compatible determinado.

b) Compatible indeterminado.

c) Incompatible.

Solución:

a) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} \Rightarrow$ no puede ser compatible determinado.

a) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{k}{4} \Rightarrow$ para k = 1 compatible indeterminado.

c) Para $k \neq 1$ incompatible.

99. ¿Qué condición deben cumplir **m** y **n** para que el siguiente sistema tenga solución?

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = m \\ 6x + 10y = n \end{array}\right\}$$

Solución:

Como $\frac{2}{6} \neq \frac{5}{10}$ el sistema es compatible determinado siempre.

Luego **m** y **n** pueden tomar cualquier valor.

100. En una tienda de deportes, 2 chándales y 3 pares de deportivos cuestan 216 €, y he pagado por ellos 144 €. Si en cada chándal hacen el 20% de descuento y en los deportivos el 40%, ¿cuánto costaba cada artículo?

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + \quad 3y = 216 \\ 0,8 \cdot 2x + 0,6 \cdot 3y = 144 \end{array}\right\}$$

Chándal: x = 36 €

Deportivos: y = 48 €

101. Calcula una fracción tal que si al numerador se le suma 5, es equivalente a 7/3, y si se le resta 3, es equivalente a 1

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x + 5}{y} = \frac{7}{3} \\ \frac{x - 3}{y} = 1 \end{array}\right\}$$

x = 9, y = 6. La fracción es 9/6

102. Reparte 96 € proporcionalmente a 3 y 5

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 96 \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{5} \end{array}\right\}$$

x = 36, y = 60

103. Se desea obtener 5 400 kg de harina mezclando harina de dos tipos cuyos precios son 0,42 €/kg y 0,54 €/kg, respectivamente. ¿Cuántos kilogramos de harina de cada tipo se deben mezclar para que el precio de la mezcla sea de 0,5 €/kg?

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = 5\,400 \\ 0,42x + 0,54y = 0,5(x + y) \end{array}\right\}$$

x = 1 800 kg de 0,42 €/kg

y = 3 600 kg de 0,54 €/kg

104. Se desea obtener una pieza de oro de 20 gramos fundiendo oro de una ley de 0,85 con oro de una ley de 0,75. ¿Qué cantidad de cada pieza de oro hay que fundir para obtener una ley de 0,81?

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad y = 20 \\ 0,85x + 0,75y = 0,81 \cdot 20 \end{array}\right\}$$

x = 12 g de oro de ley 0,85

y = 8 g de oro de ley 0,75

105. Las diagonales de un rombo son proporcionales a 3 y 2. El área del rombo mide 243 cm^2. Calcula las diagonales del rombo.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \\ \frac{xy}{2} = 243 \end{array}\right\} \quad x = 27, y = 18$$

Las diagonales miden: 27 cm y 18 cm

Las soluciones negativas no tienen sentido.

Paso a paso

106. Resuelve algebraica y gráficamente el siguiente sistema, clasifícalo y halla la solución si es compatible determinado.

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

107. Resuelve el sistema siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x + y &> 2 \\ 2x - y &\le 4 \end{aligned}\right\}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

108. Internet. Abre: **www.editorial-bruno.es,** elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

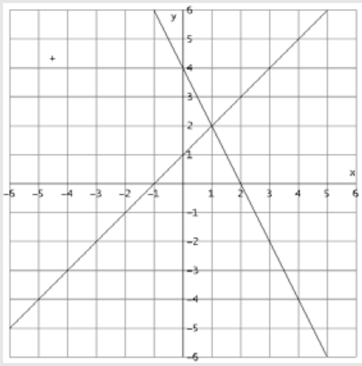
109. Resuelve algebraica y gráficamente los siguientes sistemas y, a la vista del resultado, clasifícalos:

a) $\left.\begin{aligned} x - y &= -1 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} x - y &= -4 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ x - 2y &= -2 \end{aligned}\right\}$ d) $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ 2x + 4y &= 4 \end{aligned}\right\}$

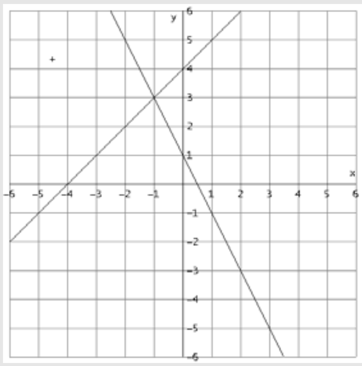
Solución:

a) $x = 1$, $y = 2$



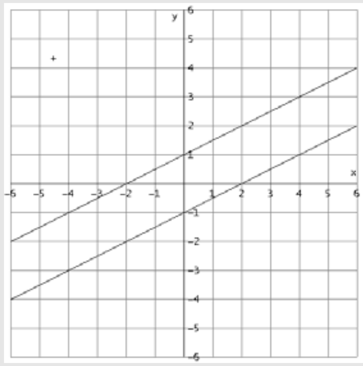
Sistema compatible determinado.

b) $x = -1$, $y = 3$



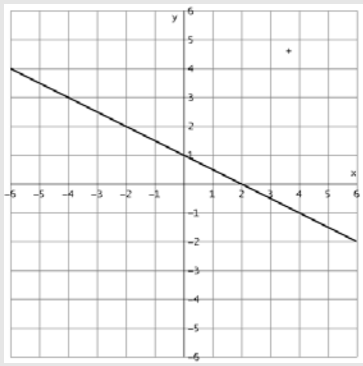
Sistema compatible determinado.

c) No tiene solución.



Sistema incompatible.

d) Infinitas soluciones.



Sistema compatible indeterminado.

110. Resuelve algebraicamente los siguientes sistemas y, a la vista del resultado, clasifícalos:

a) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 19 \\ 4x + y &= 13 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{2x - y}{2} + \frac{y}{5} &= 5 \\ \frac{5x}{6} + \frac{y - x}{2} &= 7 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) $x = 2,\ y = 5$ b) $x = 6,\ y = 10$

111. Resuelve algebraicamente los siguientes sistemas y, a la vista del resultado, clasifícalos:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 3 \\ x + y - 2z = -5 \\ 2x + y + 3z = 16 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ x + 2y - z = 7 \end{array}\right\}$

Solución:

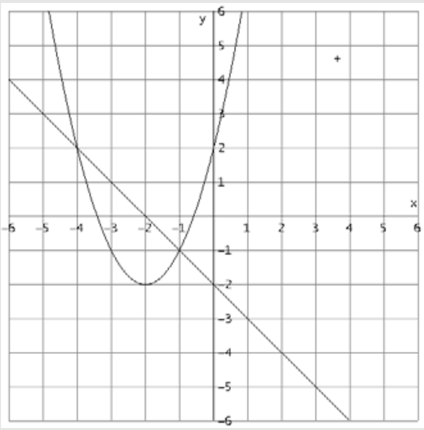
a) $x = 1,\ y = 2,\ z = 4$ b) $x = 1,\ y = 3,\ z = 0$

112. Resuelve algebraica y gráficamente los siguientes sistemas, clasifícalos y halla la solución si es compatible.

a) $\left.\begin{array}{l} y = x^2 + 4x + 2 \\ y = -x - 2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{array}\right\}$

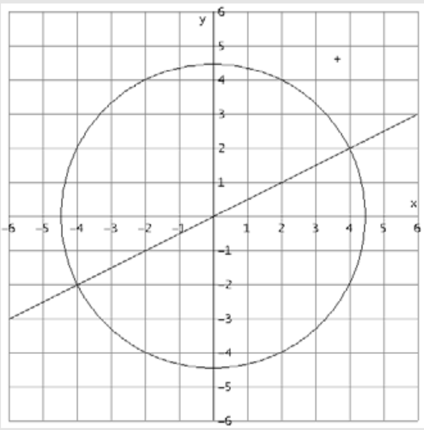
Solución:

a) $x_1 = -4,\ y_1 = 2;\ x_2 = -1,\ y_2 = -1$



Sistema compatible determinado.

b) $x_1 = 4,\ y_1 = 2;\ x_2 = -4,\ y_2 = -2$



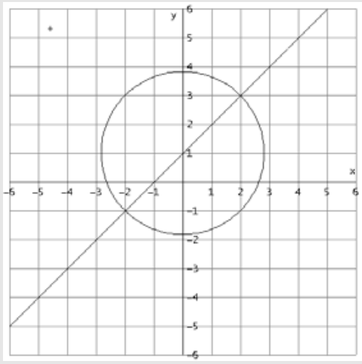
Sistema compatible determinado.

113. Resuelve algebraica y gráficamente los siguientes sistemas, clasifícalos y halla la solución si es compatible determinado.

a) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0 \\ y = x + 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 17 \\ x = 4y \end{array}\right\}$

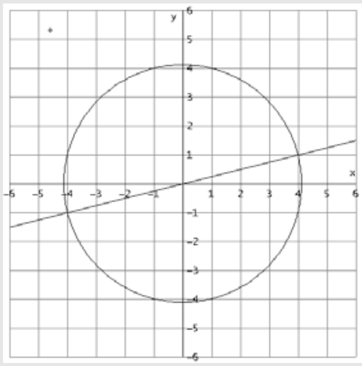
Solución:

a) $x_1 = 2,\ y_1 = 3;\ x_2 = -2,\ y_2 = -1$



Sistema compatible determinado.

b) $x_1 = 4,\ y_1 = 1;\ x_2 = -4,\ y_2 = -1$



Sistema compatible determinado.

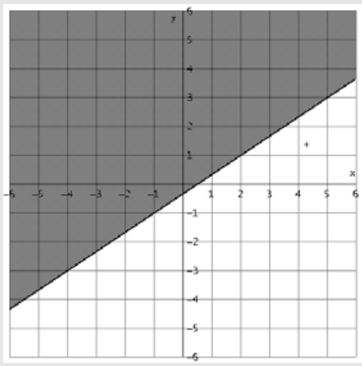
114. Resuelve gráficamente las siguientes inecuaciones:

a) $2x - 3y \leq 1$ b) $x + y < 5$

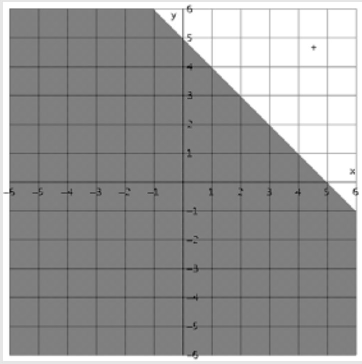
c) $2x + 3y \leq 6$ d) $x + 3y > 9$

Solución:

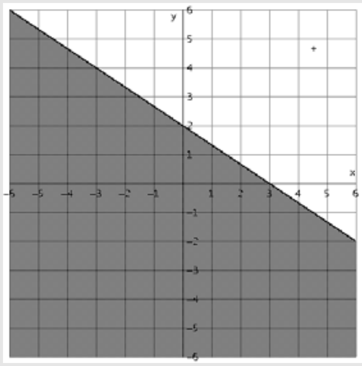
a)



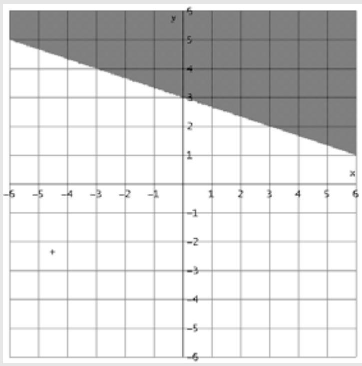
b)



c)



d)

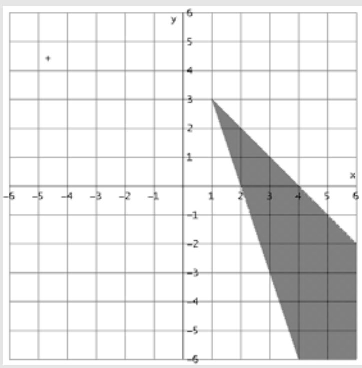


115. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

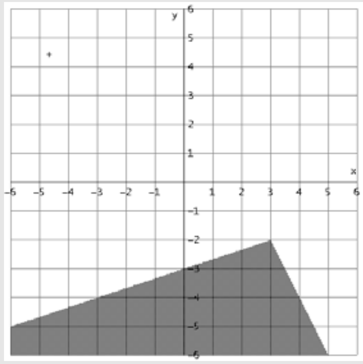
a) $\left.\begin{array}{r} x + y \le 4 \\ 3x + y \ge 6 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 2x + \ \ y < 4 \\ x - 3y \ge 9 \end{array}\right\}$

Solución:

a)



b)



Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE:

116. Un rectángulo tiene 15 cm^2 de área y su diagonal mide $\sqrt{34}$. Calcula las dimensiones del rectángulo.

Solución:

$$\begin{array}{r} xy = 15 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{array}$$

El rectángulo mide 5 cm de largo y 3 cm de ancho.

117. Se han invertido 10 000 € en tres productos financieros. Entre el segundo y el tercero son los 2/3 del primero, y entre el primero y el tercero, el 70% del total de la inversión. Calcula la cantidad que se ha invertido en cada producto.

Solución:

$$\begin{array}{l} x + y + z = 10\,000 \\ \phantom{x +{}} y + z = 2x/3 \\ x \phantom{{}+ y} + z = 7\,000 \end{array}$$

x = 6 000 €, y = 3 000 €, z = 1 000 €

BLOQUE II

Funciones

6 Funciones

1. Estudio gráfico de una función

Piensa y calcula

Indica cuál de las siguientes funciones es polinómica y cuál racional:

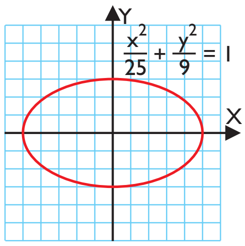
a) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x^2 - 4}$ b) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 4$

Solución:

a) Racional. b) Polinómica.

Aplica la teoría

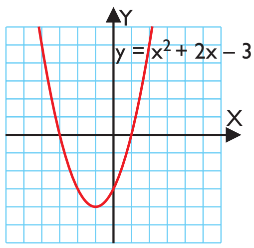
1. La siguiente gráfica, ¿es función? Razona la respuesta.



Solución:

No es una función. Por ejemplo, para $x = 0$ existen dos valores de **y,** el 3 y el -3

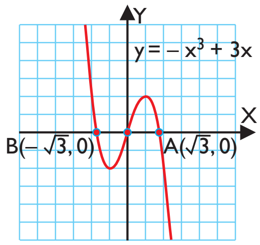
2. La siguiente gráfica, ¿es función? Razona la respuesta.



Solución:

Sí es una función, porque para cada valor de **x** existe un único valor de **y**

3. Dada la siguiente gráfica, estudia todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.



Solución:

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $B\left(-\sqrt{3}, 0\right), O(0, 0), A\left(\sqrt{3}, 0\right)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$
   - Negativa (–): $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

8. Máximos y mínimos relativos:

a) Máximo relativo: C(1, 2)

b) Mínimo relativo: D(– 1, – 2)

Monotonía:

– Creciente (↗): (– 1, 1)

– Decreciente (↘): (– ∞, – 1) ∪ (1, + ∞)

9. Puntos de inflexión: O(0, 0)

Curvatura:

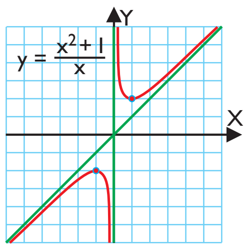
– Convexa (∪): (– ∞, 0)

– Cóncava (∩): (0, + ∞)

10. Recorrido o imagen:

Im(f) = ℝ = (– ∞, + ∞)

4. Dada la siguiente gráfica, estudia todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.



Solución:

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = ℝ – {0} = (– ∞, 0) ∪ (0, + ∞)
3. Continuidad: es discontinua en x = 0
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:

– Verticales: x = 0

– Horizontales: no tiene.

– Oblicuas: y = x

7. Corte con los ejes: no corta a ninguno de los ejes.

Signo:

– Positiva (+): (0, + ∞)

– Negativa (–): (– ∞, 0)

8. Máximos y mínimos relativos:

a) Máximo relativo: A(– 1, – 2)

b) Mínimo relativo: B(1, 2)

Monotonía:

– Creciente (↗): (– ∞, – 1) ∪ (1, + ∞)

– Decreciente (↘): (– 1, 0) ∪ (0, 1)

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

– Convexa (∪): (0, + ∞)

– Cóncava (∩): (– ∞, 0)

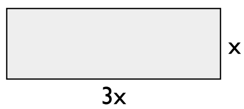
10. Recorrido o imagen:

Im(f) = (– ∞, – 2] ∪ [2, + ∞)

2. Funciones reales de variable real

Piensa y calcula

Considera los rectángulos con un lado de triple longitud que el otro. Expresa el perímetro y el área en función del lado menor.

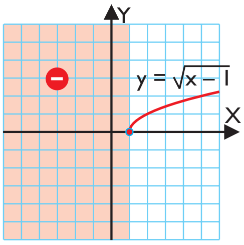


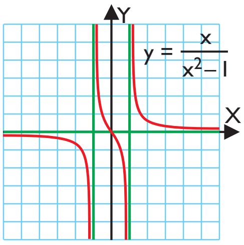
Solución:

P(x) = 8x   A(x) = $3x^2$

Aplica la teoría

5. Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a) 

b) 

Solución:

a) Irracional. $\text{Dom}(f) = [1, +\infty)$

b) Racional. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =$

$= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

6. Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a) $y = x^3 - 4x^2 + 5$

b) $y = \dfrac{4}{x - 5}$

c) $y = \dfrac{x + 3}{x^2 - 4}$

d) $y = \sqrt{x + 1}$

Solución:

a) Polinómica. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

b) Racional.

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{5\} = (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$

c) Racional. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} =$

$= (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

d) Irracional. $\text{Dom}(f) = [-1, +\infty)$

7. Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a) $y = 2^x$

b) $y = \log x$

c) $y = \log_2 (x - 3)$

d) $y = \text{sen}\,(x + 1)$

Solución:

a) Exponencial. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

b) Logarítmica. $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$

c) Logarítmica. $\text{Dom}(f) = (3, +\infty)$

d) Trigonométrica. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

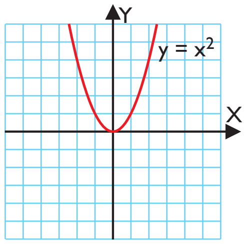
8. A partir de la gráfica de $y = f(x)$, dibuja la traslación que se pide en cada caso y halla su ecuación.

a) $f(x) + 2$

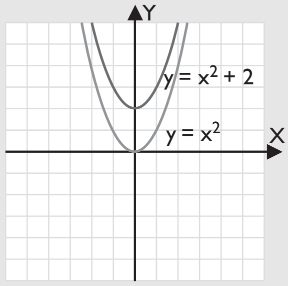
b) $f(x + 2)$

c) $f(x - 1)$

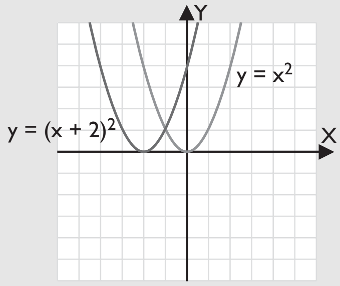
d) $f(x - 2) + 1$



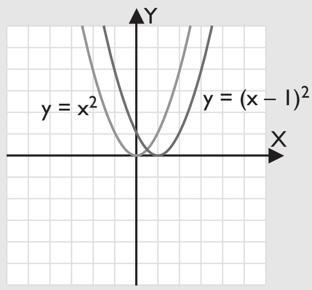
Solución:

a) 

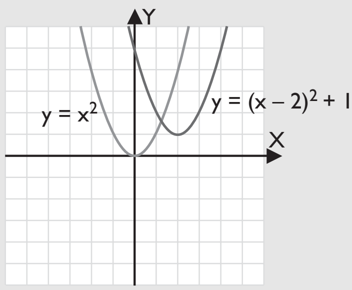
$y = x^2 + 2$

b) 

$y = (x + 2)^2 \Rightarrow y = x^2 + 4x + 4$

c) 

$y = (x - 1)^2 \Rightarrow y = x^2 - 2x + 1$

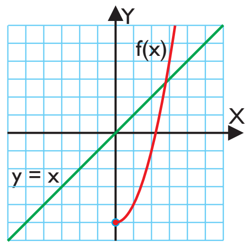
d) 

$y = (x - 2)^2 + 1 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 5$

3. Operaciones con funciones

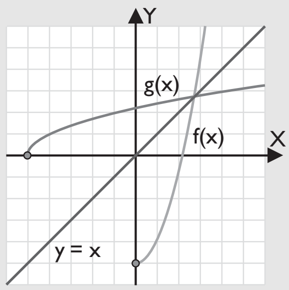
■ Piensa y calcula

Dada la gráfica de la función f(x), dibuja la gráfica g(x) simétrica respecto de la recta $y = x$
Calcula el dominio y el recorrido o imagen de f(x) y de g(x). ¿Qué relación existe entre ellos?



Solución:

$\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$, $\mathrm{Im}(f) = [-5, +\infty)$
$\mathrm{Dom}(g) = [-5, +\infty)$, $\mathrm{Im}(g) = [0, +\infty)$
$\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Im}(g)$ y $\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Im}(f)$



● Aplica la teoría

9. Calcula $g \circ f$ y $f \circ g$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 2$

b) $f(x) = x^2 - 3x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$

Solución:
a) $(g \circ f)(x) = x + 2$, $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 2}$
b) $(g \circ f)(x) = \operatorname{sen}(x^2 - 3x)$
$(f \circ g)(x) = \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x$

10. Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

a) $y = 3x + 2$ b) $y = \sqrt{x - 1}$

c) $y = \dfrac{x + 2}{x - 3}$ d) $y = x^2 + 3; x \geq 0$

Solución:

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 2}{3}$ b) $f^{-1}(x) = x^2 + 1$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x + 2}{x - 1}$ d) $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 3}$

11. Indica si las siguientes funciones son pares, impares o no son ni pares ni impares, y calcula su simetría:

a) $y = x^2 - 9$ b) $y = x^2 - 4x$

c) $y = \dfrac{2}{x}$ d) $y = \dfrac{3x - 5}{x - 2}$

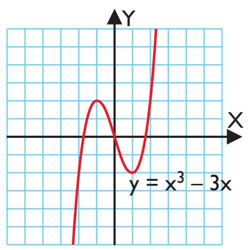
Solución:
a) Par $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje Y
b) Ni par, ni impar.
c) Impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen O(0, 0)
d) Ni par, ni impar.

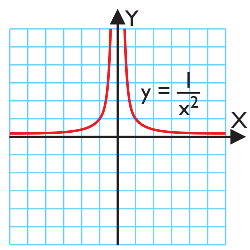
12. Calcula la composición $f \circ g$ y $g \circ f$, siendo $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

Solución:
$f \circ g(x) = f\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$

$g \circ f(x) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$

13. Indica si las siguientes funciones son pares o impares analizando la gráfica:

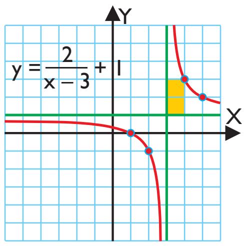
a)


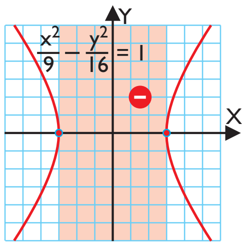
b)


Solución:
a) Impar $\Rightarrow$ Simétrica respecto del origen O(0, 0)
b) Par $\Rightarrow$ Simétrica respecto del eje Y

1. Estudio gráfico de una función

14 Indica cuál de las siguientes gráficas es función.

a) 

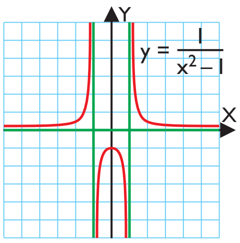
b) 

Solución:

a) Sí es función, porque para cada valor de **x** existe un único valor de **y**

b) No es función. Por ejemplo, para x = 4 existen dos valores de **y**

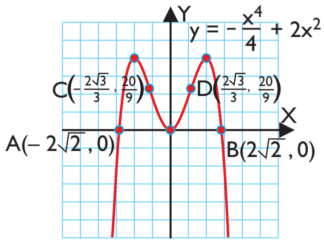
15. Dada la siguiente gráfica, estudia todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.



Solución:

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:
   $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   – Verticales: $x = -1, x = 1$
   – Horizontales: $y = 0$
   – Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes: $A(0, -1)$
   Signo:
   – Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   – Negativa (–): $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   – Máximo relativo: $A(0, -1)$
   Monotonía:
   – Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
   – Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$
   Curvatura:
   – Convexa (∪): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   – Cóncava (∩): $(-1, 1)$
10. Recorrido o imagen:
   $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

16. Dada la siguiente gráfica, estudia todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.



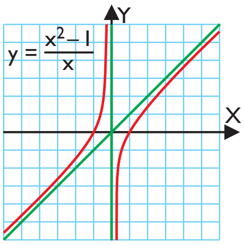
Solución:

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   – Eje X: $A(-2\sqrt{2}, 0), O(0, 0), B(2\sqrt{2}, 0)$
   – Eje Y: $O(0, 0)$
   Signo:
   – Positiva (+): $(-2\sqrt{2}, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$
   – Negativa (–): $(-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   – Máximo relativo: $E(-2, 4), F(2, 4)$
   – Mínimo relativo: $O(0, 0)$
   Monotonía:
   – Creciente (↗): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
   – Decreciente (↘): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $C\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right), D\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$
   Curvatura:
   – Convexa (∪): $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$
   – Cóncava (∩): $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$
10. Recorrido o imagen:
   $\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$

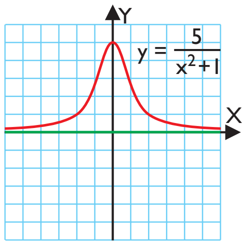
2. Funciones reales de variable real

17. Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a)



b)



Solución:

a) Racional. Dom(f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

b) Racional. Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

18. Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a) $y = x^4 - x^2 + 1$ b) $y = \dfrac{2}{x + 3}$

c) $y = \dfrac{x + 1}{x^2 - x - 6}$ d) $y = 3 + \sqrt{x + 2}$

Solución:

a) Polinómica. Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

b) Racional.

Dom(f) = $\mathbb{R} - \{-3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$

c) Racional.

Dom(f) = $\mathbb{R} - \{-2, 3\} =$

$= (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$

d) Irracional. Dom(f) = $[-2, +\infty)$

19. Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a) $y = 2x^3 - 7x^2 + 3x - 4$ b) $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$

c) $y = \dfrac{x}{(x - 2)^2}$ d) $y = \sqrt{4 - 2x}$

Solución:

a) Polinómica. Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

b) Racional.

Dom(f) = $\mathbb{R} - \{-1, 0\} =$

$= (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

c) Racional. Dom(f) = $\mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

d) Irracional. Dom(f) = $(-\infty, 2]$

20. Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

c) $y = L\,(x - 2)$ d) $y = \cos\,(x - \pi)$

Solución:

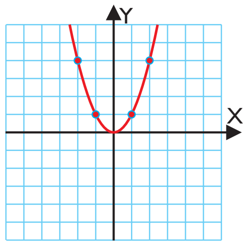
a) Exponencial. Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

b) Exponencial. Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

c) Logarítmica. Dom(f) = $(2, +\infty)$

d) Trigonométrica. Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

21. A partir de la gráfica de y = f(x), dibuja las gráficas siguientes y halla su ecuación:

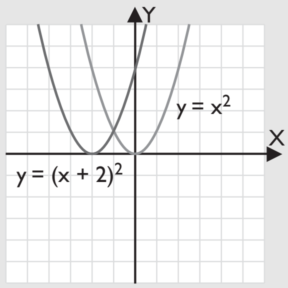


a) $y = f(x + 2)$ b) $y = f(x) - 5$

c) $y = f(x - 3) + 1$ d) $y = f(x + 1) - 2$

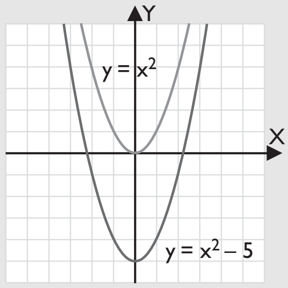
Solución:

a)



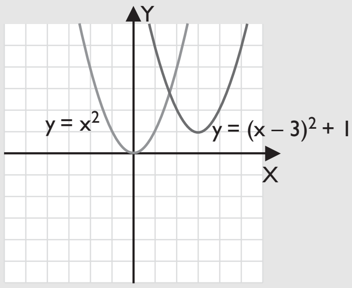
$y = x^2 + 4x + 4$

b)



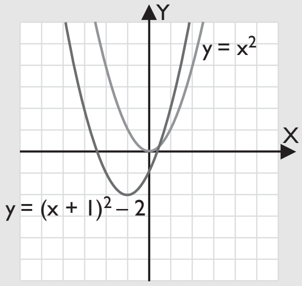
$y = x^2 - 5$

c)



$y = x^2 - 6x + 10$

d)

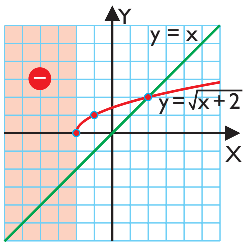


$y = x^2 + 2x - 1$

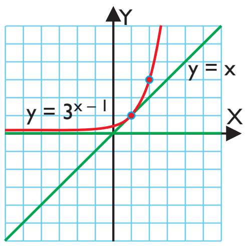
3. Operaciones con funciones

22. Dibuja la función inversa de $y = f(x)$ en cada caso y halla su fórmula.

a)

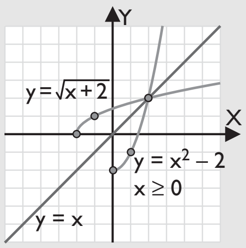


b)

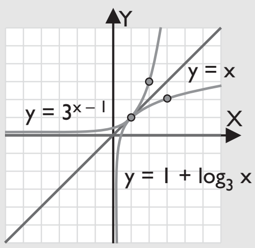


Solución:

a)



b)



23. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = \sqrt{x}$, calcula:

a) $g \circ f$

b) $f \circ g$

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

b) $(f \circ g)(x) = x - 4$

24. Dadas las funciones $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = 2x + 1$, calcula:

a) $g \circ f$

b) $f \circ g$

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = 1 + 2 \text{ sen } x$

b) $(f \circ g)(x) = \text{sen } (2x + 1)$

25. Calcula la función inversa de $y = f(x)$ en los siguientes casos:

a) $y = 2x + 1$

b) $y = -3x + 2$

Solución:

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 1}{2}$

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{2 - x}{3}$

26. Calcula la función inversa de $y = f(x)$ en los siguientes casos:

a) $y = \dfrac{x}{x + 3}$

b) $y = x^2 - 4; x \geq 0$

Solución:

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x}{1 - x}$

b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 4}$

27. Indica si las siguientes funciones son pares, impares o ni pares ni impares, y calcula su simetría:

a) $y = x$

b) $y = x + 3$

c) $y = \dfrac{3}{x}$

d) $y = x^2 + 2$

Solución:

a) Es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen de coordenadas $O(0, 0)$

b) No es par, ni impar.

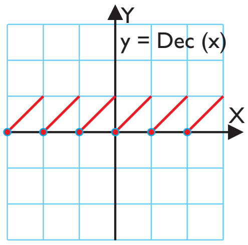
c) Es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen de coordenadas $O(0, 0)$

d) Es par $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje Y

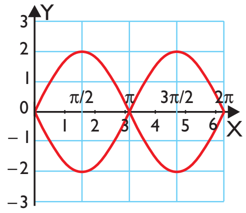
Para ampliar

28. Indica cuál de las siguientes gráficas es función:

a)



b)

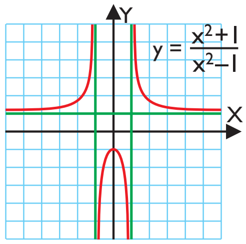


Solución:

a) Es función: $y = \text{Dec}(x)$

b) No es función.

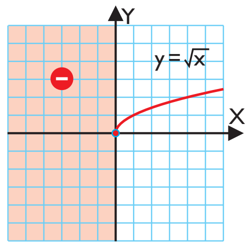
29. Dada la siguiente gráfica, halla todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.



Solución:

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =$
   $= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   – Verticales: $x = -1, x = 1$
   – Horizontales: $y = 1$
   – Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   – Eje X: no corta.
   – Eje Y: $A(0, -1)$
   Signo:
   – Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   – Negativa (–): $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   a) Máximo relativo: $A(0, -1)$
   b) Mínimo relativo: no tiene.
   Monotonía:
   – Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
   – Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
   Curvatura:
   – Convexa (∪): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   – Cóncava (∩): $(-1, 1)$
10. Recorrido o imagen:
   $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

30. Dada la siguiente gráfica, halla todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.



Solución:

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en $[0, +\infty)$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica.
6. Asíntotas:
   – Verticales: no tiene.
   – Horizontales: no tiene.
   – Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   – Eje X: $O(0, 0)$
   – Eje Y: $O(0, 0)$
   Signo:
   – Positiva (+): $(0, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   a) Máximo relativo: no tiene.
   b) Mínimo relativo: $O(0, 0)$
   Monotonía:
   – Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   – Decreciente (↘): $\varnothing$

9. Puntos de inflexión: no tiene.
   Curvatura:
   – Convexa ($\cup$): $\varnothing$
   – Cóncava ($\cap$): $(0, +\infty)$

10. Recorrido o imagen:
   $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} = [0, +\infty)$

31. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x-5}}$

b) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

Solución:

a) $\mathrm{Dom}(f) = (5, +\infty)$

b) $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

32. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = L\,\dfrac{x+2}{x-3}$

b) $y = L\,\sqrt{x}$

c) $y = \operatorname{sen}\dfrac{2}{x}$

d) $y = e^{\sqrt{x}}$

Solución:

a) $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

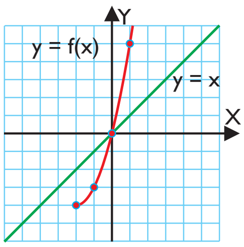
b) $\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$

c) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

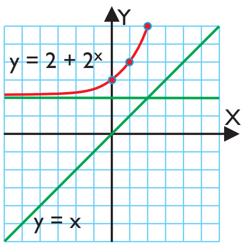
d) $\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty)$

33. Dibuja la función inversa de $y = f(x)$ en cada caso:

a)

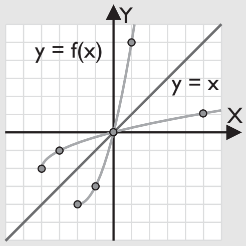


b)

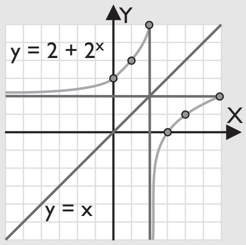


Solución:

a)



b)



34. Dadas las funciones $f(x) = \operatorname{tg} x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$, calcula:

a) $g \circ f$ b) $f \circ g$

c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$

b) $(f \circ g)(x) = \operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$

c) $(f \circ f)(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)$

d) $(g \circ g)(x) = x$

35. Calcula la función inversa de la función $y = f(x)$ en los siguientes casos:

a) $y = \sqrt{x+2}$

b) $y = x^2 - 5;\ x \geq 0$

c) $y = \dfrac{x}{x-3}$

d) $y = \dfrac{x-2}{x-1}$

Solución:

a) $y = x^2 - 2$ si $x \geq 0$

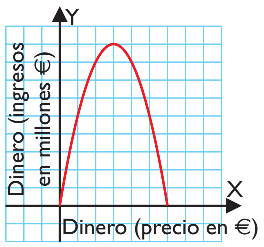
b) $y = \sqrt{x+5}$ si $x \geq 0$, o bien $y = -\sqrt{x+5}$ si $x \leq 0$

c) $y = \dfrac{3x}{x-1}$

d) $y = \dfrac{x-2}{x-1}$

Problemas

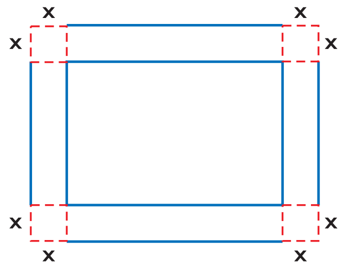
36. En la gráfica adjunta se representan los ingresos en función del precio de cada cuaderno que fabrica una empresa y que se vende. Describe las características de la gráfica.



Solución:

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: Dom(f) = [0, 6]
3. Continuidad: es continua en su dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: Simétrica respecto a x = 3
6. Asíntotas:
   – Verticales: no tiene.
   – Horizontales: no tiene.
   – Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   – Eje X: O(0, 0) y (6 0)
   – Eje Y: O(0, 0)
   Signo:
   – Positiva (+): (0, 6)
8. Máximos y mínimos relativos:
   a) Máximo relativo: (3, 9)
      Para 3 € se alcanzan unos ingresos de 9 millones.
   b) Mínimo relativo: no tiene.
   Monotonía:
   – Creciente (↗): (0, 3)
   – Decreciente (↘): (3, 6)
9. Puntos de inflexión: no tiene.
   Curvatura:
   – Cóncava (∩): (0, 6)
10. Recorrido o imagen:
    Im(f) = [0, 9]

37. En un cartón rectangular de 8 cm de largo por 6 cm de ancho, se cortan, en los vértices, cuatro cuadrados de **x** cm de lado para construir una caja. Escribe la función que da el volumen de dicha caja en función de la longitud **x** y calcula su dominio de definición.



Solución:

V(x) = (8 – 2x)(6 – 2x) x

$V(x) = 4x^3 - 28x^2 + 48x$

Dom(V) = [0, 3]

38. El perímetro de un rectángulo mide 10 m. Expresa el área del rectángulo en función del lado **x** de la base. Calcula el dominio de definición de la función.

Solución:

A(x) = x(5 – x)

$A(x) = 5x - x^2$

Dom(A) = [0, 5]

39. El precio de venta al público de una revista en función del número, en miles, de ejemplares editados, **x,** es

p(x) = 4 – x/2

Escribe la función de los ingresos que se obtienen dependiendo de los ejemplares editados, y calcula el dominio de definición.

Solución:

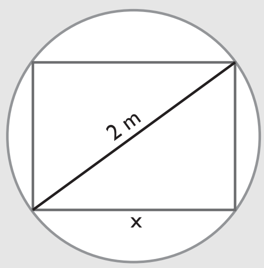
I(x) = x · p(x) = x (4 – x/2)

$I(x) = 4x - x^2/2$

Dom(I) = [0, 8]

40. Escribe una función que exprese el área de un rectángulo inscrito en una circunferencia de 1 m de radio en función del lado **x** de la base. ¿Cuál es su dominio de definición?

Solución:



$A(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

Dom(A) = [0, 2]

41. Halla la función que da la longitud del lado de un cuadrado en función del área y calcula su dominio.

Solución:
$L(x) = \sqrt{x}$
$Dom(L) = [0, +\infty)$

Para profundizar

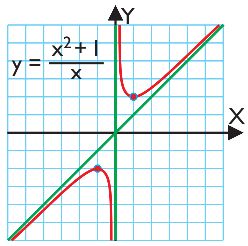
42. Dadas las funciones

$$f(x) = \cos x \text{ y } g(x) = x^2$$

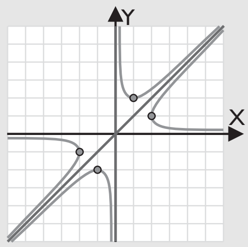
calcula $f \circ g \circ f$

Solución:
$(f \circ g \circ f)(x) = (f \circ g)(\cos x) = f(\cos^2 x) = \cos(\cos^2 x)$

43. Dada la gráfica de la función $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$, dibuja la inversa.



Solución:



No es función.

Paso a paso

44. Dibuja la siguiente función y completa el formulario de los diez apartados:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

45. Dibuja la función: $\mathbf{y = e^x}$; halla la función inversa y represéntala. Dibuja la recta $\mathbf{y = x}$; observa que la función inicial y su inversa son simétricas respecto de dicha recta.

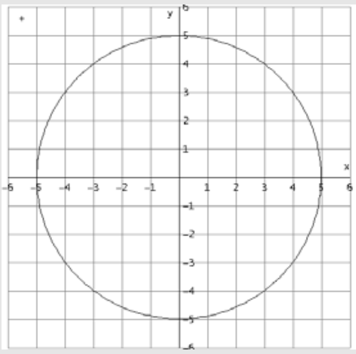
Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

46. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es,** elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

47. Representa la siguiente curva y a la vista de la gráfica razona si es función o no lo es: $x^2 + y^2 = 25$

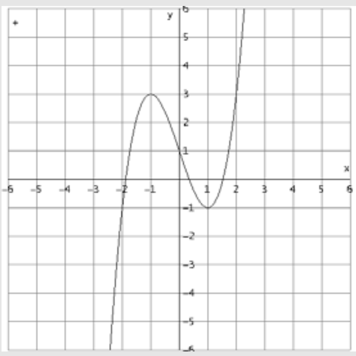
Solución:



No es función porque para algunos valores de **x** existen varios valores de **y;** por ejemplo, para $x = 3$ se tiene $y = 4$, $y = -4$

48. Representa la siguiente curva y a la vista de la gráfica razona si es función o no lo es: $y = x^3 - 3x + 1$

Solución:

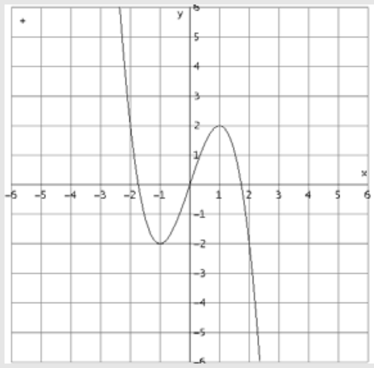


Sí es función porque para cada valor de **x** existe un único valor de **y**

49. Representa la siguiente función y completa los 10 apartados del formulario:

$$y = -x^3 + 3x$$

Solución:



1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   – Eje X: $B(-\sqrt{3}, 0)$, $O(0, 0)$, $A(\sqrt{3}, 0)$
   – Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:

   – Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

   – Negativa (–): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   a) Máximo relativo: C(1, 2)
   b) Mínimo relativo: D(– 1, – 2)

Monotonía:

– Creciente (↗): (– 1, 1)

– Decreciente (↘): (– ∞, – 1) ∪ (1, + ∞)

9. Puntos de inflexión: O(0, 0)

Curvatura:

– Convexa (∪): (– ∞, 0)

– Cóncava (∩): (0, + ∞)

10. Recorrido o imagen:

Im(f) = ℝ = (– ∞, + ∞)

Monotonía:

– Creciente (↗): (– ∞, – 1) ∪ (1, + ∞)

– Decreciente (↘): (– 1, 0) ∪ (0, 1)

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

– Convexa (∪): (0, + ∞)

– Cóncava (∩): (– ∞, 0)

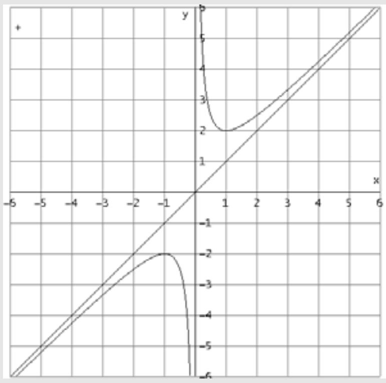
10. Recorrido o imagen:

Im(f) = (– ∞, – 2] ∪ [2, + ∞)

50. Representa la siguiente función y completa los 10 apartados del formulario:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Solución:

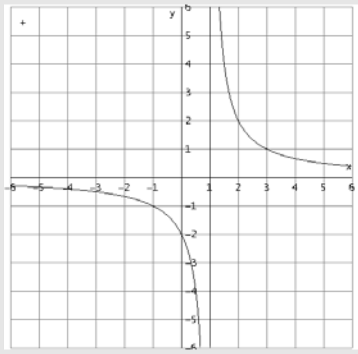


1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = ℝ – {0} = (– ∞, 0) ∪ (0, + ∞)
3. Continuidad: es discontinua en x = 0
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   – Verticales: x = 0
   – Horizontales: no tiene.
   – Oblicuas: y = x
7. Corte con los ejes: no corta a ninguno de los ejes.
   Signo:
   – Positiva (+): (0, + ∞)
   – Negativa (–): (– ∞, 0)
8. Máximos y mínimos relativos:
   a) Máximo relativo: A(– 1, – 2)
   b) Mínimo relativo: B(1, 2)

51. Clasifica, representa y halla el dominio y el recorrido o imagen de:

$$y = \frac{2}{x - 1}$$

Solución:



Función racional.

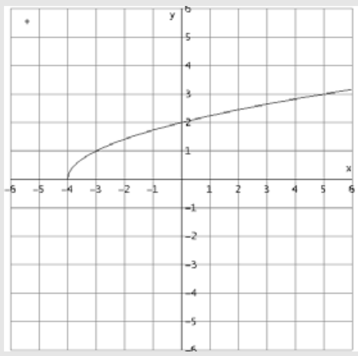
Dom (f) = ℝ – {1} = (– ∞, 1) ∪ (1, + ∞)

Im (f) = (– ∞, 0) ∪ (0, + ∞)

52. Clasifica, representa y halla el dominio y el recorrido o imagen de:

$$y = \sqrt{x + 4}$$

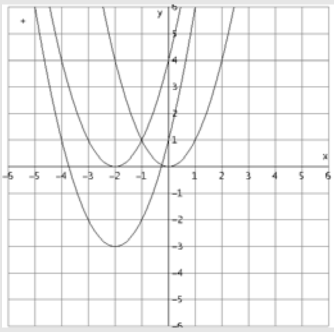
Solución:



Función irracional.
Dom (f) = $[-4, +\infty)$
Im (f) = $[0, +\infty)$

53. Dibuja la función $y = x^2$
a) Trasládala 2 unidades a la izquierda.
b) Traslada la curva obtenida 3 unidades hacia abajo.

Solución:



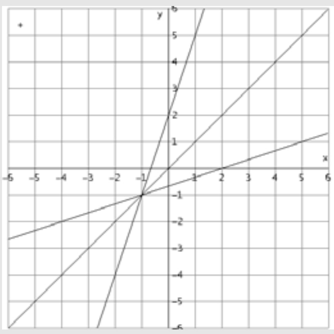
54. Represente la función:

$$y = 3x + 2$$

Halla la función inversa y represéntala. Representa la recta **y = x,** observa que la función inicial y su inversa son simétricas respecto de dicha recta.

Solución:

$f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$



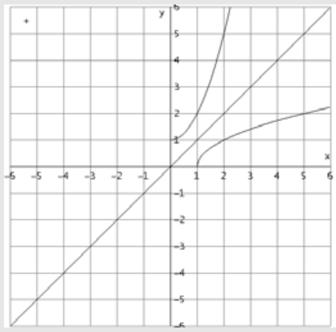
f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta y = x

55. Representa la siguiente función, halla su función inversa y represéntala. Representa la recta **y = x,** observa que la función inicial y su inversa son simétricas respecto de dicha recta.

$$y = \sqrt{x-1}$$

Solución:

$f^{-1}(x) = \text{IF}(x > 0, x^2 + 1)$

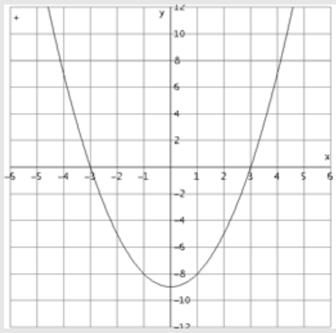


f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta y = x

56. Indica si las siguientes funciones son pares, impares, o no son ni pares ni impares y calcula su simetría:
a) $y = x^2 - 9$ b) $y = x^2 - 4x$

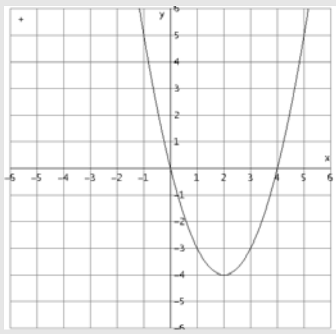
Solución:

a)



$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ función par.
Es simétrica respecto del eje Y

b)



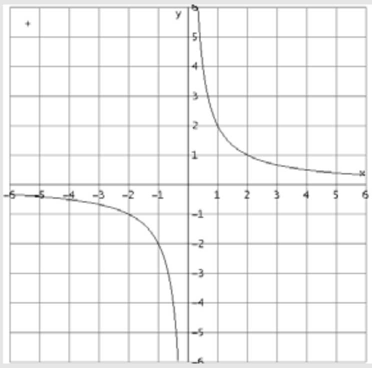
$f(-x) \neq f(x) \Rightarrow$ no es par.
No es simétrica respecto del eje Y
$f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow$ no es impar.
No es simétrica respecto del origen O(0, 0)
En el dibujo se observa que es simétrica respecto a la recta x = 2

57. Indica si las siguientes funciones son pares, impares, o no son ni pares ni impares y calcula su simetría:

a) $y = \frac{2}{x}$ b) $y = \frac{3x - 5}{x - 2}$

Solución:

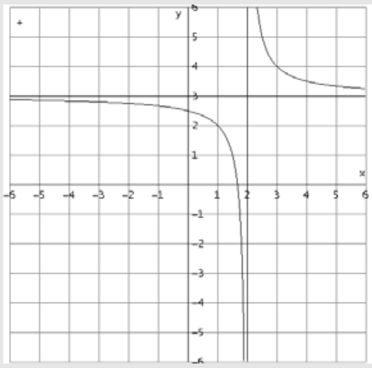
a)



$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ función impar.

Es simétrica respecto del origen O(0, 0)

b)



$f(-x) \neq f(x) \Rightarrow$ no es par.

No es simétrica respecto del eje Y

$f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow$ no es impar.

No es simétrica respecto del origen O(0, 0)

En el dibujo se observa que es simétrica respecto del punto A(2, 3)

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Wiris o DERIVE.

58. Halla la función que calcula el área de todos los rectángulos de perímetro 8 m

a) Haz la representación gráfica.

b) ¿Qué figura se obtiene?

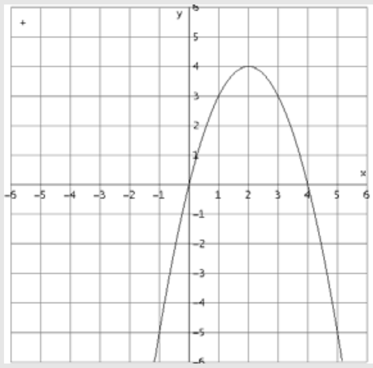
c) Qué dimensiones tiene el rectángulo cuando el área es máxima.

Solución:

a) Base = x

Altura = 4 – x

$y = x(4 - x) = 4x - x^2$



b) Una parábola.

c) El rectángulo es un cuadrado de lado x = 2 m y el área máxima mide 4 m^2

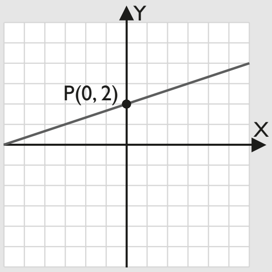
7 Funciones algebraicas y trascendentes

1. Funciones polinómicas

Piensa y calcula

Dibuja una recta que tenga de pendiente $\frac{1}{3}$ y pase por el punto P(0, 2)

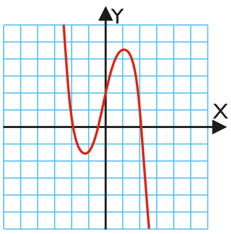
Solución:



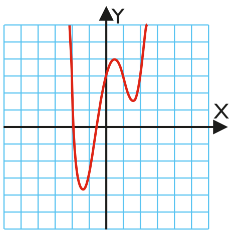
Aplica la teoría

1. Analiza de qué grado pueden ser las funciones polinómicas siguientes. ¿Qué signo tiene el coeficiente principal?

a)



b)



Solución:

a) De 3er grado. El coeficiente principal es negativo.

b) De 4º grado. El coeficiente principal es positivo.

2. Representa las siguientes rectas, halla la pendiente y la ordenada en el origen:

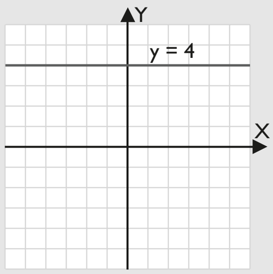
a) $y = 4$ b) $y = -2$

c) $y = \frac{3x}{2}$ d) $y = -2x$

e) $y = x + 3$ f) $y = -\frac{2x}{3} + 4$

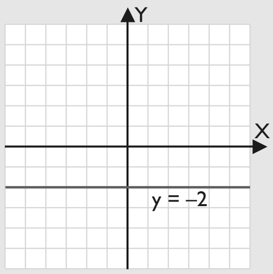
Solución:

a)



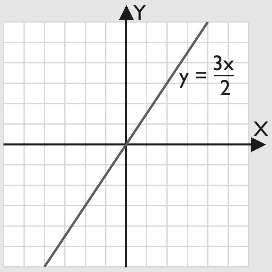
m = 0, ordenada en el origen: 4

b)



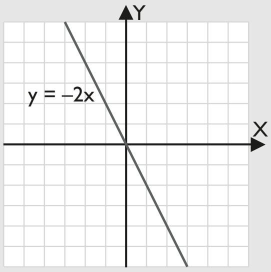
m = 0, ordenada en el origen: –2

c)



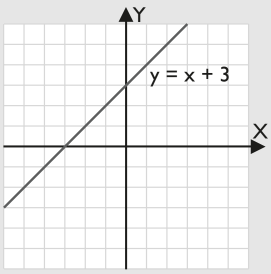
m = 3/2, ordenada en el origen: 0

d)



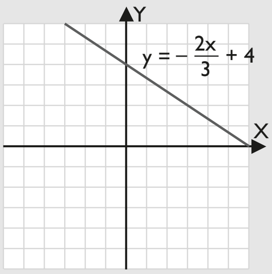
m = – 2, ordenada en el origen: 0

e)



m = 1, ordenada en el origen: 3

f)



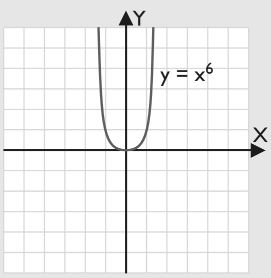
m = – 2/3, ordenada en el origen: 4

3. Haz un dibujo aproximado de las funciones:

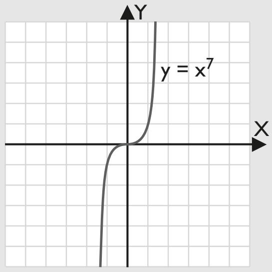
a) $y = x^6$ b) $y = x^7$

Solución:

a)

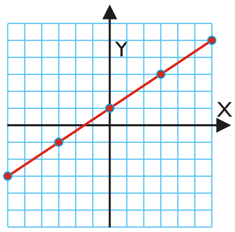


b)

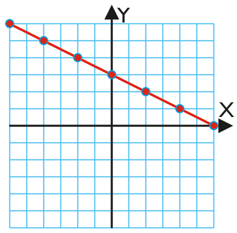


4. Escribe la ecuación de cada una de las siguientes rectas:

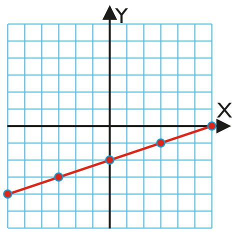
a)



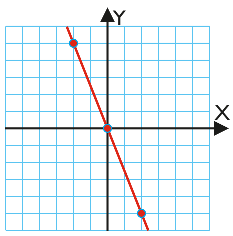
b)



c)



d)



Solución:

a) $y = \frac{2x}{3} + 1$

b) $y = -\frac{x}{2} + 3$

c) $y = \frac{x}{3} - 2$

d) $y = -\frac{5x}{2}$

2. Función cuadrática

Piensa y calcula

Dada la fórmula del eje de simetría de una parábola $x = -\frac{b}{2a}$, despeja mentalmente **b**

En una parábola, se conoce el eje x = 3 y a = 1. ¿Cuánto vale **b?**

Solución:

$b = -2ax \Rightarrow b = -6$

Aplica la teoría

5. Representa la parábola $y = x^2$, y, a partir de ella, las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 1$

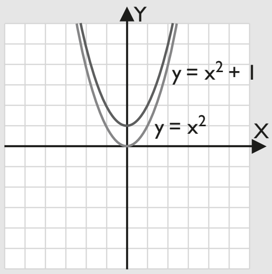
b) $y = (x + 1)^2$

c) $y = (x - 2)^2 + 3$

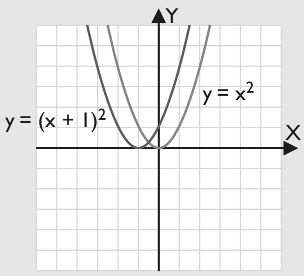
d) $y = x^2 - 5$

Solución:

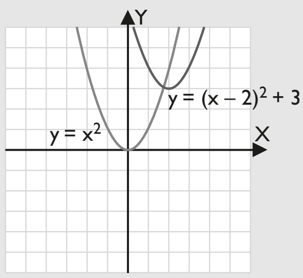
a)



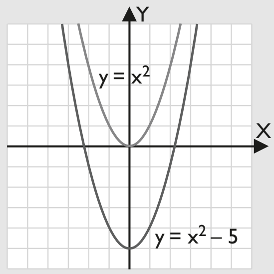
b)



c)



d)



6. Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 6x + 5$

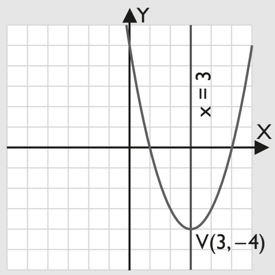
b) $y = -x^2 - 2x + 3$

c) $y = 2x^2 + 4x - 1$

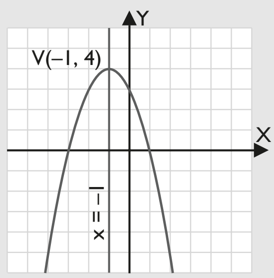
d) $y = -3x^2 - 6x + 2$

Solución:

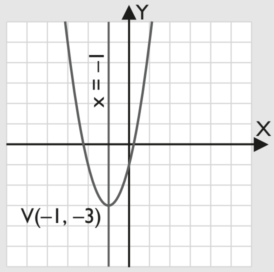
a)



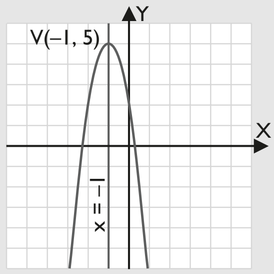
b)



c)

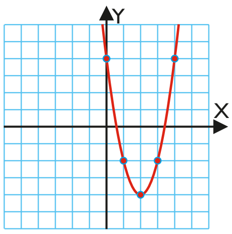


d)

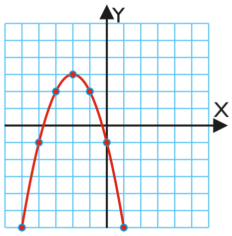


7. Halla las fórmulas de las siguientes parábolas:

a)



b)

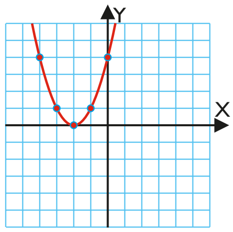


Solución:

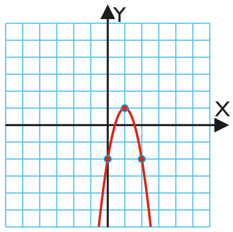
a) $y = 2x^2 - 8x + 4$ b) $y = -x^2 - 4x - 1$

8. Halla las fórmulas de las siguientes parábolas:

a)



b)



Solución:

a) $y = x^2 + 4x + 4$ b) $y = -3x^2 + 6x - 2$

9. El número de bolígrafos vendidos en una papelería viene dado por la función $f(x) = 6 - x$, siendo **x** el precio en euros. Calcula:

a) la función de ingresos, $I(x)$

b) el número de bolígrafos que hay que vender para que los ingresos sean máximos.

Solución:

a) $I(x) = 6x - x^2$

b) V(3, 9), que es el máximo. Hay que vender 3 bolígrafos.

3. Interpolación y extrapolación

Piensa y calcula

En un horno microondas se han medido los tiempos que tarda en descongelarse la carne en función del peso, obteniéndose los siguientes resultados:

x: peso (g)	100	200	300	400	500
y: tiempo (min)	2,5	5	7,5	10	12,5

Escribe la fórmula de la función lineal $y = mx$ que se ajusta a los datos.

Solución:

$m = 2,5 : 100 = 0,025$

$y = 0,025x$

Aplica la teoría

10. Calcula la recta que pasa por los puntos A(– 3, – 2) y B(3, 4). Interpola el valor de la función para x = 1 y extrapola el valor de la función para x = 5

Solución:

$y = mx + b$

$\left.\begin{array}{r} -3m + b = -2 \\ 3m + b = 4 \end{array}\right\}$

$m = 1, b = 1$

$y = x + 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 2$

$x = 5 \Rightarrow y = 6$

11. Calcula la parábola que pasa por los puntos A(– 4, 1), B(– 1, – 2) y C(1, 6). Interpola el valor de la función para x = – 2 y extrapola el valor de la función para x = 4

Solución:

$y = ax^2 + bx + c$

$\left.\begin{array}{r} 16a - 4b + c = 1 \\ a - b + c = -2 \\ a + b + c = 6 \end{array}\right\}$

$a = 1, b = 4, c = 1$

$y = x^2 + 4x + 1$

$x = -2 \Rightarrow y = -3$

$x = 4 \Rightarrow y = 33$

12. En la tabla adjunta se recogen las presiones de vapor de agua en función de la temperatura:

x: temperatura (°C)	10	30
y: presión (mm Hg)	9,5	31,5

a) Calcula por interpolación lineal la presión del vapor de agua a la temperatura x = 15 °C

b) Calcula por extrapolación lineal la presión del vapor de agua a la temperatura x = 20 °C

Solución:

$y = mx + b$

$\left.\begin{array}{r} 10m + b = 9,5 \\ 30m + b = 31,5 \end{array}\right\}$

$m = \frac{11}{10}, b = -\frac{3}{2}$

$y = \frac{11}{10}x - \frac{3}{2}$

a) x = 15 °C $\Rightarrow$ y = 15 mm Hg

b) x = 20 °C $\Rightarrow$ y = 20,5 mm Hg

13. Un instalador de redes informáticas determina que puede ofertar instalaciones de 100 m, 200 m y 300 m a 500 €, 800 € y 900 €, respectivamente, con un tope de 300 m de longitud.

a) Calcula la fórmula de la parábola que pasa por los tres puntos.

b) Determina qué instalación haría por 400 €

Solución:

a) $y = ax^2 + bx + c$

$\left.\begin{array}{r} 10\,000a + 100b + c = 500 \\ 40\,000a + 200b + c = 800 \\ 90\,000a + 300b + c = 900 \end{array}\right\}$

$a = -1/100, b = 6, c = 0$

$y = -x^2/100 + 6x$

b) $-x^2/100 + 6x = 400$

x = 76,39 m; x = 523,61 m

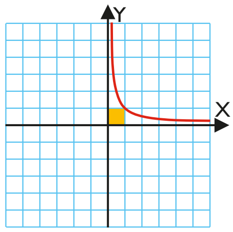
La solución x = 523,61 m no sirve por ser superior a 300 m

4. Funciones racionales e irracionales

Piensa y calcula

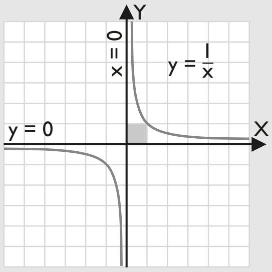
Analiza si la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es impar y dibuja la parte de gráfica que falta.

Dibuja las asíntotas.



Solución:

Sí es impar.



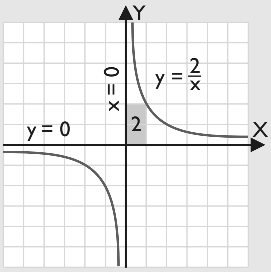
Aplica la teoría

14. Dibuja las siguientes hipérbolas y sus asíntotas. Halla la constante, **k,** de proporcionalidad inversa:

a) $y = \dfrac{2}{x}$ b) $y = -\dfrac{4}{x}$

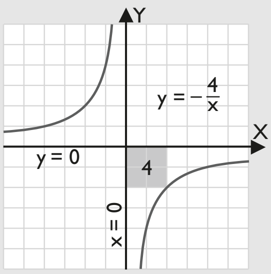
Solución:

a)



$k = 2$

b)



$k = -4$

15. Dibuja las siguientes hipérbolas y sus asíntotas. Halla la constante **k**

a) $y = \dfrac{x+3}{x+1}$

b) $y = \dfrac{3x-5}{x-2}$

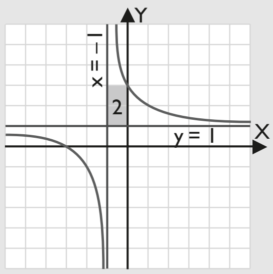
c) $y = \dfrac{2x-5}{x-1}$

d) $y = -\dfrac{x+1}{x+2}$

Solución:

a)

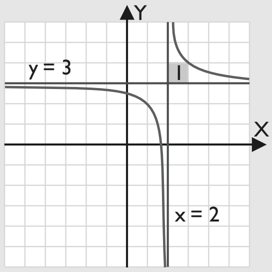
$y = \dfrac{2}{x+1} + 1$



$k = 2$

b)

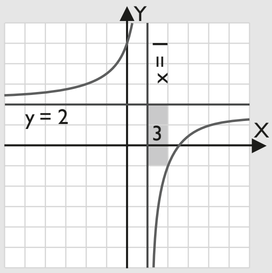
$$y = \frac{1}{x - 2} + 3$$



k = 1

c)

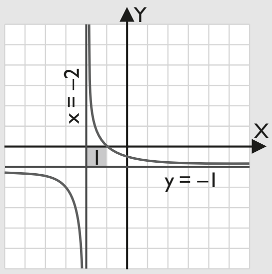
$$y = \frac{-3}{x - 1} + 2$$



k = –3

d)

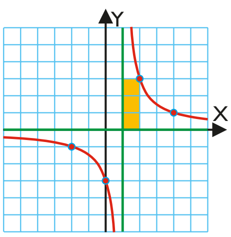
$$y = \frac{1}{x + 2} - 1$$



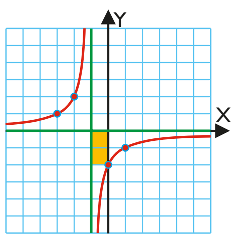
k = 1

16. Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:

a)



b)

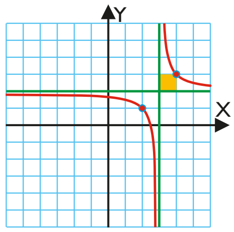


Solución:

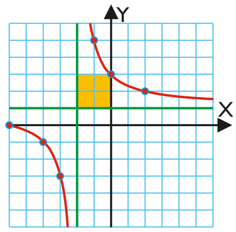
a) $y = \dfrac{3}{x - 1}$ b) $y = -\dfrac{2}{x + 1}$

17. Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:

a)



b)



Solución:

a) $y = \dfrac{1}{x - 3} + 2$

b) $y = \dfrac{4}{x + 2} + 1$

18. Dibuja las siguientes funciones irracionales:

a) $y = \sqrt{x - 1}$

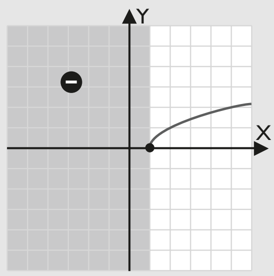
b) $y = -2 + \sqrt{x - 1}$

c) $y = -\sqrt{x + 2}$

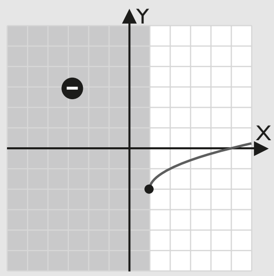
d) $y = 3 - \sqrt{2 - x}$

Solución:

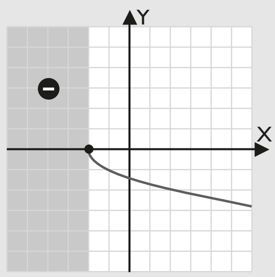
a)



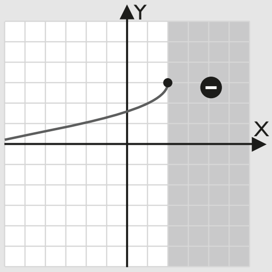
b)



c)

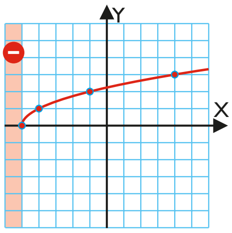


d)

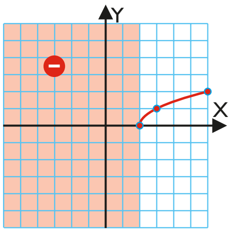


19. Escribe la fórmula de las siguientes funciones irracionales:

a)



b)



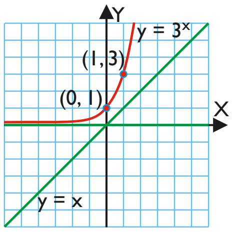
Solución:

a) $y = \sqrt{x + 5}$ b) $y = \sqrt{x - 2}$

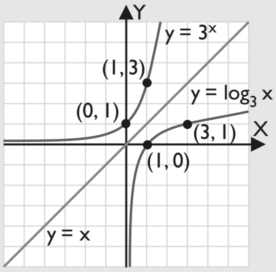
5. Funciones exponenciales y logarítmicas

Piensa y calcula

Observando la gráfica correspondiente a $y = 3^x$, dibuja la gráfica correspondiente a $y = \log_3 x$, sabiendo que es inversa de la anterior.



Solución:



Aplica la teoría

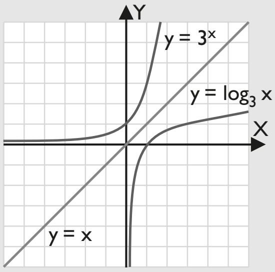
20. Dibuja en los mismos ejes las siguientes funciones y sus asíntotas:

a) $y = 3^x$

b) $y = \log_3 x$

¿Respecto a qué recta son simétricas?

Solución:



Son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes, $y = x$; por lo tanto, una es inversa de la otra.

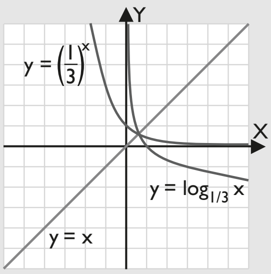
21. Dibuja en los mismos ejes las gráficas de las funciones siguientes y sus asíntotas:

a) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

b) $y = \log_{1/3} x$

¿Respecto a qué recta son simétricas?

Solución:



Son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes, $y = x$; por lo tanto, una es inversa de la otra.

22. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y sus asíntotas:

a) $y = 1 + 2^x$

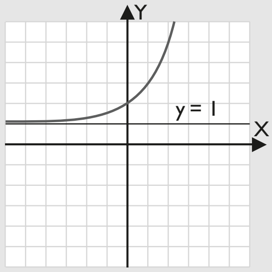
b) $y = -5 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

c) $y = 2^{x-3}$

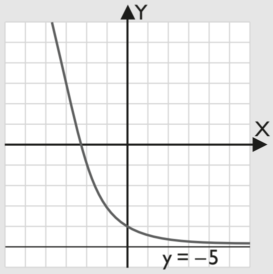
d) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3}$

Solución:

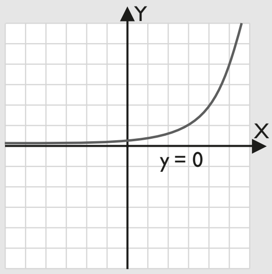
a)



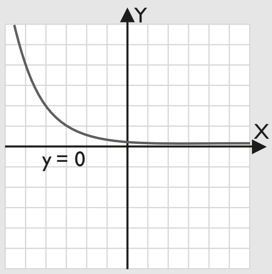
b)



c)



d)



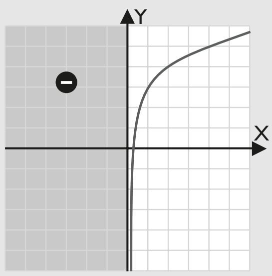
23. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y sus asíntotas:

a) $y = 3 + \log_2 x$ b) $y = -3 + \log_{1/2} x$

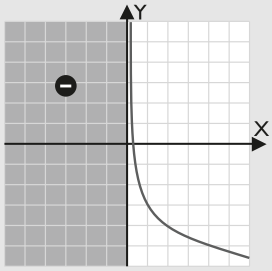
c) $y = \log_2 (x + 5)$ d) $y = \log_{1/2} (x - 1)$

Solución:

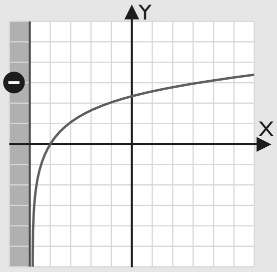
a)



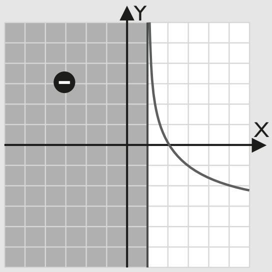
b)



c)

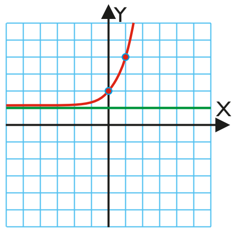


d)

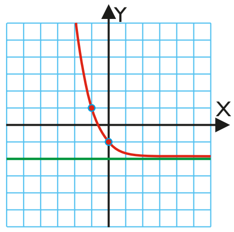


24. Escribe las fórmulas de las siguientes gráficas:

a)



b)



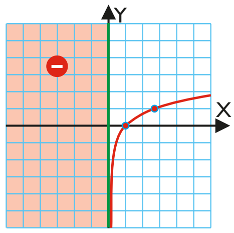
Solución:

a) $y = 1 + 3^x$

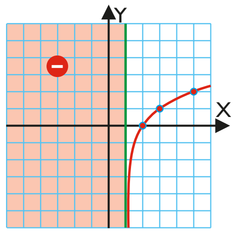
b) $y = -2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x$

25. Escribe las fórmulas de las siguientes funciones:

a)



b)



Solución:

a) $y = L\,x$

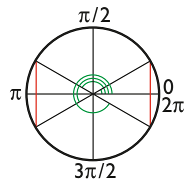
b) $y = \log_2 (x - 1)$

6. Funciones trigonométricas

Piensa y calcula

Completa la siguiente tabla:

x	30°	150°	210°	330°
sen x				
cos x				
tg x				



Solución:

x	30°	150°	210°	330°
sen x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

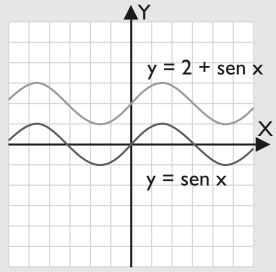
Aplica la teoría

26. Dibuja las siguientes funciones a partir de la función $y = \text{sen}\, x$

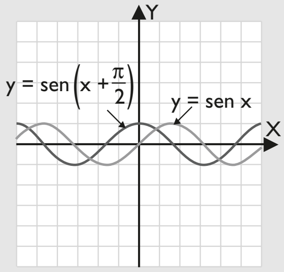
a) $y = 2 + \text{sen}\, x$ b) $y = \text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Solución:

a)



b)

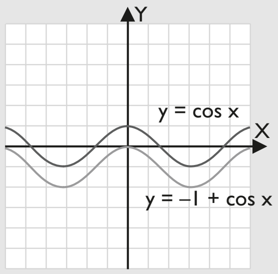


27. Dibuja las siguientes funciones a partir de la función $y = \cos x$

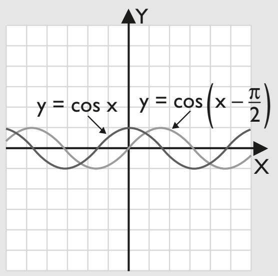
a) $y = -1 + \cos x$ b) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

Solución:

a)



b)

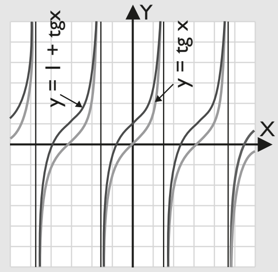


28. Dibuja las siguientes funciones a partir de la función $y = \text{tg}\, x$

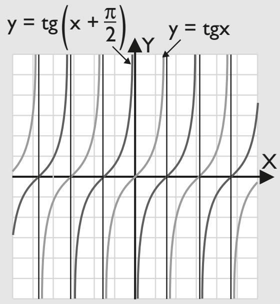
a) $y = 1 + \text{tg}\, x$ b) $y = \text{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Solución:

a)



b)



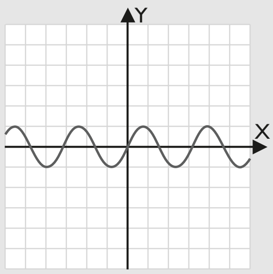
29. Dibuja las siguientes funciones:

a) $y = \text{sen}\, 2x$

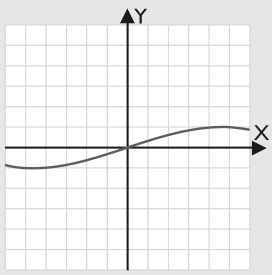
b) $y = \text{sen}\, \dfrac{x}{3}$

Solución:

a)



b)



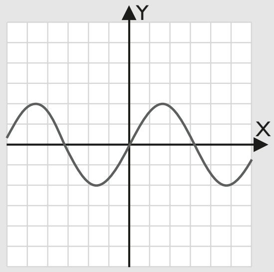
30. Dibuja las siguientes funciones:

a) $y = 2\, \text{sen}\, x$

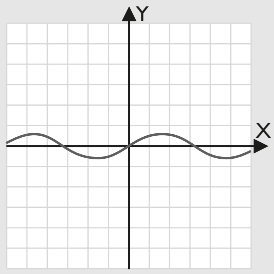
b) $y = \dfrac{1}{2}\, \text{sen}\, x$

Solución:

a)



b)



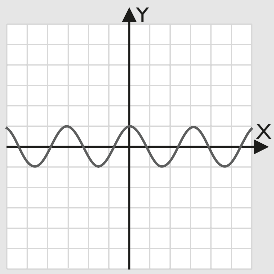
31. Dibuja las siguientes funciones:

a) $y = \cos 2x$ b) $y = \cos \dfrac{x}{3}$

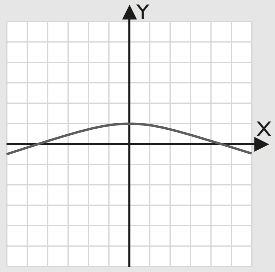
c) $y = 2 \cos x$ d) $y = \dfrac{1}{2} \cos x$

Solución:

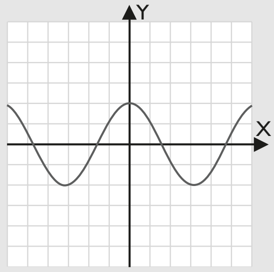
a)



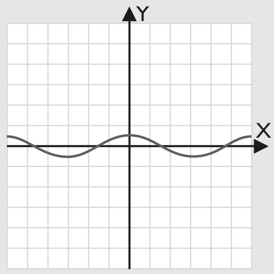
b)



c)



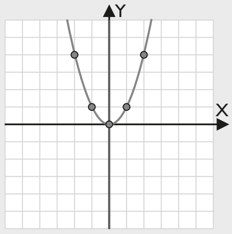
d)



Funciones elementales que hay que conocer

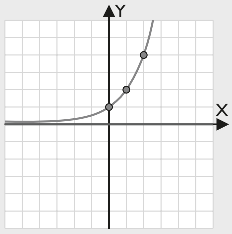
Halla el tipo de cada una de las siguientes funciones y calcula mentalmente su fórmula

1



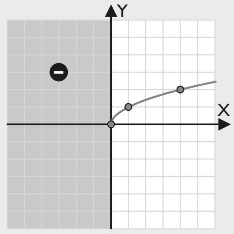
Solución:
Polinómica: $y = x^2$

2



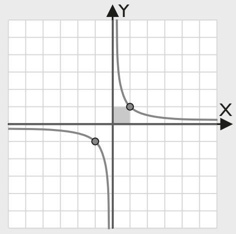
Solución:
Exponencial: $y = 2^x$

3



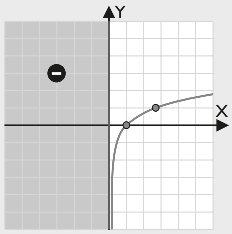
Solución:
Irracional: $y = \sqrt{x}$

4



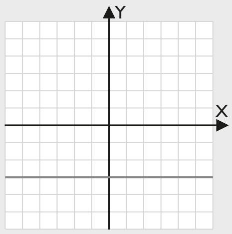
Solución:
Racional: $y = \dfrac{1}{x}$

5



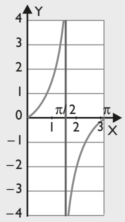
Solución:
Logarítmica: $y = \mathrm{L}\,x$

6



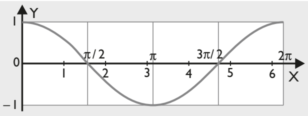
Solución:
Polinómica: $y = -3$

7



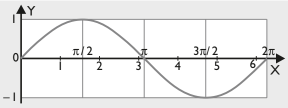
Solución:
Trigonométrica:
$y = \mathrm{tg}\,x$

8



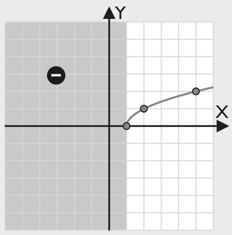
Solución: Trigonométrica: $y = \cos x$

9



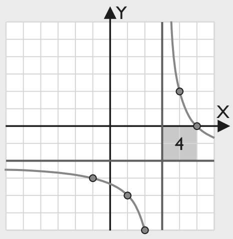
Solución: Trigonométrica: $y = \mathrm{sen}\,x$

10



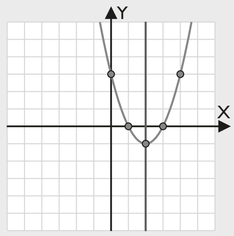
Solución:
Irracional: $y = \sqrt{x - 1}$

11



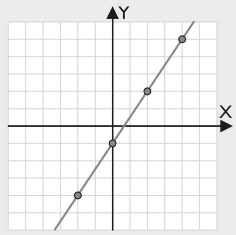
Solución:
Racional: $y = \dfrac{4}{x - 3} - 2$

12



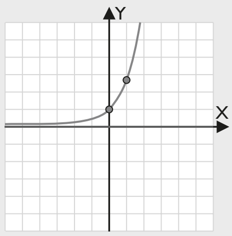
Solución:
Polinómica: $y = x^2 - 4x + 3$

13



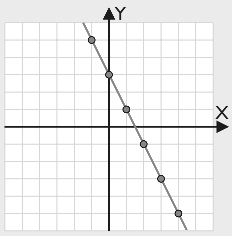
Solución:
Polinómica : $y = \dfrac{3x}{2} - 1$

14



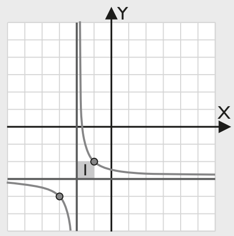
Solución:
Exponencial: $y = e^x$

15



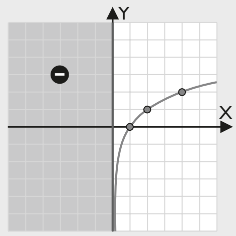
Solución:
Polinómica: $y = -2x + 3$

16



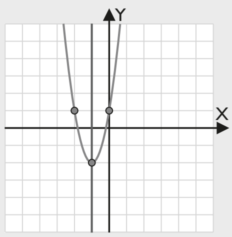
Solución:
Racional: $y = \dfrac{1}{x + 2} - 3$

17



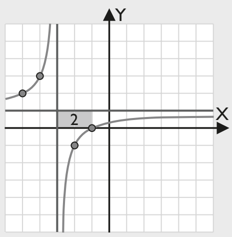
Solución:
Logarítmica: $y = \log_2 x$

18



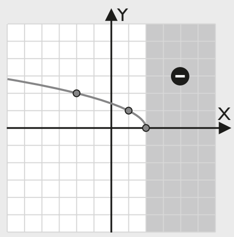
Solución:
Polinómica: $y = 3x^2 + 6x + 1$

19



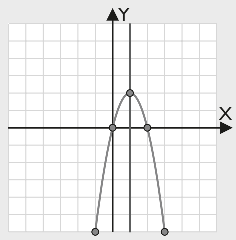
Solución:
Racional: $y = -\dfrac{2}{x + 3} + 1$

20



Solución:
Irracional: $y = \sqrt{2 - x}$

21



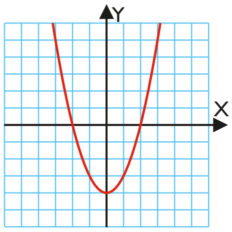
Solución:
Polinómica: $y = -2x^2 + 4x$

Ejercicios y problemas

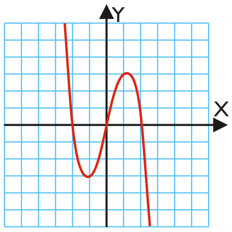
1. Funciones polinómicas

32. Analiza de qué grado pueden ser las funciones polinómicas siguientes. ¿Qué signo tiene el coeficiente principal?

a)



b)



Solución:

a) De 2º grado. El coeficiente principal es positivo.

b) De 3er grado. El coeficiente principal es negativo.

33. Representa las siguientes rectas, halla la pendiente y la ordenada en el origen.

a) $y = -x$

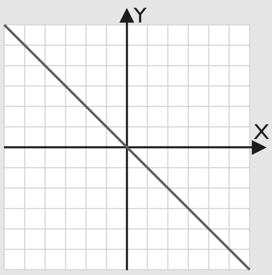
b) $y = -\frac{x}{2}$

c) $y = \frac{3x}{2} + 1$

d) $y = -2x - 1$

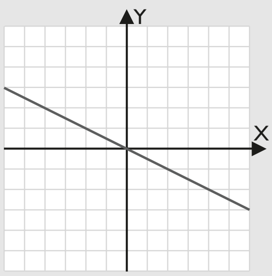
Solución:

a)



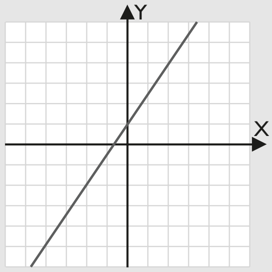
$m = -1$, ordenada en el origen: 0

b)



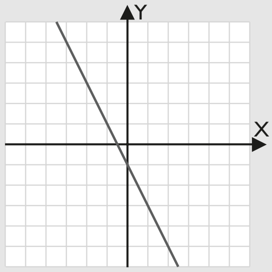
$m = -\frac{1}{2}$, ordenada en el origen: 0

c)



$m = \frac{3}{2}$, ordenada en el origen: 1

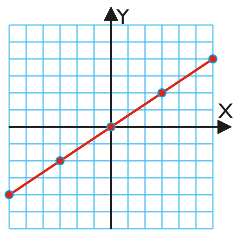
d)



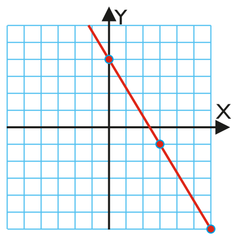
$m = -2$, ordenada en el origen: -1

34. Escribe las fórmulas de las siguientes rectas:

a)



b)



Solución:

a) $y = \frac{2x}{3}$

b) $y = -\frac{5x}{3} + 4$

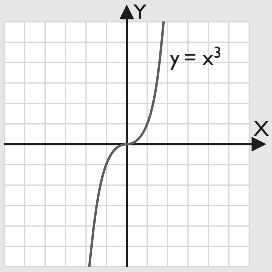
35. Haz un dibujo aproximado de las funciones siguientes:

a) $y = x^3$

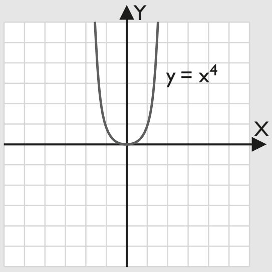
b) $y = x^4$

Solución:

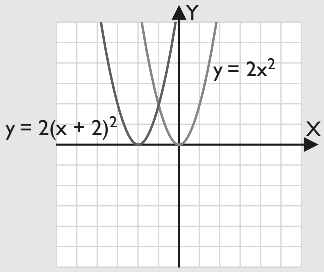
a)



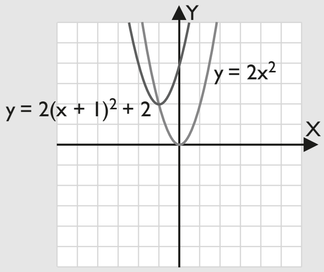
b)



c)



d)



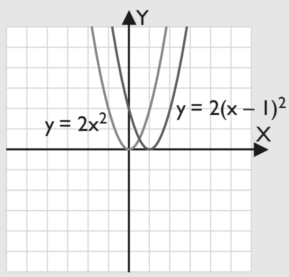
2. Función cuadrática

36. Representa la parábola $y = 2x^2$; a partir de ella, las siguientes:

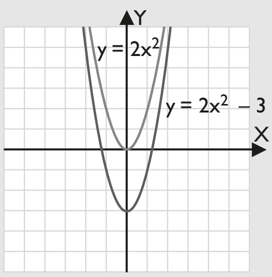
a) $y = 2(x - 1)^2$
b) $y = 2x^2 - 3$
c) $y = 2(x + 2)^2$
d) $y = 2(x + 1)^2 + 2$

Solución:

a)



b)



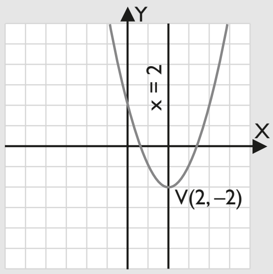
37. Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 4x + 2$ b) $y = -x^2 - 2x + 1$

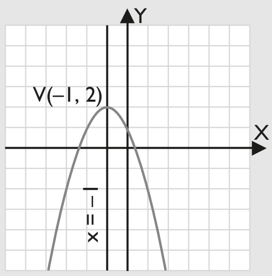
c) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$ d) $y = -2x^2 + 4x + 3$

Solución:

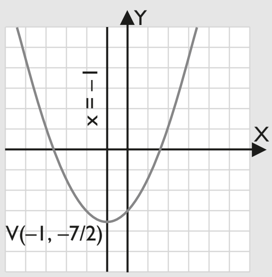
a)



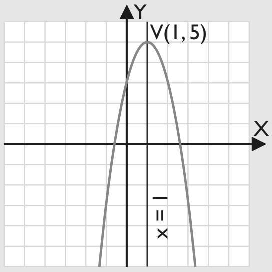
b)



c)

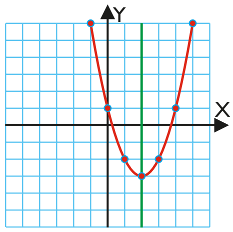


d)

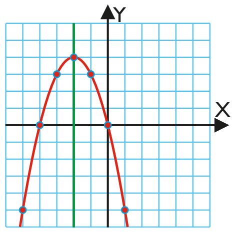


38. Escribe las fórmulas de las siguientes parábolas:

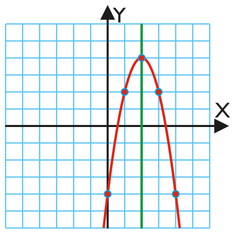
a)



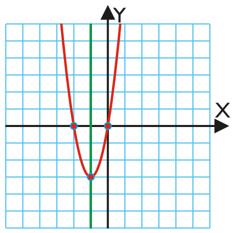
b)



c)



d)



Solución:

a) $y = x^2 - 4x + 1$ b) $y = -x^2 - 4x$

c) $y = -2x^2 + 8x - 4$ d) $y = 3x^2 + 6x$

3. Interpolación y extrapolación

39. Calcula la recta que pasa por los puntos A(1, – 3) y B(3, 1). Interpola el valor de la función para x = 2 y extrapola el valor de la función para x = 4

Solución:

$y = mx + b$

$$\left.\begin{aligned} m + b &= -3 \\ 3m + b &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$m = 2, b = -5$

$y = 2x - 5$

$x = 2 \Rightarrow y = -1$

$x = 4 \Rightarrow y = 3$

40. Calcula la parábola que pasa por los puntos A(–4, 7), B(–2, 9) y C(2, 1). Interpola el valor de la función para x = 0 y extrapola el valor de la función para x = 4

Solución:

$y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{aligned} 16a - 4b + c &= 7 \\ 4a - 2b + c &= 9 \\ 4a + 2b + c &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$a = -1/2, b = -2, c = 7$

$y = -1/2x^2 - 2x + 7$

$x = 0 \Rightarrow y = 7$

$x = 4 \Rightarrow y = -9$

41. En la tabla siguiente se recogen los pesos ideales en función de las estaturas:

x: estatura (cm)	160	170
y: pesos (kg)	64	72

a) Calcula por interpolación lineal el peso para una estatura de 165 cm

b) Calcula por extrapolación lineal el peso para una estatura de 180 cm

Solución:

$y = mx + b$

$$\left.\begin{aligned} 160m + b &= 64 \\ 170m + b &= 72 \end{aligned}\right\}$$

$m = \dfrac{4}{5}, b = -64 \Rightarrow y = \dfrac{4}{5}x - 64$

a) $x = 165$ cm $\Rightarrow y = 68$ kg

b) $x = 180$ cm $\Rightarrow y = 80$ kg

42. Una empresa, que cotiza en bolsa, tiene un cierre semanal según se recoge en la siguiente tabla:

x: semana	3	7	8
y: cierre (€)	3	6	7

a) Calcula la ecuación de la parábola que pasa por los tres puntos.

b) Determina el valor de cierre de la acción en la quinta semana.

Solución:

a) $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{aligned} 9a + 3b + c &= 3 \\ 49a + 7b + c &= 6 \\ 64a + 8b + c &= 7 \end{aligned}\right\}$$

$a = 1/20, b = 1/4, c = 9/5$

$y = x^2/20 + x/4 + 9/5$

b) Para $x = 5 \Rightarrow y = 4{,}3$ €

4. Funciones racionales e irracionales

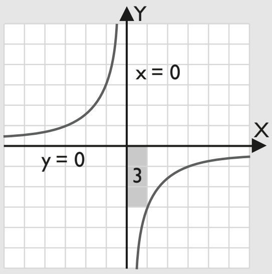
43. Dibuja las siguientes hipérbolas y sus asíntotas. Halla la constante, **k,** de proporcionalidad inversa.

a) $y = -\dfrac{3}{x}$

b) $y = \dfrac{2}{x}$

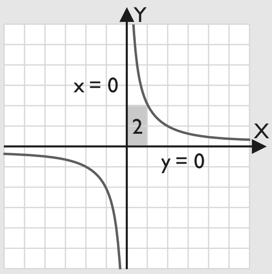
Solución:

a)



k = –3

b)



k = 2

44. Dibuja las siguientes hipérbolas y sus asíntotas. Halla la constante **k**

a) $y = \dfrac{2x + 2}{x}$

b) $y = \dfrac{3x + 7}{x + 2}$

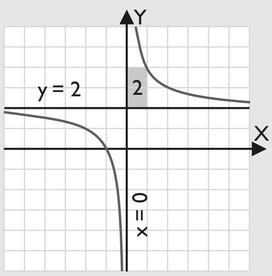
c) $y = \dfrac{-2x - 6}{x + 1}$

d) $y = \dfrac{-2x + 3}{x}$

Solución:

a)

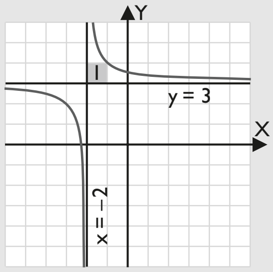
$y = \dfrac{2}{x} + 2$



k = 2

b)

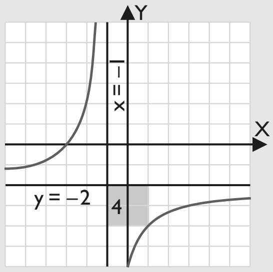
$y = \dfrac{1}{x + 2} + 3$



k = 1

c)

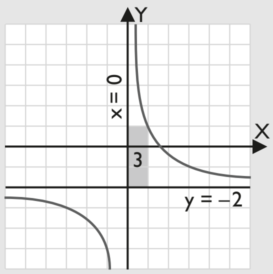
$y = \dfrac{-4}{x + 1} - 2$



k = –4

d)

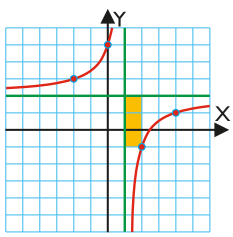
$y = \dfrac{3}{x} - 2$



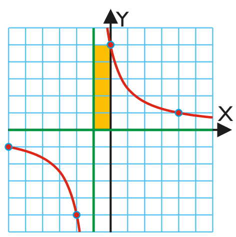
k = 3

45. Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:

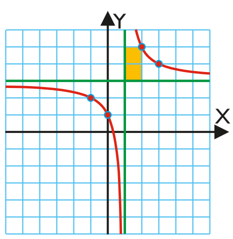
a)



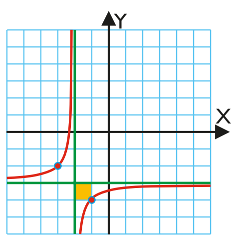
b)



c)



d)



Solución:

a) $y = -\dfrac{3}{x-1} + 2$ b) $y = \dfrac{5}{x+1}$

c) $y = \dfrac{2}{x-1} + 3$ d) $y = -\dfrac{1}{x+2} - 3$

46. Dibuja las siguientes funciones irracionales:

a) $y = \sqrt{x+2}$

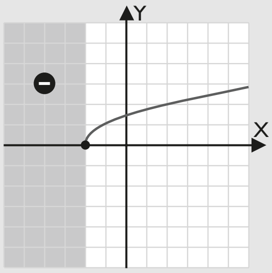
b) $y = -3 + \sqrt{x+2}$

c) $y = -\sqrt{x-3}$

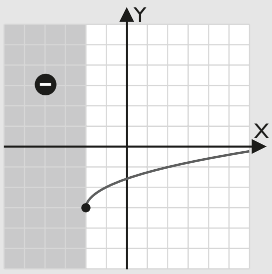
d) $y = 2 - \sqrt{x-3}$

Solución:

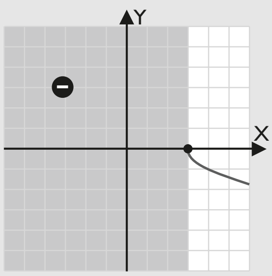
a)



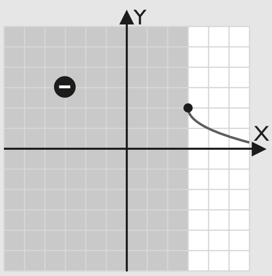
b)



c)



d)



5. Funciones exponenciales y logarítmicas

47. Dibuja en los mismos ejes las siguientes funciones y sus asíntotas:

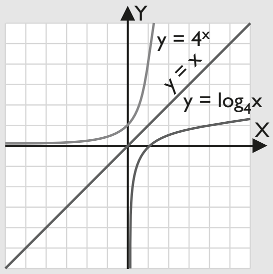
a) $y = 4^x$

b) $y = \log_4 x$

¿Respecto a qué recta son simétricas?

Solución:

Son simétricas respecto de la bisectriz del 1^{er} y 3^{er} cuadrantes; $y = x$, por lo tanto, una es inversa de la otra.



48. Dibuja en los mismos ejes las siguientes funciones y sus asíntotas:

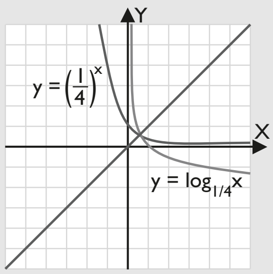
a) $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

b) $y = \log_{1/4} x$

¿Respecto a qué recta son simétricas?

Solución:

Son simétricas respecto de la bisectriz del 1^{er} y 3^{er} cuadrantes; $y = x$, por lo tanto, una es inversa de la otra.



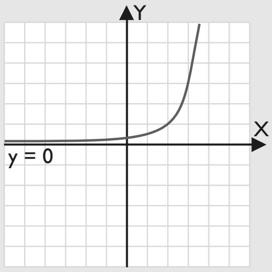
49. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y sus asíntotas:

a) $y = 3^{x-2}$

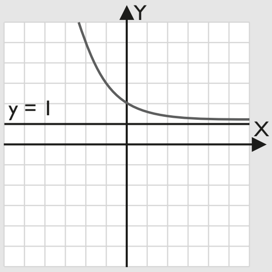
b) $y = 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

Solución:

a)



b)

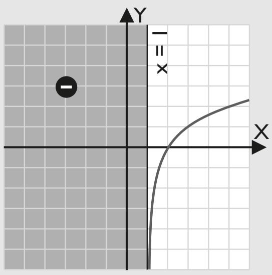


50. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y sus asíntotas:

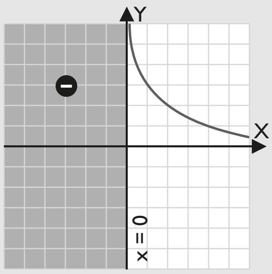
a) $y = \log_2 (x - 1)$ b) $y = 3 + \log_{1/2} x$

Solución:

a)

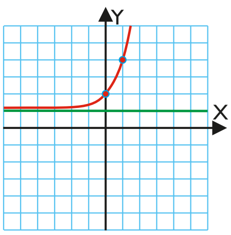


b)

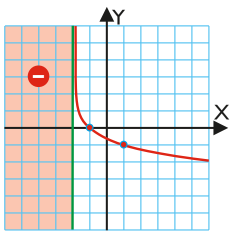


51. Escribe las fórmulas de las siguientes gráficas:

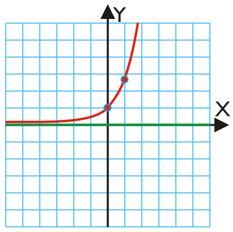
a)



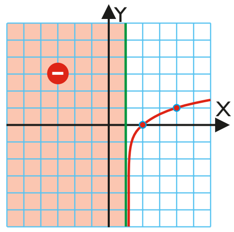
b)



c)



d)



Solución:

a) $y = 1 + 3^x$

b) $y = \log_{1/3} (x + 2)$

c) $y = e^x$

d) $y = \log_3 (x - 1)$

6. Funciones trigonométricas

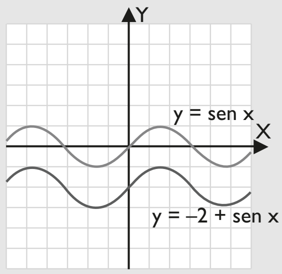
52. Dibuja las siguientes funciones a partir de la función $y = \text{sen}\, x$

a) $y = -2 + \text{sen}\, x$

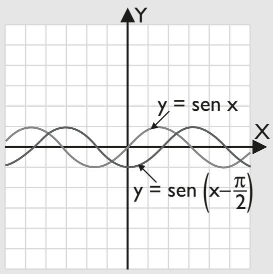
b) $y = \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

Solución:

a)



b)



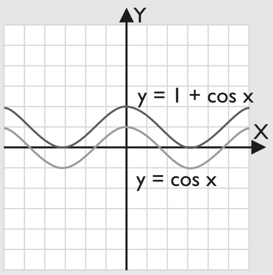
53. Dibuja las siguientes funciones a partir de la función $y = \cos x$

a) $y = 1 + \cos x$

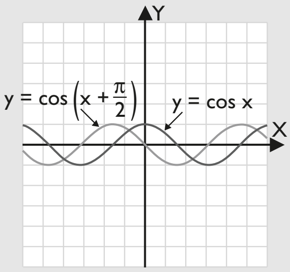
b) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Solución:

a)



b)

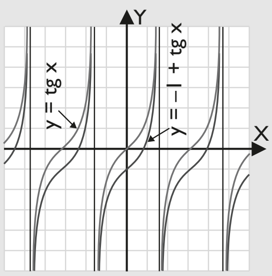


54. Dibuja las siguientes funciones a partir de la función y = tg x

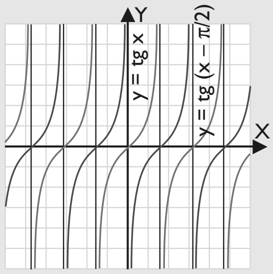
a) y = – 1 + tg x   b) $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Solución:

a)



b)

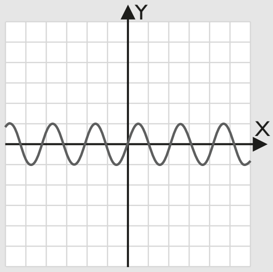


55. Dibuja las siguientes funciones:

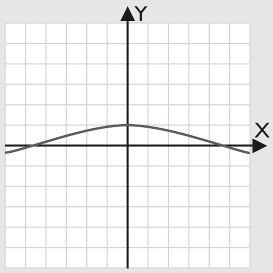
a) y = sen 3x   b) $y = \cos\frac{x}{3}$

Solución:

a)



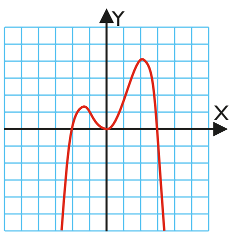
b)



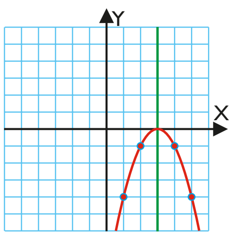
Para ampliar

56. Analiza de qué grado pueden ser las funciones polinómicas siguientes. ¿Qué signo tiene el coeficiente principal?

a)



b)



Solución:

a) Es de grado cuatro.

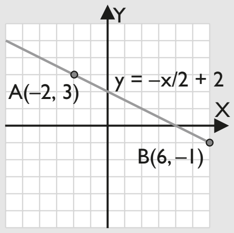
El coeficiente principal es negativo.

b) Es de grado dos.

El coeficiente principal es negativo.

57. Dibuja la recta que pasa por los puntos A(–2, 3) y B(6, – 1), y halla su fórmula.

Solución:

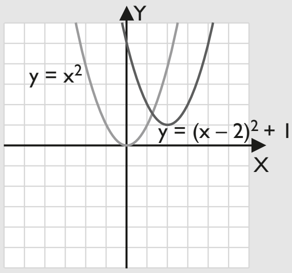


58. Representa la parábola $f(x) = x^2$; a partir de ella, las siguientes funciones:

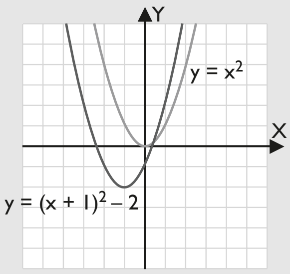
a) $f(x - 2) + 1$ b) $f(x + 1) - 2$

Solución:

a)



b)



59. Calcula la función cuadrática que pasa por los puntos siguientes:

a) A(0, –1), B(2, –5) y C(5, 4)

b) A(3, 4), B(4, 2) y C(1, –4)

Solución:

a) $y = x^2 - 4x - 1$ b) $y = -2x^2 + 12x - 14$

60. Calcula la parábola que pasa por los puntos A(2, 2), B(3, 5) y C(6, 17). Interpola el valor de la función para $x = 4$ y extrapola el valor de la función para $x = -2$

Solución:

$y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{aligned} 4a + 2b + c &= 2 \\ 9a + 3b + c &= 5 \\ 36a + 6b + c &= 17 \end{aligned}\right\}$$

$a = 1/4, b = 7/4, c = -5/2$

$y = x^2/4 + 7x/4 - 5/2$

Para $x = 4 \Rightarrow y = 8{,}5$

Para $x = -2 \Rightarrow y = -5$

61. Se sabe que la masa de un metal determinado y su volumen se relacionan de la siguiente forma:

Volumen (cm^3)	3	8	10
Masa (g)	23,1	61,6	77

a) Calcula por interpolación lineal la masa para un volumen de 6 cm^3

b) Calcula por extrapolación lineal la masa para un volumen de 18 cm^3

Solución:

a) $y = mx + b$

$$\left.\begin{aligned} 3m + b &= 23{,}1 \\ 8m + b &= 61{,}6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow m = 7{,}7;\ b = 0$$

$y = 7{,}7x$

Comprobación de que para $x = 10, y = 77$

$y = 7{,}7 \cdot 10 = 77$

$x = 6\ cm^3 \Rightarrow y = 46{,}2$ g

b) $x = 18\ cm^3 \Rightarrow y = 138{,}6$ g

62. La demanda que hacen los consumidores de un producto depende de su precio. En el estudio de mercado de un determinado producto se ha determinado que las unidades que se venden en función del precio son las que se recogen en la tabla siguiente:

x: precio (€)	2	4	5
y: unidades en miles	3	7	6

a) Calcula la parábola que pasa por los tres puntos.

b) Calcula las unidades que se venderían a un precio de 3 €

Solución:

a) $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{aligned} 4a + 2b + c &= 3 \\ 16a + 4b + c &= 7 \\ 25a + 5b + c &= 6 \end{aligned}\right\}$$

$a = -1, b = 8, c = -9 \Rightarrow y = -x^2 + 8x - 9$

b) $y = -3^2 + 8 \cdot 3 - 9$

$y = 6$ €

63. Calcula la función cuadrática que pasa por los puntos siguientes:

a) A(2, 0), B(3, 1) y C(4, 4)

b) A(–1, 2), B(–3, –2) y C(–5, 2)

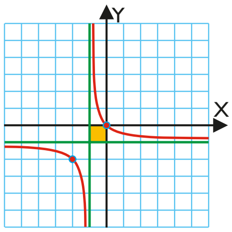
Solución:

a) $y = x^2 - 4x + 4$

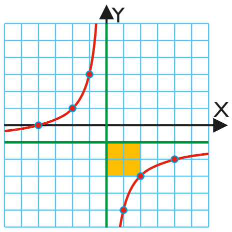
b) $y = x^2 + 6x + 7$

64. Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:

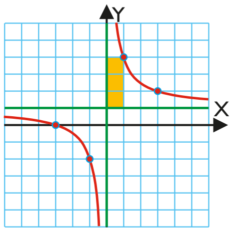
a)



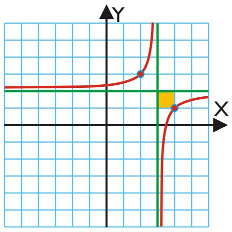
b)



c)



d)



Solución:

a) $y = \dfrac{1}{x + 1} - 1$

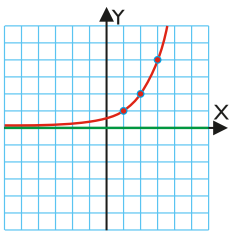
b) $y = -\dfrac{4}{x} - 1$

c) $y = \dfrac{3}{x} + 1$

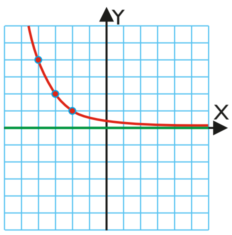
d) $y = -\dfrac{1}{x - 3} + 2$

65. Escribe las fórmulas de las siguientes gráficas:

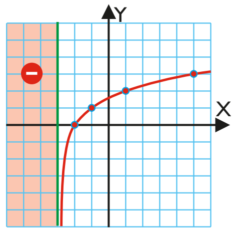
a)



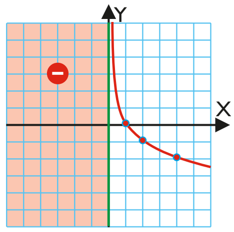
b)



c)



d)



Solución:

a) $y = 2^{x - 1}$

b) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x + 2}$

c) $y = \log_2 (x + 3)$

d) $y = \log_{1/2} x$

66. Dibuja las siguientes funciones:

a) $y = 2 \text{ sen } x$

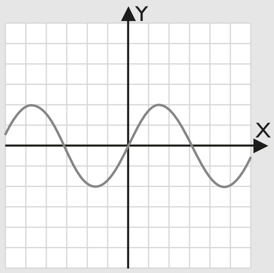
b) $y = \text{sen } 2x$

c) $y = \dfrac{1}{2} \text{ sen } x$

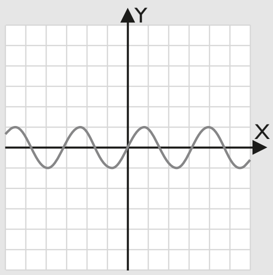
d) $y = \text{sen } \dfrac{x}{2}$

Solución:

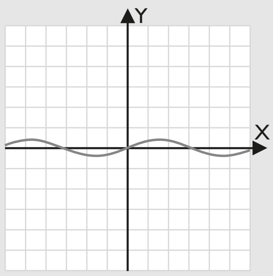
a)



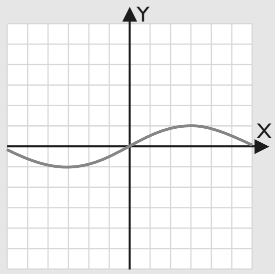
b)



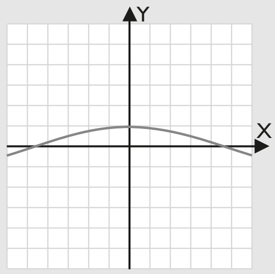
c)



d)



d)



67. Dibuja las siguientes funciones:

a) $y = 3 \cos x$

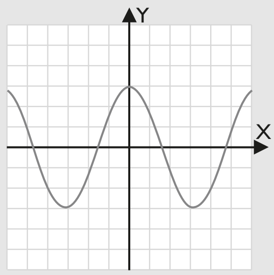
b) $y = \cos 3x$

c) $y = \frac{1}{3} \cos x$

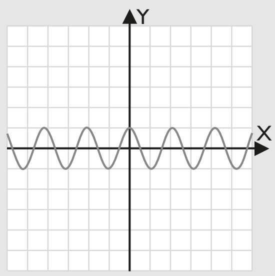
d) $y = \cos \frac{x}{3}$

Solución:

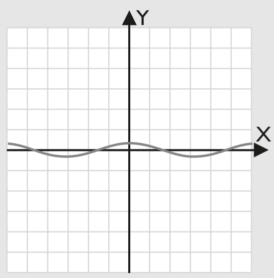
a)



b)



c)



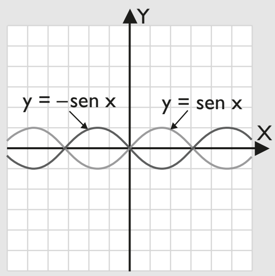
68. Dibuja las siguientes funciones a partir de $y = \operatorname{sen} x$:

a) $y = -\operatorname{sen} x$

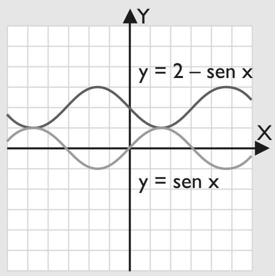
b) $y = 2 - \operatorname{sen} x$

Solución:

a)



b)



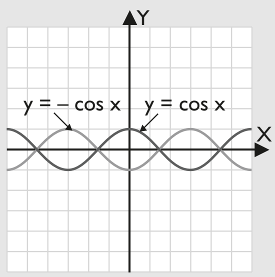
69. Dibuja las siguientes funciones a partir de $y = \cos x$:

a) $y = -\cos x$

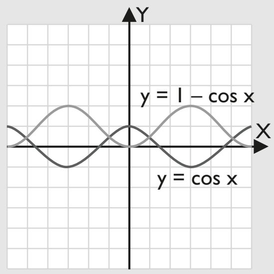
b) $y = 1 - \cos x$

Solución:

a)



b)



70. Dibuja las siguientes funciones:

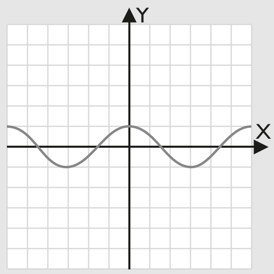
a) $y = \cos x$

b) $y = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$

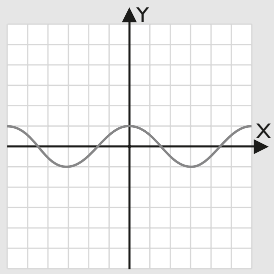
¿Qué observas?

Solución:

a)



b)



Se observa que son la misma gráfica, luego:

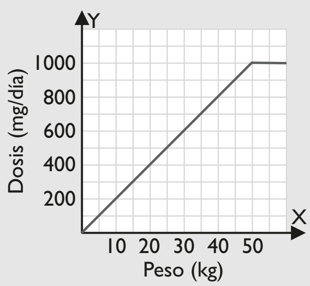
$\cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$

Problemas

71. La dosis habitual recomendada de un determinado antibiótico para niños es de 20 mg por kilogramo de peso al día, sin sobrepasar los 1 000 mg al día. Escribe la función que da la cantidad de antibiótico que se debe suministrar en función del peso. Representa la gráfica.

Solución:

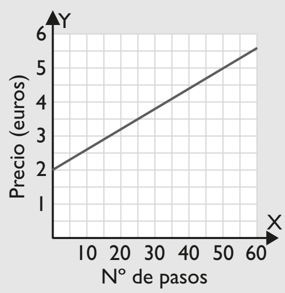
$$D(x) = \begin{cases} 20\,x & \text{si } 0 \le x \le 50 \\ 1\,000 & \text{si } x > 50 \end{cases}$$



72. Un taxi cobra 2 € por bajada de bandera y 0,06 € por cada salto de contador. Escribe la fórmula de la función que da el precio de una carrera, en función de los saltos del contador, y representa su gráfica.

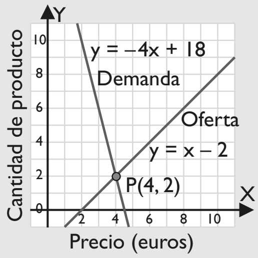
Solución:

$D(x) = 2 + 0{,}06x$



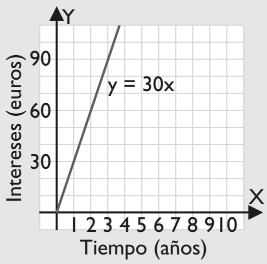
73. Una empresa ha realizado un estudio para determinar las funciones de oferta y de demanda de un producto en función del precio de venta, **x.** La función de oferta es $y = x - 2$, y la de demanda es $y = -4x + 18$. Representa dichas funciones y halla el punto de equilibrio.

Solución:



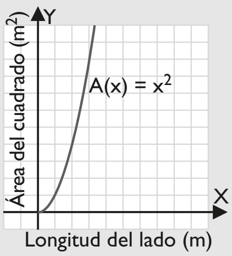
74. Se depositan 1 000 € a un 3% de interés simple durante un año. Escribe la fórmula que da los intereses en función del tiempo.

Solución:



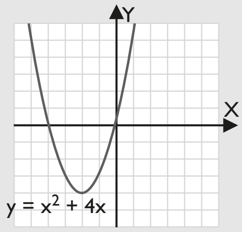
75. Halla el área de un cuadrado en función del lado. Represéntala gráficamente.

Solución:



76. Expresa la fórmula que da el producto de dos números que se diferencian en 4 unidades. Representa su gráfica.

Solución:



77. Con 12 metros de moldura se desea decorar una puerta formando un rectángulo.

a) Escribe la fórmula que expresa el área de dicho rectángulo en función del lado **x**

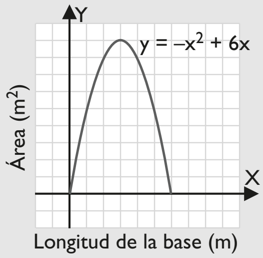
b) Representa la función.

c) Determina las dimensiones del rectángulo que hacen el área máxima.

Solución:

a) $A(x) = x(6 - x) \Rightarrow A(x) = 6x - x^2$

b)



c) Un cuadrado de 3 m de lado con un área de 9 m^2

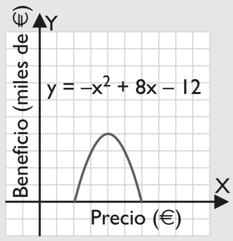
78. El beneficio, en miles de euros, que se obtiene al vender a **x** € una unidad de un determinado producto viene dado por la fórmula $B(x) = -x^2 + 8x - 12$

a) Representa la función B(x)

b) Determina el precio al que hay que vender el producto para obtener el máximo beneficio.

Solución:

a)



b) A 4€

79. Un empleado cobra en su sueldo una cantidad fija y una parte variable que depende de las horas trabajadas. Un mes que ha trabajado 140 horas, ha cobrado 1050 €. Otro mes que trabaja 115 horas, cobra 960 € ¿Cuánto cobrará si trabaja durante un mes 125 horas.

Solución:

$y = mx + b$

$$\left.\begin{aligned} 140m + b &= 1\,050 \\ 115m + b &= 960 \end{aligned}\right\}$$

$m = 18/5, b = 546$

$y = 18x/5 + 546$

$x = 125\text{ h} \Rightarrow y = 996$ €

80. En la siguiente tabla se recogen las temperaturas corporales que una persona tiene, en función del tiempo transcurrido, después de tomar 600 mg de paracetamol:

x: tiempo (horas)	0	2	4
y: temperatura (°C)	39	37	39

a) Calcula la fórmula de la parábola que pasa por los tres puntos.

b) Calcula el valor de la temperatura corporal a las tres horas de tomar el medicamento.

Solución:

a) $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{aligned} c &= 39 \\ 4a + 2b + c &= 37 \\ 16a + 4b + c &= 39 \end{aligned}\right\}$$

$a = 1/2, b = -2, c = 39$

$y = x^2/2 - 2x + 39$

b) $x = 3 \Rightarrow y = 37{,}5$ °C

81. Una máquina envasa un pedido de latas de tomate en 8 horas. Se ponen varias máquinas idénticas a trabajar.

a) Halla la función que expresa el tiempo de envasado en función del número de máquinas.

b) Identifica la función obtenida.

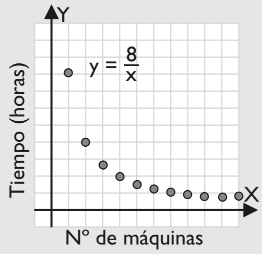
c) Representa gráficamente dicha función.

Solución:

a) $y = \dfrac{8}{x}$

b) Función de proporcionalidad inversa

c)



82. Para recoger los higos de una finca, una persona tarda 60 horas.

a) Halla la función que expresa el número de personas en función del número de horas.

b) Identifica la función obtenida.

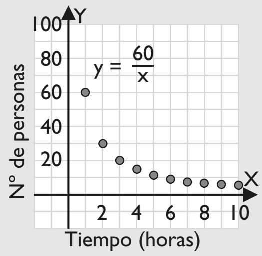
c) Representa gráficamente dicha función.

Solución:

a) $y = \dfrac{60}{x}$

b) Función de proporcionalidad inversa.

c)



83. Un cultivo de bacterias se reproduce de forma que el número de bacterias se duplica cada minuto. Expresa la función que representa el número de bacterias en función del tiempo.

Solución:

Suponiendo que inicialmente haya una bacteria y siendo **x** el tiempo en minutos: $y = 2^x$

84. Se deposita un capital de 6 000 € al 10% anual, de manera que los intereses se acumulan al capital. Expresa la función que da el capital acumulado en función del tiempo.

Solución:

$C = 6\,000 \cdot 1{,}1^t$

Para profundizar

85. ¿Puede tener una función polinómica de cuarto grado solo un mínimo? Pon un ejemplo.

Solución:
Sí, la función potencial: $y = x^4$

86. ¿Puede existir una función polinómica de tercer grado que no tenga ni máximo ni mínimo? Pon un ejemplo.

Solución:
Sí, la función potencial: $y = x^3$

87. Se sabe que la población de una localidad ha evolucionado según los datos de la tabla:

Tiempo (años)	1999	2001
Nº de habitantes	4 050	3 900

a) Calcula por extrapolación lineal el número de habitantes en el año 2003

b) Si resultó que en el año 2003 la población real fue de 3 900 habitantes, ¿cuál fue el error cometido?

Solución:
$y = mx + b$

$$\left.\begin{array}{l}1999m + b = 4\,050\\ 2001m + b = 3\,900\end{array}\right\}$$

$m = -75, b = 153\,975$

$y = -75x + 153\,975$

a) $x = 2003 \Rightarrow y = 3\,750$ habitantes.

b) Error $= 3\,900 - 3\,750 = 150$ habitantes.

88. Un rectángulo tiene 6 m^2 de área.

a) Halla la función que expresa uno de los lados en función del otro.

b) Identifica la función obtenida.

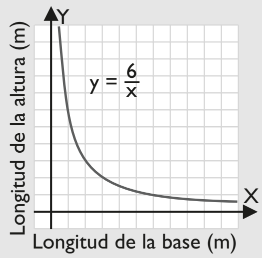
c) Representa gráficamente dicha función.

Solución:

a) $x \cdot y = 6 \Rightarrow y = \dfrac{6}{x}$

b) Función de proporcionalidad inversa.

c)



Paso a paso

89. Dada la parábola:

$$y = x^2 - 4x + 1$$

a) calcula mentalmente el eje de simetría y represéntalo.

b) calcula el vértice.

c) dibuja la parábola y comprueba el eje y el vértice.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

90. En la tabla siguiente, se recogen los beneficios que se obtienen en función del tiempo que está abierto un restaurante:

x: tiempo en horas	2	3	5
y: beneficio en miles de euros	4	5	1

Calcula la fórmula de la parábola que pasa por los tres puntos y represéntala.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

91. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es,** elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

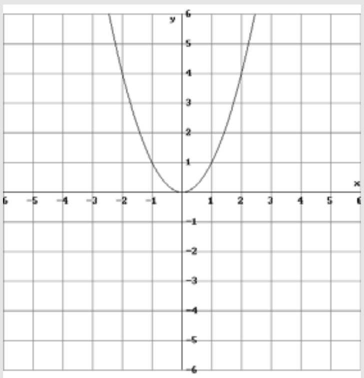
Practica

92. Representa las siguientes funciones potenciales, observa cuáles tienen máximo o mínimo relativo y cuáles tienen punto de inflexión.

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x^4$ d) $y = x^5$

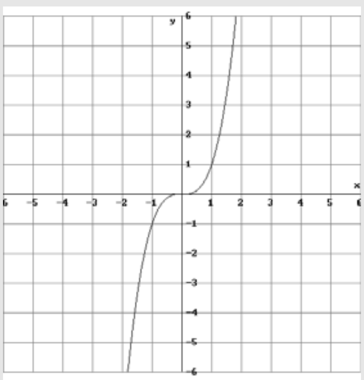
Solución:

a)



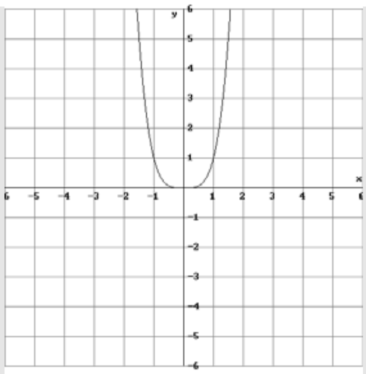
Tiene un mínimo relativo en O(0, 0)

b)



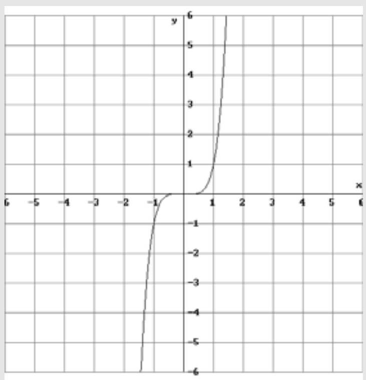
Tiene un punto de inflexión en O(0, 0)

c)



Tiene un mínimo relativo en O(0, 0)

d)



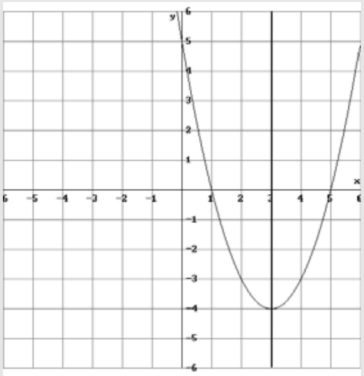
Tiene un punto de inflexión en O(0, 0)

93. En las siguientes parábolas, halla el eje de simetría, el vértice y el punto de corte con el eje Y. Luego represéntalas para comprobarlo:

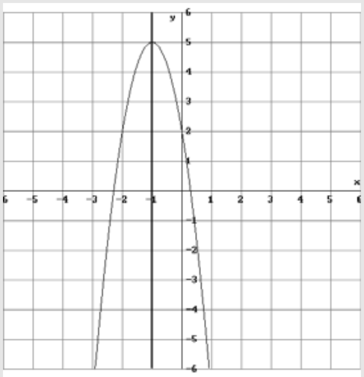
a) $y = x^2 - 6x + 5$ b) $y = -3x^2 - 6x + 2$

Solución:

a) Eje: x = 3, V(3, –4), P(0, 5)



b) Eje: x = –1, V(–1, 5), P(0, 2)



94. Calcula la recta que pasa por los puntos A(–3, –2) y B(3, 4). Interpola el valor de la función para x = 1 y extrapola el valor de la función para x = 5

Solución:

f(x) = mx + b

$$\left.\begin{aligned} -3m + b &= -2 \\ 3m + b &= 4 \end{aligned}\right\}$$

m = 1, b = 1

y = x + 1

a) x = 1 ⇒ y = 2

b) x = 5 ⇒ y = 6

95. Calcula la parábola que pasa por los puntos A(–4, 1), B(–1, –2) y C(1, 6). Interpola el valor de la función para x = –2 y extrapola el valor de la función para x = 4

Solución:

$y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{aligned} 16a - 4b + c &= 1 \\ a - b + c &= -2 \\ a + b + c &= 6 \end{aligned}\right\}$$

a = 1, b = 4, c = 1

$y = x^2 + 4x + 1$

a) x = –2 ⇒ y = –3

b) x = 4 ⇒ y = 33

96. En las siguientes hipérbolas, halla el valor de la constante **k** y las asíntotas; luego, representa las hipérbolas con sus asíntotas para comprobarlo.

a) $y = \dfrac{3x - 5}{x - 2}$ b) $y = \dfrac{2x - 5}{1 - x}$

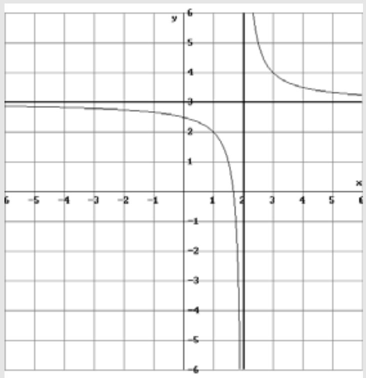
Solución:

a) $y = 3 + \dfrac{1}{x - 2}$

k = 1

Asíntotas

- Vertical: x = 2
- Horizontal: y = 3

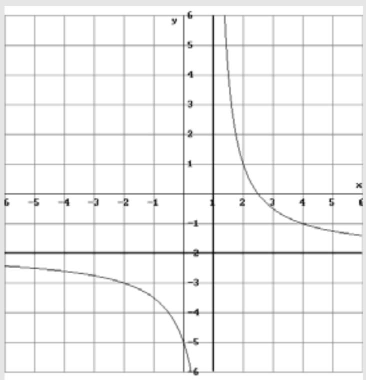


b) $y = -2 + \dfrac{3}{x - 1}$

k = 3

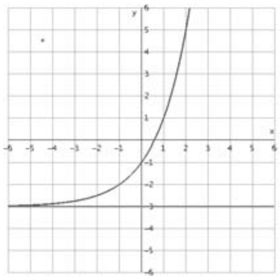
Asíntotas

- Vertical: x = 1
- Horizontal: y = –2



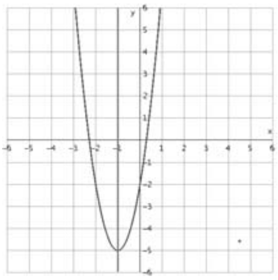
Identifica las siguientes gráficas y calcula mediante ensayo-acierto su fórmula:

97.



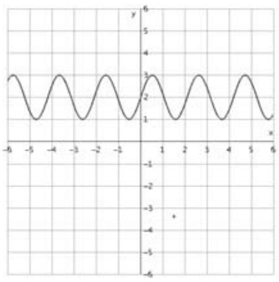
Solución: exponencial, $y = -3 + 2^{x+1}$

98.



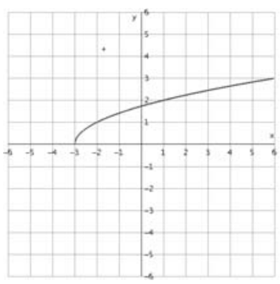
Solución: polinómica, $y = 3x^2 + 6x - 2$

99.



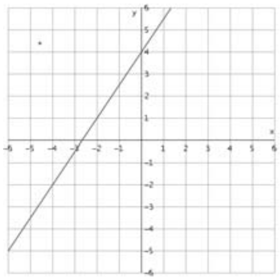
Solución: trigonométrica, $y = 2 + \text{sen } 3x$

100.



Solución: irracional, $y = \sqrt{x + 3}$

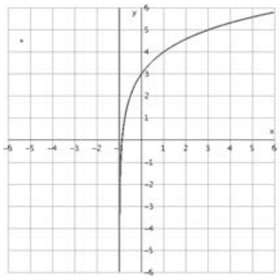
101.



Solución:

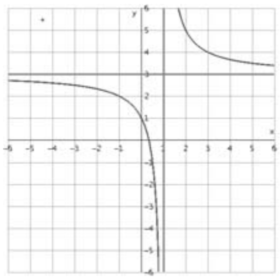
polinómica, $y = \dfrac{3x}{2} + 4$

102.



Solución: logarítmica, $y = 3 + \log_2 (x + 1)$

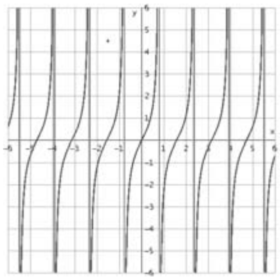
103.



Solución:

racional, $y = \dfrac{2}{x - 1} + 3$

104.



Solución:

trigonométrica, $y = \text{tg } 2x$

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Wiris o DERIVE.

105. El número de bolígrafos vendidos viene dado por la función f(x) = 6 – x, siendo **x** el precio en euros.

Calcula:

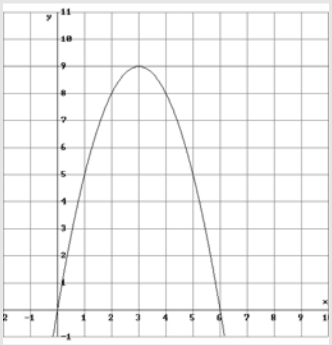
a) La función de ingresos, I(x)

b) El número de bolígrafos que hay que vender para que los ingresos sean máximos.

Solución:

a) $I(x) = (6 - x)x \int I(x) = 6x - x^2$

b) Representación gráfica:



El máximo beneficio se alcanza para x = 3 €

106. Un instalador de redes informáticas determina que puede ofertar instalaciones de 100 m, 200 m y 300 m a 500 €, 800 € y 900 €, respectivamente, con un tope de 300 m de longitud.

a) Calcula la fórmula de la parábola que pasa por los tres puntos.

b) Determina qué instalación haría por 400 euros.

Solución:

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} 10\,000a + 100b + c = 500 \\ 40\,000a + 200b + c = 800 \\ 90\,000a + 300b + c = 900 \end{array}\right\}$$

$a = -1/100$, $b = 6$, $c = 0$

$y = -x^2/100 + 6x$

b) $-x^2/100 + 6x = 400$

x = 76,39 m; x = 523,61 m

La solución x = 523,61 m no sirve por ser superior a 300 m

8 Continuidad, límites y asíntotas

1. Funciones especiales

■ Piensa y calcula

Completa la siguiente tabla:

	x	0,3	−0,3	1,8	−1,8	2,4	−2,4	3,9	−3,9
Parte entera de x	Ent (x)								
Parte decimal de x	Dec (x)								
Valor absoluto de x	|x|								

Solución:

	x	0,3	−0,3	1,8	−1,8	2,4	−2,4	3,9	−3,9
Parte entera de x	Ent (x)	0	−1	1	−2	2	−3	3	−4
Parte decimal de x	Dec (x)	0,3	0,7	0,8	0,2	0,4	0,6	0,9	0,1
Valor absoluto de x	|x|	0,3	0,3	1,8	1,8	2,4	2,4	3,9	3,9

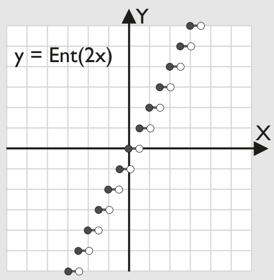
● Aplica la teoría

1. Representa las funciones:

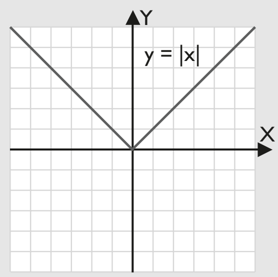
a) $y = \text{Ent}(2x)$ b) $y = |x|$

Solución:

a)



b)



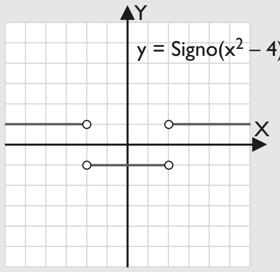
2. Representa las funciones:

a) $y = \text{Signo}(x^2 - 4)$

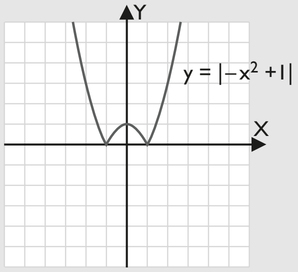
b) $y = |-x^2 + 1|$

Solución:

a)



b)



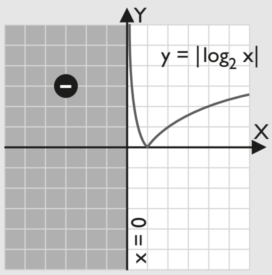
3. Representa las funciones:

a) $y = |\log_2 x|$

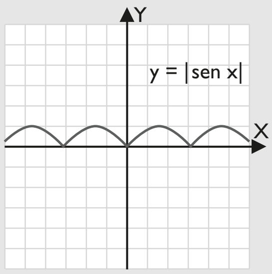
b) $y = |\text{sen } x|$

Solución:

a)



b)



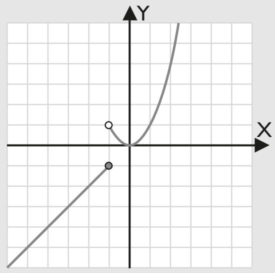
4. Representa las funciones:

a) $y = \begin{cases} x & \text{si } x \le -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

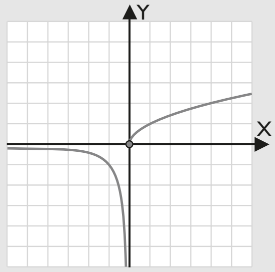
b) $y = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

Solución:

a)



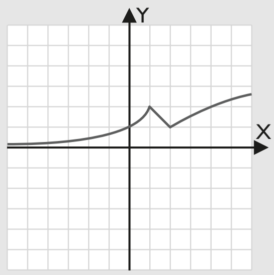
b)



5. Representa la función:

$$y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \le 1 \\ -x + 3 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ \log_2 x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:



2. Continuidad

■ Piensa y calcula

Completa mentalmente las siguientes tablas:

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
y = Ent(x)				

x	2,1	2,01	2,001	2,0001
y = Ent(x)				

Solución:

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
y = Ent(x)	1	1	1	1

x	2,1	2,01	2,001	2,0001
y = Ent(x)	2	2	2	2

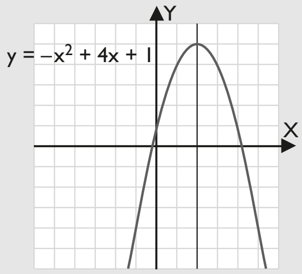
● Aplica la teoría

6. Representa las siguientes funciones y estudia la continuidad analizando su gráfica:

a) $y = -x^2 + 4x + 1$ b) $y = 2/x$ c) $y = \sqrt{x}$

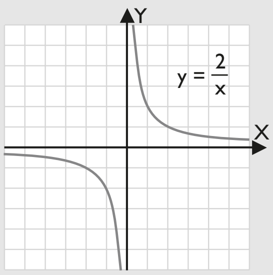
Solución:

a)



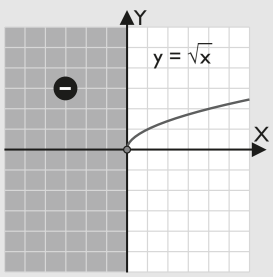
Es una parábola y es continua en todo $\mathbb{R}$

b)



Es una hipérbola y es discontinua en $x = 0$

c)

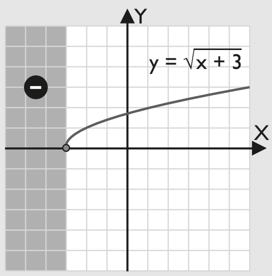


Es una función irracional y es continua en todo su dominio, $Dom(f) = [0, +\infty)$

7. Representa la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ y calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

Solución:

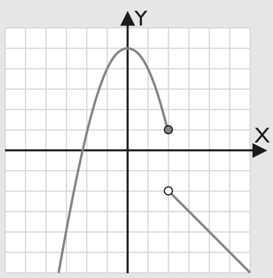


a) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x+3} = 2$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{x+3} = 1$

8. Representa la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & \text{si } x \le 2 \\ -x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

y calcula los límites laterales en $x = 2$

Solución:



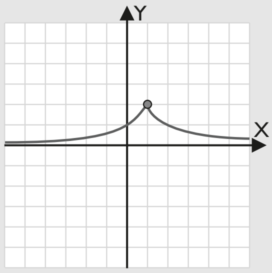
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (-x) = -2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-x^2 + 5) = 1$

9. Representa la función $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \le 1 \\ 2/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

y estudia la continuidad en x = 1

Solución:



$f(1) = 2^1 = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{x} = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2^x = 2$

La función es continua en x = 1

3. Discontinuidades

Piensa y calcula

Completa la siguiente sucesión:

2,9	2,99				$\to$	3^-	**3**	3^+	$\leftarrow$				3,01	3,1

Solución:

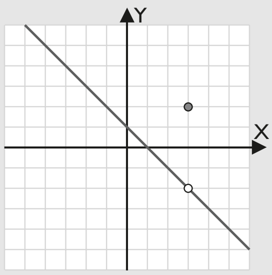
2,9	2,99	2,999	2,9999	2,99999	$\to$	3^-	**3**	3^+	$\leftarrow$	3,00001	3,0001	3,001	3,01	3,1

Aplica la teoría

10. Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Solución:



Se estudia el punto x = 3

f(3) = 2

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (-x + 1) = -2$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (-x + 1) = -2$

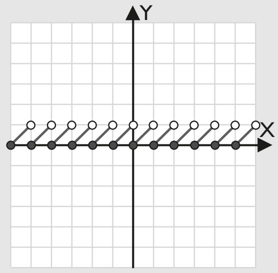
La función es discontinua en x = 3, donde tiene una discontinuidad evitable.

Se evita definiendo f(3) = –2

11. Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades:

y = Dec(x)

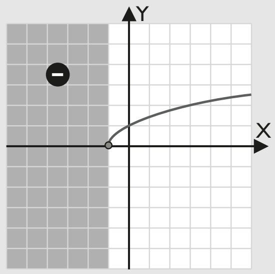
Solución:



Es discontinua en los números enteros, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto uno.

12. Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades: $y = \sqrt{x + 1}$

Solución:

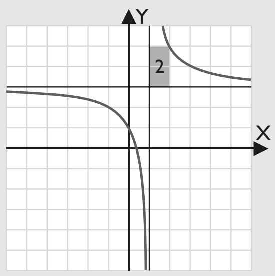


Es discontinua en $x = -1$, donde tiene una discontinuidad de 2ª especie, ya que no existe el límite lateral por la izquierda.

13. Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades: $y = \dfrac{3x - 1}{x - 1}$

Solución:

$y = 3 + \dfrac{2}{x - 1}$

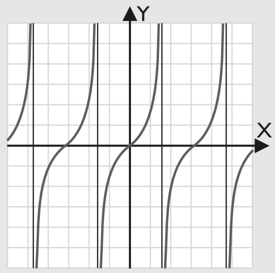


Es discontinua en $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

14. Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades:

$$y = \operatorname{tg} x$$

Solución:

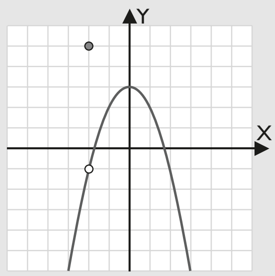


Es discontinua en $x = \dfrac{(2k + 1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

15. Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

Solución:



Es discontinua en $x = -2$, donde tiene una discontinuidad evitable. Se evita definiendo $f(-2) = -1$

4. Límites de funciones polinómicas y racionales

■ Piensa y calcula

Calcula mentalmente los siguientes cocientes y di cuál o cuáles no tienen solución, tienen una solución o tienen muchas soluciones.

a) $\frac{6}{2}$ b) $\frac{0}{0}$ c) $\frac{0}{5}$ d) $\frac{5}{0}$

Solución:

a) 3   b) Muchas soluciones.   c) 0   d) No tiene solución.

● Aplica la teoría

16. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5x^3 + 3x - 7)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 - 5x^3 + 3)$

Solución:

a) $-\infty$ b) $+\infty$

17. Calcula los siguientes límites y representa la función correspondiente:

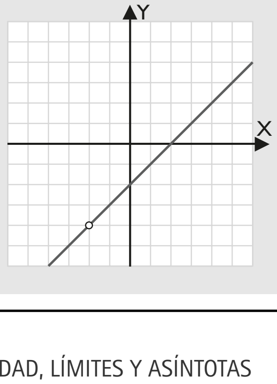
a) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{-3x + 5}{x - 1}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}} =$

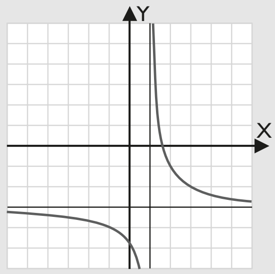
$= \lim\limits_{x \to -2} (x - 2) = -2 - 2 = -4$



b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{-3x + 5}{x - 1} = \frac{-3 \cdot 1^+ + 5}{1^+ - 1} = \frac{-3 + 5}{0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-3x + 5}{x - 1} = \frac{-3 \cdot 1^- + 5}{1^- - 1} = \frac{-3 + 5}{0^-} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

No existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$



18. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 5x}{-2x^2 + 7}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 5x}{-2x^2 + 7}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x^5 + 3x^2}{7x^3 - 1}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x^5 + 3x^2}{7x^3 - 1}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3}{4x^3 - 5}$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 3}{4x^3 - 5}$

Solución:

a) $-\frac{3}{2}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) $-\infty$

d) $-\infty$ e) 0   f) 0

5. Límites de funciones irracionales y límites de operaciones

Piensa y calcula

Halla el resultado de operar los siguientes símbolos; puede dar $+\infty$, $-\infty$ o indeterminado.

a) $+\infty + \infty$ b) $+\infty - \infty$ c) $-\infty + \infty$ d) $-\infty - \infty$

Solución:

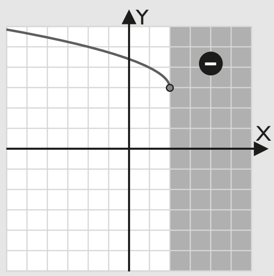
a) $+\infty$ b) Indeterminado. c) Indeterminado. d) $-\infty$

Aplica la teoría

19. Representa la función $f(x) = 3 + \sqrt{2 - x}$

Halla el límite de f(x) cuando $x \to 2^-$

Solución:

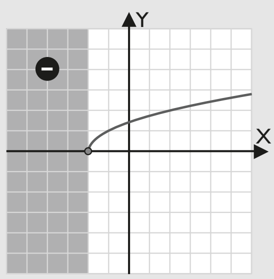


$$\lim_{x \to 2^-} \left(3 + \sqrt{2 - x}\right) = 3$$

20. Representa la función $f(x) = \sqrt{x + 2}$

Halla el límite de f(x) cuando $x \to +\infty$

Solución:



$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + 2} = +\infty$$

21. Halla el siguiente límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x^2 + x - 1}{x + 3} - 5x\right)$$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x^2 + x - 1}{x + 3} - 5x\right) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 + x - 1 - 5x(x + 3)}{x + 3} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{5x^2} + x - 1 - \cancel{5x^2} - 15x}{x + 3} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-14x - 1}{x + 3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -14$$

22. Halla el siguiente límite:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(7x^2 - \frac{7x^3 + 14x^2 - 5x}{x + 2}\right)$$

Solución:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(7x^2 - \frac{7x^3 + 14x^2 - 5x}{x + 2}\right) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{7x^2(x + 2) - (7x^3 + 14x^2 - 5x)}{x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{7x^3} + \cancel{14x^2} - \cancel{7x^3} - \cancel{14x^2} + 5x}{x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{5x}{x + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 5$$

23. Halla el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 6x}\right)$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 6x}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 + 6x}\right)\left(x + \sqrt{x^2 + 6x}\right)}{x + \sqrt{x^2 + 6x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 6x)}{x + \sqrt{x^2 + 6x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 6x}{x + \sqrt{x^2 + 6x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-6x}{x + \sqrt{x^2 + 6x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-6x}{x + \sqrt{x^2}} = \frac{-6}{1 + 1} = -3$$

24. Halla el límite de la siguiente sucesión: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3n - \sqrt{9n^2 + 5n}\right)$

Solución:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(3n - \sqrt{9n^2 + 5n}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(3n - \sqrt{9n^2 + 5n}\right)\left(3n + \sqrt{9n^2 + 5n}\right)}{3n + \sqrt{9n^2 + 5n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{9n^2 - (9n^2 + 5n)}{3n + \sqrt{9n^2 + 5n}} =$$

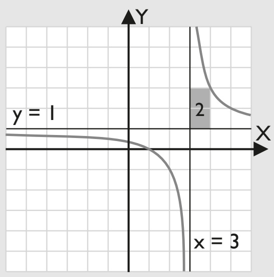
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{9n^2} - \cancel{9n^2} - 5n}{3n + \sqrt{9n^2 + 5n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{-5n}{3n + \sqrt{9n^2 + 5n}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{n \to +\infty} \frac{-5n}{3n + \sqrt{9n^2 + 5n}} = \frac{-5}{3 + 3} = -\frac{5}{6}$$

6. Asíntotas de funciones racionales

Piensa y calcula

Dibuja la siguiente hipérbola, halla sus asíntotas y represéntalas: $y = \dfrac{2}{x - 3} + 1$

Solución:



Asíntotas:

Vertical: $x = 3$

Horizontal: $y = 1$

Aplica la teoría

Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales y la posición de la curva respecto de cada una de ellas:

25. $y = \dfrac{x^2 + 4}{2x}$

Solución:

Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 4}{2x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 4}{2x} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

Horizontal: no tiene.

Oblicua:

$y = \dfrac{x}{2}$

$$\frac{x^2 + 4}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{4}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x} = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.

26. $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{1 - x}$

Solución:

Verticales: $1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x - 2}{1 - x} = \frac{1^+ - 1^+ - 2}{1 - 1^+} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x - 2}{1 - x} = \frac{1^- - 1^- - 2}{1 - 1^-} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Horizontal: no tiene.

Oblicua:

$$\begin{array}{rl} x^2 - x - 2 & \underline{|\ -x + 1} \\ \underline{-x^2 + x} & \ \ -x \\ -2 & \end{array}$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{1 - x} = -x - \frac{2}{-x + 1} = -x + \frac{2}{x - 1}$$

$y = -x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x - 1} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x - 1} = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.

27. $y = \dfrac{6x}{x^2 + 3}$

Solución:

Verticales: no tiene.

Horizontal: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x}{x^2 + 3} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6x}{x^2 + 3} = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.

Oblicua: no tiene.

28. $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

Solución:

Verticales: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1^+}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1^-}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1^-}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1^+}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Horizontal:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \Rightarrow y = 1$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 - 1} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2 - 1} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.

Oblicua: no tiene.

Ejercicios y problemas

1. Funciones especiales

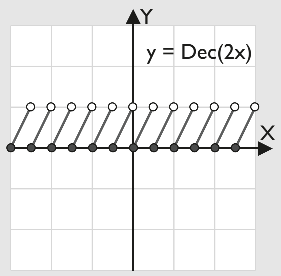
29. Representa las funciones:

a) $y = \text{Dec}(2x)$

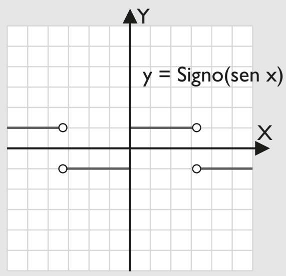
b) $y = \text{Signo}(\text{sen } x)$

Solución:

a)



b)



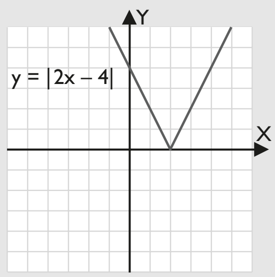
30. Representa las funciones:

a) $y = |2x - 4|$

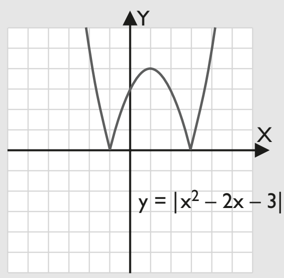
b) $y = |x^2 - 2x - 3|$

Solución:

a)



b)

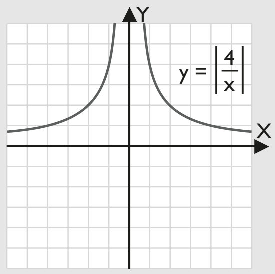


31. Representa las funciones:

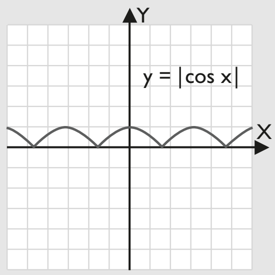
a) $y = \left|\dfrac{4}{x}\right|$ b) $y = |\cos x|$

Solución:

a)

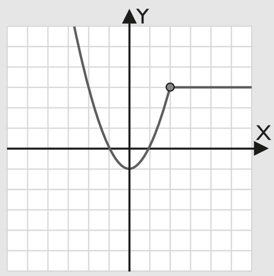


b)



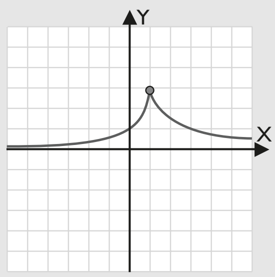
32. Representa la función: $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Solución:



33. Representa la función: $y = \begin{cases} 3^x & \text{si } x \le 1 \\ 3/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

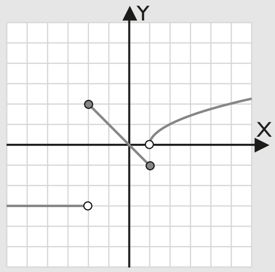
Solución:



34. Representa la función:

$$y = \begin{cases} -3 & \text{si } x < -2 \\ -x & \text{si } -2 \le x \le 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:



2. Continuidad

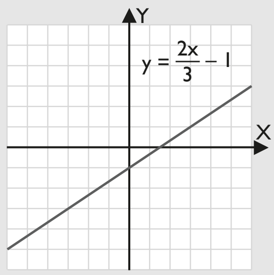
35. Representa las siguientes funciones y estudia la continuidad de forma gráfica:

a) $y = \dfrac{2x}{3} - 1$

b) $y = \left|\dfrac{3}{x}\right|$

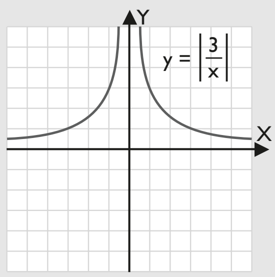
Solución:

a)



Es una recta y es continua en todo $\mathbb{R}$

b)



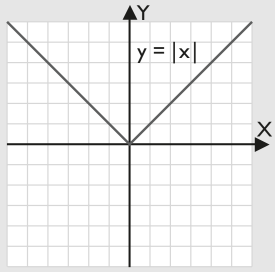
Es el valor absoluto de una función racional, de una hipérbola; es discontinua en $x = 0$

36. Representa las siguientes funciones y estudia la continuidad de forma gráfica:

a) $y = |x|$ b) $y = \text{Dec}(x)$

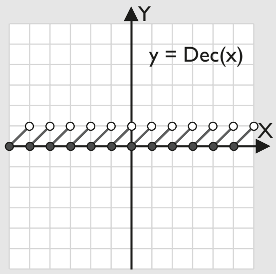
Solución:

a)



Es el valor absoluto de una función polinómica y es continua en todo $\mathbb{R}$

b)



Es la función parte decimal y es discontinua en todos los puntos de abscisa entera.

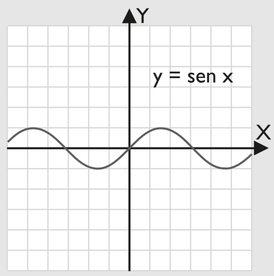
37. Representa la función:

$$f(x) = \text{sen } x$$

y calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to \pi} f(x)$

Solución:



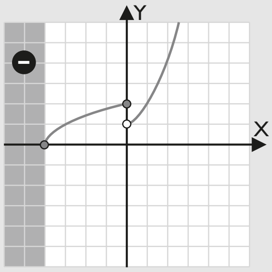
a) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \text{sen } x = 1$ b) $\lim\limits_{x \to \pi} \text{sen } x = 0$

38. Representa la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & \text{si } x \le 0 \\ 2^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

y calcula los límites laterales en $x = 0$

Solución:



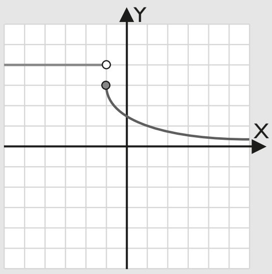
a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$

39. Representa la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -1 \\ 3/(x+2) & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

y estudia la continuidad en $x = -1$

Solución:



$f(-1) = 3$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 4$

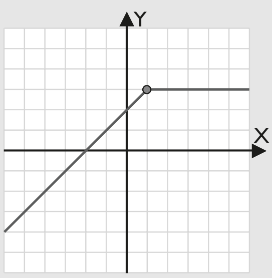
La función es discontinua en $x = -1$

3. Discontinuidades

40. Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:



Se estudia el punto $x = 1$

$f(1) = 3$

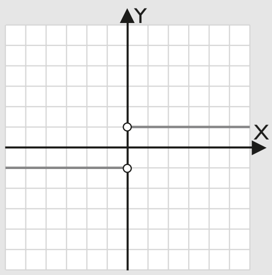
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 3 = 3$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x + 2) = 3$

La función es continua en $x = 1$; por lo tanto, es continua en todo $\mathbb{R}$

41. Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades: $y = \text{Signo}(x)$

Solución:



Se estudia el punto $x = 0$

$f(0)$ = no existe.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \text{Signo}(x) = 1$

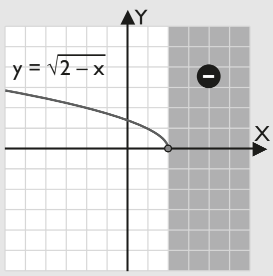
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \text{Signo}(x) = -1$

La función es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito de 2 unidades.

42. Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades:

$$y = \sqrt{2 - x}$$

Solución:

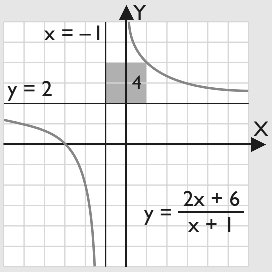


Es discontinua en $x = 2$, donde tiene una discontinuidad de 2ª especie, ya que no existe el límite lateral por la derecha.

43. Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades:

$$y = \frac{2x + 6}{x + 1}$$

Solución:

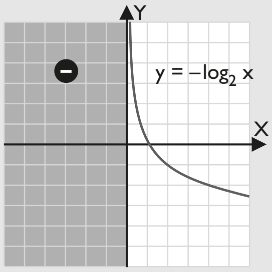


Es discontinua en $x = -1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

44. Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades:

$$y = -\log_2 x$$

Solución:

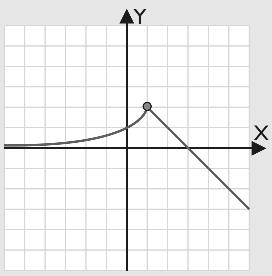


Es continua en todo su dominio, es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 2ª especie, ya que no existe el límite lateral por la izquierda.

45. Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:



Se estudia el punto $x = 1$

$f(1) = -1 + 3 = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x + 3) = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2^x = 2$

La función es continua en $x = 1$

4. Límites de funciones polinómicas y racionales

46. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^5 + 7x^2 - 3x + 1)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^5 + 7x^2 - 3x + 1)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^5 + 7x^2 - 3x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^5) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^5 + 7x^2 - 3x + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^5) = +\infty$

47. Calcula el siguiente límite:

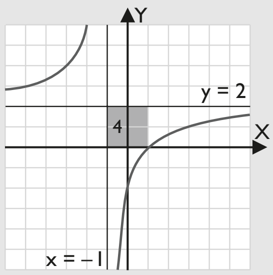
$$\lim_{x \to -1} \frac{2x - 2}{x + 1}$$

Representa la función correspondiente.

Solución:

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x - 2}{x + 1} = \frac{2 \cdot (-1^+) - 2}{(-1^+) + 1} = \frac{-2 - 2}{0^+} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2x - 2}{x + 1} = \frac{2 \cdot (-1^-) - 2}{(-1^-) + 1} = \frac{-2 - 2}{0^-} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$



48. Calcula el siguiente límite:

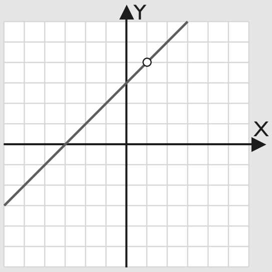
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

Representa la función correspondiente.

Solución:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x - 1)}(x + 3)}{\cancel{x - 1}} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 3) = 1 + 3 = 4$$



49. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4x + 1}{9x^2 + 5}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4x + 1}{9x^2 + 5}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4x + 1}{9x^2 + 5} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4x + 1}{9x^2 + 5} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 0$

50. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 5}{-x^4 + 2x^3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^4 - 5}{-x^4 + 2x^3}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 5}{-x^4 + 2x^3} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = -3$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^4 - 5}{-x^4 + 2x^3} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = -3$

51. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^5 + 7x^3}{4x^2 - 3x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^5 + 7x^3}{4x^2 - 3x}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^5 + 7x^3}{4x^2 - 3x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^5 + 7x^3}{4x^2 - 3x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = +\infty$

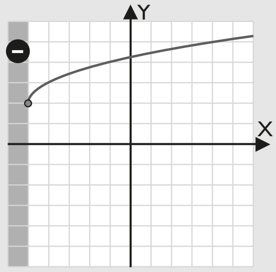
5. Límites de funciones irracionales y límites de operaciones

52. Representa la función:

$$f(x) = 2 + \sqrt{x + 5}$$

Halla el límite de f(x) cuando $x \to -5^+$

Solución:



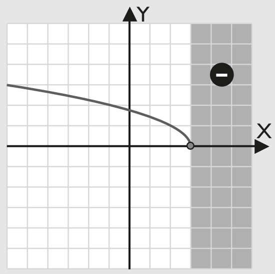
$\lim\limits_{x \to -5^+} \left(2 + \sqrt{x + 5}\right) = 2$

53. Representa la función:

$$f(x) = \sqrt{3 - x}$$

Halla el límite de f(x) cuando $x \to -\infty$

Solución:



$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{3 - x} = +\infty$

54. Halla el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x - \dfrac{6x^2 + 5x - 4}{2x + 1}\right)$

Solución:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x - \dfrac{6x^2 + 5x - 4}{2x + 1}\right) = [\infty - \infty] =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x(2x + 1) - (6x^2 + 5x - 4)}{2x + 1} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 + 3x - 6x^2 - 5x + 4}{2x + 1} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{6x^2} + 3x - \cancel{6x^2} - 5x + 4}{2x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x + 4}{2x + 1} =$

$= \left[\dfrac{-\infty}{\infty}\right] = \dfrac{-2}{2} = -1$

55. Halla el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{10x^3 + x^2 - 7}{2x^2 + 3} - 5x \right)$

Solución:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{10x^3 + x^2 - 7}{2x^2 + 3} - 5x \right) = [-\infty + \infty] = \lim_{x \to -\infty} \frac{10x^3 + x^2 - 7 - 5x(2x^2 + 3)}{2x^2 + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{10x^3} + x^2 - 7 - \cancel{10x^3} - 15x}{2x^2 + 3} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 15x - 7}{2x^2 + 3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{2}$$

56. Halla el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 - 3x}\right)$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 - 3x}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2x - \sqrt{4x^2 - 3x}\right)\left(2x + \sqrt{4x^2 - 3x}\right)}{2x + \sqrt{4x^2 - 3x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{4x^2} - \cancel{4x^2} + 3x}{2x + \sqrt{4x^2 - 3x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{2x + \sqrt{4x^2 - 3x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{2x + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$$

57. Halla el límite de la siguiente sucesión: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{3n - 5} - \sqrt{n + 2}\right)$

Solución:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{3n - 5} - \sqrt{n + 2}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{3n - 5} - \sqrt{n + 2}\right)\left(\sqrt{3n - 5} + \sqrt{n + 2}\right)}{\sqrt{3n - 5} + \sqrt{n + 2}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3n - 5 - n - 2}{\sqrt{3n - 5} + \sqrt{n + 2}} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{2n - 7}{\sqrt{3n - 5} + \sqrt{n + 2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n}{\sqrt{3n} + \sqrt{n}} = +\infty$$

6. Asíntotas de funciones racionales

58. Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales y la posición de la curva respecto de cada una de ellas:

a) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

Solución:

a) Verticales:

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \frac{1^+ - 3 \cdot 1^+ + 3}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \frac{1^- - 3 \cdot 1^- + 3}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Horizontal: no tiene.

Oblicua:

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 3x + 3 & x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2 + x} & x - 2 \\ \quad -2x + 3 & \\ \quad \underline{\;\;\; 2x - 2} & \\ \qquad\quad 1 & \end{array}$$

$$\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = x - 2 + \frac{1}{x - 1}$$

La asíntota es: $y = x - 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x - 1} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x - 1} = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.

b) Verticales: no tiene

Horizontal:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+3} = 1 \Rightarrow \text{La asíntota es: } y = 1$$

$$\frac{x^2}{x^2+3} - 1 = \frac{x^2 - x^2 - 3}{x^2+3} = \frac{-3}{x^2+3}$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{3}{x^2+3}\right) = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{3}{x^2+3}\right) = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.

Oblicua: no tiene.

59. Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales y la posición de la curva respecto de cada una de ellas:

a) $y = \dfrac{x}{4 - x^2}$

b) $y = \dfrac{2x - 1}{x^2}$

Solución:

a) Verticales: $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -2$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{4-x^2} = \frac{2^+}{4-4^+} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{4-x^2} = \frac{2^-}{4-4^-} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x}{4-x^2} = \frac{-2^+}{4-4^-} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x}{4-x^2} = \frac{-2^-}{4-4^+} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

Horizontal:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{4-x^2} = 0 \Rightarrow \text{La asíntota es: } y = 0$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{4-x^2} = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{4-x^2} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.

Oblicua: no tiene.

b) Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x-1}{x^2} = \frac{2\cdot 0^+ - 1}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x-1}{x^2} = \frac{2\cdot 0^- - 1}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Horizontal:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x^2} = 0 \Rightarrow \text{La asíntota es: } y = 0$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x^2} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x^2} = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.

Oblicua: no tiene.

60. Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales y la posición de la curva respecto de cada una de ellas:

a) $y = \dfrac{5}{x^2 + 1}$

b) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$

Solución:

a) Verticales: no tiene.

Horizontal: $y = 0$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \text{La asíntota es: } y = 0$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2+1} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^2+1} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.

Oblicua: no tiene.

b) Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+2x-1}{x} = \frac{0^+ + 2\cdot 0^+ - 1}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+2x-1}{x} = \frac{0^+ + 2\cdot 0^- - 1}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Horizontal: no tiene.

Oblicua:

$$\frac{x^2+2x-1}{x} = x + 2 + \frac{-1}{x}$$

La asíntota es: $y = x + 2$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.

Ejercicios y problemas

Para ampliar

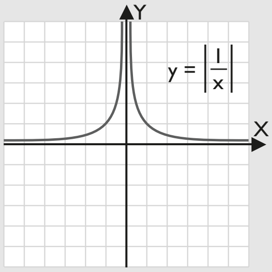
61. Representa las funciones:

a) $f(x) = \left|\dfrac{1}{x}\right|$

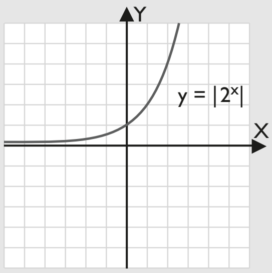
b) $f(x) = |2^x|$

Solución:

a)



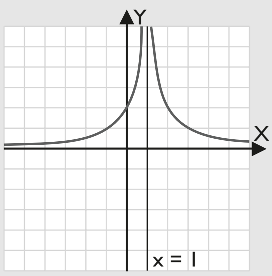
b)



62. Representa la función:

$$f(x) = \left|\frac{2}{x-1}\right|$$

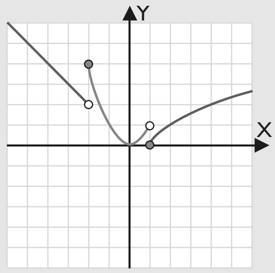
Solución:



63. Representa la función:

$$y = \begin{cases} -x & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \le x < 1 \\ \log_2 x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Solución:



64. Halla el dominio y el campo de continuidad de cada una de las siguientes funciones, es decir, el conjunto donde es continua, y razona por qué son iguales o distintos.

a) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + x - 4$ b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+4}$ d) $f(x) = \sqrt{x-3}$

Solución:

a) $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$C(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$

El dominio y el campo de continuidad son iguales por estar definida la función por una sola fórmula.

b) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$C(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

El punto $x = 1$ de discontinuidad no está en el dominio.

El dominio y el campo de continuidad son iguales por estar definida la función por una sola fórmula.

c) $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$C(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

No hay ningún punto de discontinuidad.

El dominio y el campo de continuidad son iguales por estar definida la función por una sola fórmula.

d) $Dom(f) = [3, +\infty)$

$C(f) = [3, +\infty)$

El dominio y el campo de continuidad son iguales por estar definida la función por una sola fórmula.

65. Halla el dominio y el campo de continuidad de cada una de las siguientes funciones y razona por qué son iguales o distintos.

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = \log_2 x$

c) $f(x) = \text{sen } x$ d) $f(x) = \text{tg } x$

e) $f(x) = \text{Ent}(x)$ f) $f(x) = \text{Signo}(x)$

Solución:

a) $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$C(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

El dominio y el campo de continuidad son iguales por estar definida la función por una sola fórmula.

b) $Dom(f) = (0, +\infty)$

$C(f) = (0, +\infty)$

El dominio y el campo de continuidad son iguales por estar definida la función por una sola fórmula.

c) $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$C(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

El dominio y el campo de continuidad son iguales por estar definida la función por una sola fórmula.

d) $Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$C(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

El dominio y el campo de continuidad son iguales por estar definida la función por una sola fórmula.

e) $Dom(f) = \mathbb{R}$

$C(f) = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

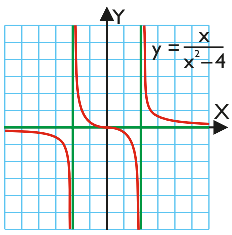
El dominio y el campo de continuidad no son iguales; se observa que la función no está definida por una fórmula analítica.

f) $Dom(f) = \mathbb{R}$

$C(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

El dominio y el campo de continuidad no son iguales; se observa que la función no está definida por una fórmula analítica.

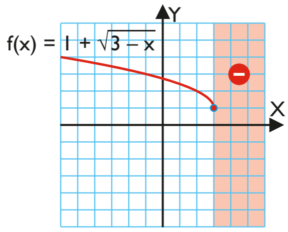
66. Halla y clasifica las discontinuidades de la siguiente función a partir de su gráfica:



Solución:

Es discontinua en $x = -2$ y en $x = 2$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

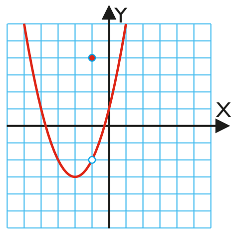
67. Halla y clasifica las discontinuidades de la siguiente función a partir de su gráfica:



Solución:

Es discontinua en $x = 3$, donde tiene una discontinuidad de 2ª especie porque no existe el límite lateral por la derecha.

68. Halla y clasifica las discontinuidades de la siguiente función a partir de su gráfica:



$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 1 & \text{si } x \neq -1 \\ 4 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

Solución:

Es discontinua en $x = -1$, donde tiene una discontinuidad evitable. Se evita definiendo $f(-1) = -2$

69. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} (x^5 - 7x^2 - 4x + 23)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} (-x^6 + 7x^5 - 2x + 1)$

Solución:

a) 23

b) 5

70. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-5x^3 + x}{2x^2 - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-5x^3 + x}{2x^2 - 1}$

Solución:

a) $-\infty$

b) $+\infty$

Ejercicios y problemas

71. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 5x^2 - 2x + 7)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + 2x^2 - 4x + 5)$

Solución:

a) $+\infty$ b) $-\infty$

72. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3x - 1}{x + 2}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 4x + 3}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3x - 1}{x + 2} = \dfrac{3 \cdot 5 - 1}{5 + 2} = \dfrac{14}{7} = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\cancel{x - 3}}{(x - 1)(\cancel{x - 3})} =$

$= \dfrac{1}{3 - 1} = \dfrac{1}{2}$

73. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3 + 7}{2x^3 + 5}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3 + 7}{2x^3 + 5}$

Solución:

a) $-\dfrac{1}{2}$ b) $-\dfrac{1}{2}$

74. Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x + 1}{x - 5}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{x + 1}{x - 5} = \dfrac{5^+ + 1}{5^+ - 5} = \dfrac{6}{0^+} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{x + 1}{x - 5} = \dfrac{5^- + 1}{5^- - 5} = \dfrac{6}{0^-} = -\infty$

Como los límites laterales son distintos, el límite cuando **x** tiende a 5 no existe.

75. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x - 1}{-2x^3 + 5}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x - 1}{-2x^3 + 5}$

Solución:

a) 0 b) 0

76. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x(\cancel{x - 2})}{(x + 2)(\cancel{x - 2})} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x + 2} = \dfrac{2}{2 + 2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

77. Halla el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{x - \sqrt{3}}{x^2 - 3}$

Solución:

$\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{x - \sqrt{3}}{x^2 - 3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x^2 - 3)(x + \sqrt{3})} = \lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{\cancel{x^2 - 3}}{(\cancel{x^2 - 3})(x + \sqrt{3})} = \lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{1}{x + \sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

78. Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 8} - 3}{x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{1 - \sqrt{3x - 5}}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 8} - 3}{x - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(\sqrt{x + 8} - 3)(\sqrt{x + 8} + 3)}{(x - 1)(\sqrt{x + 8} + 3)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 8 - 9}{(x - 1)(\sqrt{x + 8} + 3)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{x - 1}}{(\cancel{x - 1})(\sqrt{x + 8} + 3)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x + 8} + 3} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{1 + 8} + 3} = \dfrac{1}{3 + 3} = \dfrac{1}{6}$

$$\text{b) } \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{1-\sqrt{3x-5}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\left(1+\sqrt{3x-5}\right)}{\left(1-\sqrt{3x-5}\right)\left(1+\sqrt{3x-5}\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\left(1+\sqrt{3x-5}\right)}{1-3x+5} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\left(1+\sqrt{3x-5}\right)}{-3x+6} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\left(1+\sqrt{3x-5}\right)}{-3\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2} \frac{1+\sqrt{3x-5}}{-3} = \frac{1+\sqrt{6-5}}{-3} = -\frac{2}{3}$$

79. Halla una función racional que tenga como asíntota vertical la recta x = 2

Solución:

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

80. Halla una función racional que tenga como asíntota horizontal la recta y = 3

Solución:

$$f(x) = \frac{3x}{x+5}$$

81. Halla una función racional que tenga como asíntota oblicua la recta y = 2x – 1

Solución:

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x + 1}{x}$$

82. Representa y halla mentalmente las asíntotas de las siguientes funciones exponenciales:

a) $y = 2^x$

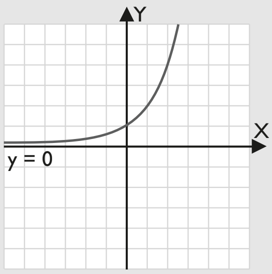
b) $y = -5 + 2^{x-1}$

c) $y = -3 + 2^x$

d) $y = 1 + 2^{x-1}$

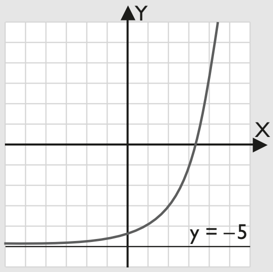
Solución:

a)



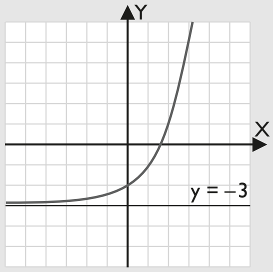
Horizontal: y = 0

b)



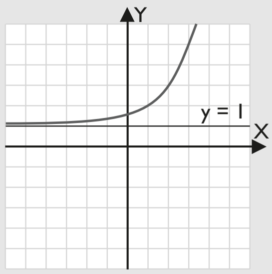
Horizontal: y = –5

c)



Horizontal: y = –3

d)



Horizontal: y = 1

83. Representa y halla mentalmente las asíntotas de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $y = \log_2 x$

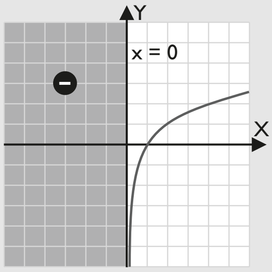
b) $y = 3 + \log_2 x$

c) $y = \log_2 (x + 3)$

d) $y = 1 + \log_2 (x - 3)$

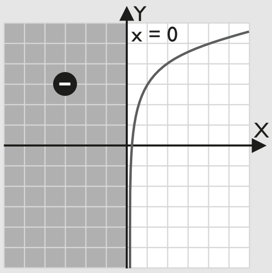
Solución:

a)



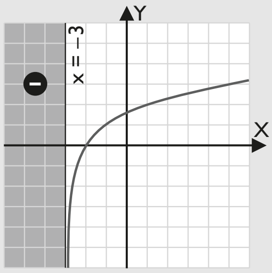
Vertical: x = 0

b)



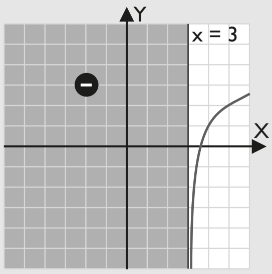
Vertical: x = 0

c)



Vertical: x = –3

d)



Vertical: x = 3

84. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$

a) completa mentalmente las siguientes tablas:

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
f(x)				

x	–0,1	–0,01	–0,001	–0,0001
f(x)				

b) Observando las tablas, induce los siguientes límites:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$

c) Calcula f(0), razona si la función f(x) es continua en x = 0 y, en caso negativo, clasifica la discontinuidad.

Solución:

a)

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
f(x)	10	100	1 000	10 000

x	–0,1	–0,01	–0,001	–0,0001
f(x)	–10	–100	–1 000	–10 000

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

c) f(0) no existe y, viendo los límites laterales obtenidos en el apartado b), la función es discontinua en x = 0, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

Con calculadora

85. Dada la función $f(x) = 2^x$

a) completa las siguientes tablas:

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
f(x)				

x	–0,1	–0,01	–0,001	–0,0001
f(x)				

b) Observando las tablas, induce los siguientes límites:

$\lim\limits_{x \to 0^+} 2^x$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^-} 2^x$

c) Calcula f(0) y razona si la función f(x) es continua en x = 0

Solución:

a)

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
f(x)	1,07	1,007	1,0007	1,00007

x	–0,1	–0,01	–0,001	–0,0001
f(x)	0,9	0,99	0,999	0,9999

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} 2^x = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^-} 2^x = 1$

c) f(0) = 1 y, viendo los límites laterales obtenidos en el apartado b), la función es continua en x = 0

86. Dada la función $f(x) = \sqrt{x}$

a) completa las siguientes tablas:

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
f(x)				

x	–0,1	–0,01	–0,001	–0,0001
f(x)				

b) Observando las tablas, induce los siguientes límites:

$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}$ $\qquad \lim_{x \to 0^-} \sqrt{x}$

c) Calcula f(0), razona si la función f(x) es continua en x = 0 y clasifica la discontinuidad.

Solución:

a)

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
f(x)	0,3	0,1	0,03	0,01

x	–0,1	–0,01	–0,001	–0,0001
f(x)	No existen			

b) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ $\qquad \lim_{x \to 0^-} \sqrt{x}$ no existe

c) f(0) = 0 y, viendo los límites obtenidos en el apartado b), la función es discontinua en x = 0, donde tiene una discontinuidad de 2ª especie.

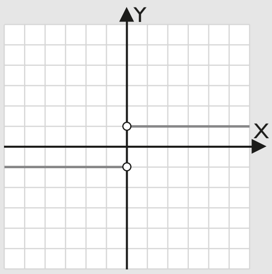
Problemas

87. Representa la función:

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

¿Qué función es?

Solución:



Es la función y = Signo(x)

88. Halla el valor de **k** para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \le 2 \\ k & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x - 1) = 4 - 1 = 3$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} k = k$

Por tanto, tiene que ser: k = 3

89. Halla el valor de **n** para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x + n & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$$

Solución:

$f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (-x + n) = 2 + n$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (x^2 - 1) = 4 - 1 = 3$

Por tanto, tiene que ser:

$2 + n = 3 \Rightarrow n = 1$

90. Halla el valor de **k** para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ k/x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Solución:

$f(1) = \frac{k}{1} = k$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x + 2) = 1 + 2 = 3$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{k}{x} = k$

Por tanto, tiene que ser: k = 3

91. Halla el valor de **n** para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \le 1 \\ 3x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

$f(1) = 2^1 = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2^x = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (3x + n) = 3 + n$

Por tanto, tiene que ser: $3 + n = 2 \Rightarrow n = -1$

92. Los ingresos de una empresa en función del número de años que lleva funcionando vienen dados por la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \le x \le 9 \\ \dfrac{4x - 30}{x - 7} & \text{si } x > 9 \end{cases}$$

donde **x** viene dado en años, y f(x), en millones de euros.

¿Es continua la función f(x)?

Solución:

Sí es continua, porque:

$f(9) = 3$

$\lim\limits_{x \to 9^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 9^-} \sqrt{x} = 3$

$\lim\limits_{x \to 9^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 9^+} \dfrac{4x - 30}{x - 7} = \dfrac{6}{2} = 3$

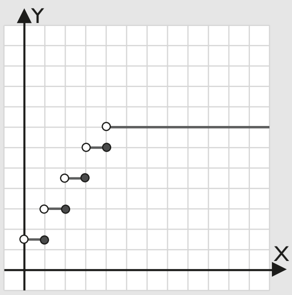
93. En un aparcamiento que permanece abierto 10 horas diarias, hay un cartel que dice: "cada hora, 1,5 €" y "más de 4 horas, 7 €".

a) Representa la función correspondiente.

b) ¿En qué puntos es discontinua, y qué tipo de discontinuidad tiene en cada uno de ellos?

Solución:

a)



b) Es discontinua en: x = 1, x = 2, x = 3, x = 4

En esos puntos tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito. En los tres primeros puntos el salto es de 1,5, y en el último el salto es de 1

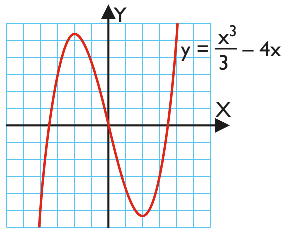
94. Calcula el valor de **a** para que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 + 3x}{2x^2 - 5} = 3$$

Solución:

$\dfrac{a}{2} = 3 \Rightarrow a = 6$

95. Observando la gráfica:



calcula:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{3} - 4x\right)$

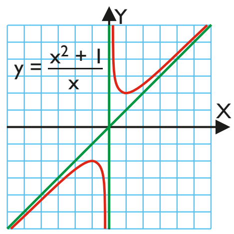
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{3} - 4x\right)$

Solución:

a) $+\infty$

b) $-\infty$

96. Observando la gráfica:



calcula:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + 1}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Solución:

a) $+\infty$ b) $-\infty$

c) $+\infty$ d) $-\infty$

97. Rocío comienza a trabajar en una empresa de informática. La función que calcula el número de ordenadores que monta, en función del tiempo, viene dada por:

$$f(t) = \frac{6t}{t + 5}$$

donde **t** es el número de días que lleva trabajando, y f(t), el número de ordenadores que monta.

a) ¿Cuántos ordenadores monta el primer día?

b) ¿Cuántos ordenadores monta el quinto día?

c) ¿Cuántos ordenadores monta el décimo día?

d) ¿Qué día montará 5 ordenadores?

e) ¿Puede llegar a montar algún día 7 ordenadores?

f) ¿A qué número tenderá cuando lleve mucho tiempo trabajando?

Solución:

a) 1 b) 3 c) 4 d) $\frac{6t}{t + 5} = 5 \Rightarrow t = 25$

e) No, porque al resolver la ecuación $\frac{6t}{t + 5} = 7$ se obtiene un número negativo.

f) $\lim_{t \to +\infty} \frac{6t}{t + 5} = 6$

98. Los gastos mensuales en euros que una familia tiene en alimentación vienen dados por la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}4x + k & \text{si } 0 \le x \le 1\,000 \\ \dfrac{2\,000x}{x + 3\,000} & \text{si } x > 1\,000 \end{cases}$$

donde **x** son los ingresos de la familia en euros.

a) Halla el valor de **k** para que los gastos sean continuos, es decir, no haya salto en x = 1 000 €

b) ¿Hacia qué valor se estabilizan los gastos de alimentación de las familias con la renta más alta?

Solución:

a) k = 100 b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2\,000x}{x + 3\,000} = 2\,000$ €

99. En una ciudad se hace un censo inicial y se sabe que el número de habitantes evoluciona según la función:

$$P(t) = \frac{t^2 + 500t + 2\,500}{(t + 50)^2}$$

donde **t** es el número de años transcurridos desde que se hace el censo, y P(t) es el número de habitantes en millones.

a) ¿Cuántos habitantes hay cuando se realiza el censo inicial?

b) ¿Cuántos habitantes habrá dentro de 50 años?

c) Con el paso del tiempo, ¿hacia qué población se estabilizará? Halla la asíntota horizontal para comprobarlo.

Solución:

a) $t = 0 \Rightarrow P(0) = 1$ millón

b) $t = 50 \Rightarrow P(50) = 3$ millones

c) $\lim_{t \to +\infty} \frac{t^2 + 500t + 2\,500}{(t + 50)^2} = 1$ millón

Asíntota horizontal: y = 1

100. Halla las asíntotas de la siguiente función racional y la posición de la curva respecto de cada una de ellas:

$$y = \frac{3x}{x^2 + 1}$$

Solución:

Verticales: no tiene.

Horizontal: y = 0

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x^2 + 1} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x^2 + 1} = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.

Oblicua: no tiene.

101. Halla las asíntotas de la siguiente función racional y la posición de la curva respecto de cada una de ellas:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Solución:

Verticales: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{1^+ + 1}{1^+ - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{1^- + 1}{1^- - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{1^- + 1}{1^- - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{1^+ + 1}{1^+ - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

Horizontal: y = 1

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2 - 1} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^2 - 1} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.

Oblicua: no tiene.

Para profundizar

102. Halla el valor de f(3) para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$$

Solución:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \lim_{x \to 3} x = 3$$

$f(3) = 3$

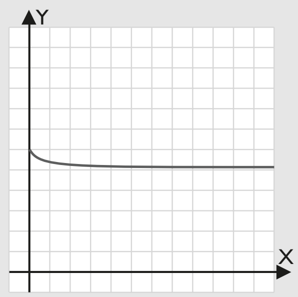
103. Una determinada especie evoluciona según la función:

$$f(t) = 5 + 2^{-t}$$

donde **t** es el número de años y f(t) son los millones de unidades existentes.

Representa la gráfica y, observándola, contesta a la siguiente pregunta: ¿la especie está en vías de extinción?

Solución:



La especie no está en vías de extinción, porque tiende a estabilizarse hacia 5 millones de unidades.

$$\lim_{t \to +\infty} (5 + 2^{-t}) = 5$$

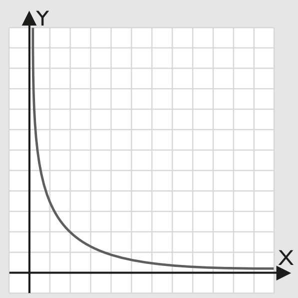
104. Una determinada especie evoluciona según la función:

$$f(t) = \frac{2}{t}, t > 0$$

donde **t** es el número de años y f(t) son los millones de unidades existentes.

Representa la gráfica y, observándola, contesta a la siguiente pregunta: ¿la especie está en vías de extinción?

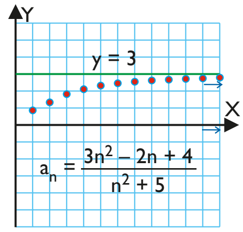
Solución:



La especie sí está en vías de extinción, porque tiende hacia 0.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{2}{t} = 0$$

105. Observando la gráfica de la sucesión:



a) calcula: $\lim_{n \to +\infty} \frac{3n^2 - 2n + 4}{n^2 + 5}$

b) Halla el límite analíticamente para comprobar el resultado.

Solución:

a) 3 b) 3

106. Una entidad financiera paga un tanto por ciento en función del dinero depositado, definido por:

$$R(x) = \frac{6x + 8\,000}{x + 10\,000}$$

donde **x** es la cantidad de dinero depositado en euros, y R(x), el valor del tanto por ciento.

Hacia qué valor se estabilizará el tanto por ciento cuando se deposite una cantidad muy grande.

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6x + 8\,000}{x + 10\,000} = 6\,\%$$

107. Los beneficios o las pérdidas de una empresa vienen dados por la función:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 20}{x^2 + 4}$$

donde **x** es el número de años que lleva funcionando, y f(x) son millones de euros.

a) Halla los beneficios o las pérdidas en el 1er, 2º y 3er años.

b) Hacia qué valor se estabilizan las ganancias o pérdidas con el paso del tiempo.

Solución:

a) –3, 0, 25/13 = 1,9 millones de euros, respectivamente.

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 - 20}{x^2 + 4} = 5$ millones de euros de ganancias.

Paso a paso

108. Dibuja la siguiente función, identifícala y estudia sus discontinuidades.

$$y = \text{suelo}(x)$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

109. Dibuja la siguiente función y estudia sus discontinuidades.

$$y = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x \le 3 \\ 2x - 8 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

110. Halla el siguiente límite y dibuja la función correspondiente para comprobarlo gráficamente.

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + 2x^2 + x - 2)$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

111. Representa la siguiente función, halla sus asíntotas y dibújalas.

$$y = \frac{x^2 + 5x + 5}{x + 2}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

112. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es,** elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

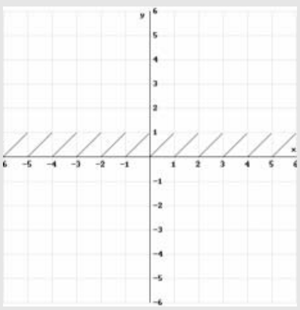
113. Dibuja las siguientes funciones, identifícalas y estudia sus discontinuidades.

a) $y = \text{decimal}(x)$

b) $y = \text{signo}(x)$

Solución:

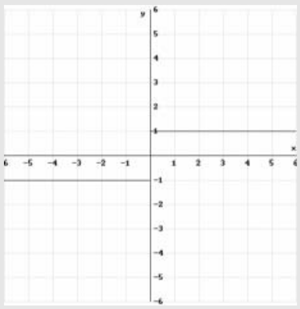
a)



Es la función parte decimal, $y = \text{Dec}(x)$

Es discontinua en los números enteros, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito de una unidad.

b)



Es la función signo, $y = \text{signo}(x)$

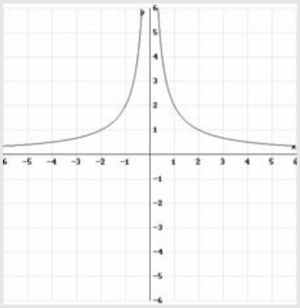
Es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito de dos unidades.

114. Dibuja las siguientes funciones y estudia su continuidad.

a) $y = |2/x|$ b) $y = |x^2 + 2x - 3|$

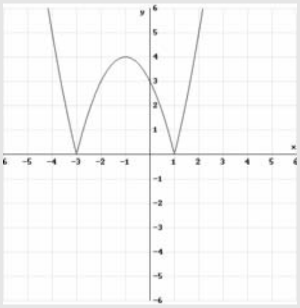
Solución:

a)



Es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

b)



Es continua en toda la recta real, $\mathbb{R}$

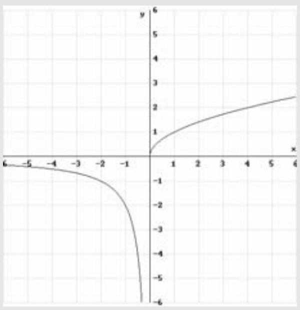
115. Dibuja las siguientes funciones y estudia sus discontinuidades.

a) $f(x) = \begin{cases} 2/x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

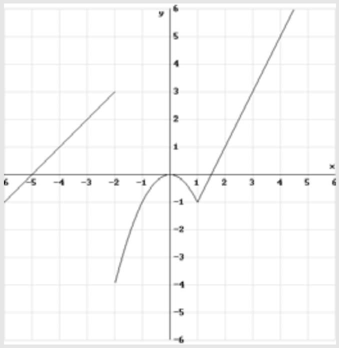
Solución:

a) 2/x CHI(– ∞, x, 0) + $\sqrt{x}$ CHI(0, x, + ∞)



Es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

b) 5 CHI(– ∞, x, – 2) – x^2 CHI(– 2, x, 1) + (2x – 3) CHI(1, x, + ∞)



Es discontinua en $x = -2$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito de 7 unidades.

116. Halla los límites laterales en el punto que se indica y dibuja la función para comprobarlo gráficamente. Clasifica la discontinuidad en dicho punto.

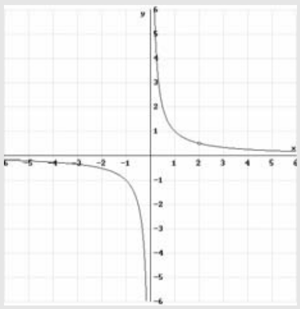
a) $y = \dfrac{x - 2}{x^2 - 2x}$ en $x = 2$

b) $y = \dfrac{2x - 5}{x - 3}$ en $x = 3$

Solución:

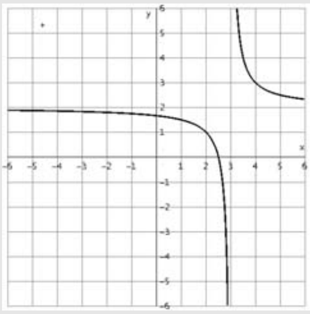
a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x - 2}{x^2 - 2x} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x - 2}{x^2 - 2x} = \dfrac{1}{2}$



En $x = 2$ tiene una discontinuidad evitable porque no está definida para $x = 2$; se evita la indeterminación definiendo $f(2) = 1/2$

b) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2x - 5}{x - 3} = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x - 5}{x - 3} = -\infty$



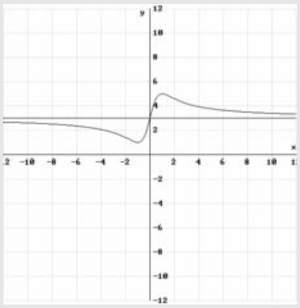
En x = 3 tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

117. Dibuja las siguientes funciones, halla sus asíntotas y represéntalas.

a) $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 3}{x^2 + 1}$ $\qquad$ b) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$

Solución:

a)

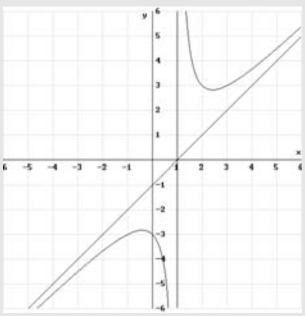


Vertical: no tiene.

Horizontal: y = 3

Oblicua: no tiene.

b)



Vertical: x = 1

Horizontal: no tiene.

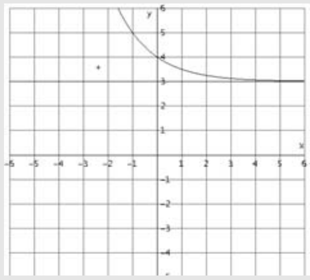
Oblicua: y = x – 1

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE.

118. Una determinada especie evoluciona según la función: $f(t) = 3 + 2^{-t}$, donde **t** es el número de años y f(t) son los millones de unidades existentes.

Dibuja la gráfica y, observándola, contesta a la siguiente pregunta: ¿la especie está en vías de extinción? Para comprobarlo, calcula el límite cuando $t \to +\infty$ y representa la asíntota horizontal.

Solución:



$\lim\limits_{t \to +\infty} (3 + 2^{-t}) = 3$

La especie no está en vías de extinción, porque tiende a estabilizarse hacia 3 millones de unidades.

119. En una ciudad se hace un censo inicial y se sabe que el número de habitantes evoluciona según la función:

$$P(t) = \frac{t^2 + 500t + 2\,500}{(t + 50)^2}$$

donde **t** es el nº de años transcurridos desde que se hace el censo y **P(t)** es el nº de habitantes en millones.

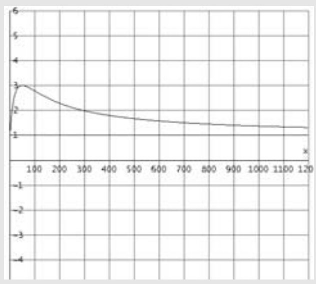
a) ¿Cuántos habitantes hay cuando se realiza el censo inicial?

b)¿Cuántos habitantes habrá dentro de 50 años?

c) ¿Con el paso del tiempo, hacia qué población se estabilizará?

d) Representa la función y la asíntota horizontal.

Solución:



a) 1 millón. $\qquad$ b) 3 millones.

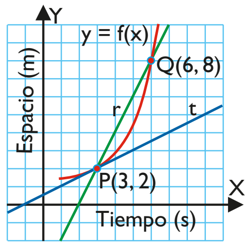
c) 1 millón, y = 1 $\qquad$ d) En la gráfica.

9 Cálculo de derivadas

1. La derivada

■ Piensa y calcula

La gráfica y = f(x) representa el espacio que recorre un coche en función del tiempo.



Calcula mentalmente:

a) la pendiente de la recta secante, **r,** que pasa por P y Q

b) la distancia media recorrida entre 3 s y 6 s

c) la pendiente de la recta tangente **t** en el punto P

Solución:

a) 2

b) $TVM[3, 6] = \frac{8-2}{6-3} = \frac{6}{3} = 2$ m

c) 1/2

● Aplica la teoría

1. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = 2x - 3$ en $[1, 4]$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ en $[2, 4]$

c) $f(x) = \frac{2x-4}{x+3}$ en $[1, 2]$

d) $f(x) = \sqrt{x+2}$ en $[-1, 2]$

Solución:

a) $TVM[1, 4] = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{5-(-1)}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$

b) $TVM[2, 4] = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{2-(-2)}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$

c) $TVM[1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{0-(-1/2)}{2-1} = \frac{1}{2}$

d) $TVM[-1, 2] = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{2-1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$

2. Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 3x - 2$ en $x = 1$ b) $f(x) = -2x + 1$ en $x = -3$ c) $f(x) = x^2 - 4$ en $x = -2$ d) $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en $x = 1$

Solución:

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(1+h) - 2 - (3-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{3} + 3h - \cancel{2} - \cancel{3} + \cancel{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3\cancel{h}}{\cancel{h}} = 3$

b) $f'(-3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2(-3+h) + 1 - [-2 \cdot (-3) + 1]}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{6} - 2h + \cancel{1} - \cancel{6} - \cancel{1}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}} = -2$

c) $f'(-2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-2+h)^2 - 4 - [(-2)^2 - 4]}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{4} - 4h + h^2 - \cancel{4} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-4h + h^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h}(-4+h)}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h\to 0} (-4+h) = -4$

d) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(1+h)^2 + 5(1+h) - 3 - (-1^2 + 5 \cdot 1 - 3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\cancel{1} - 2h - h^2 + \cancel{5} + 5h - \cancel{3} + \cancel{1} - \cancel{5} + \cancel{3}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h^2 + 3h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h}(-h+3)}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h\to 0} (-h+3) = 3$

3. Aplica la definición de derivada y calcula:

a) la derivada de la función $f(x) = x^2$ en $x = 1$

b) las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 1$

c) Representa la función f(x) y las rectas.

Solución:

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2 - 1}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{1} + 2h + h^2 - \cancel{1}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h\to 0} (2+h) = 2$

b) Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow P(1, 1)$

La recta tangente: $m = f'(1) = 2$

$y - 1 = 2(x - 1)$

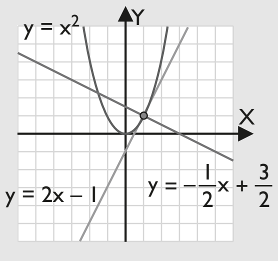
$y = 2x - 1$

La recta normal:

$y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x - 1)$

$y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

c)



4. Aplica la definición de derivada y calcula:

a) la derivada de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en $x = 3$

b) las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 3$

c) Representa la función f(x) y las rectas.

Solución:

a) $f'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2 - 2(3+h) + 1 - (3^2 - 2 \cdot 3 + 1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{9} + 6h + h^2 - \cancel{6} - 2h + \cancel{1} - \cancel{9} + \cancel{6} - \cancel{1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4h + h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h\to 0} (4+h) = 4$

b) Si $x = 3 \Rightarrow f(3) = 4 \Rightarrow P(3, 4)$

La recta tangente: $m = f'(3) = 4$

$y - 4 = 4(x - 3)$

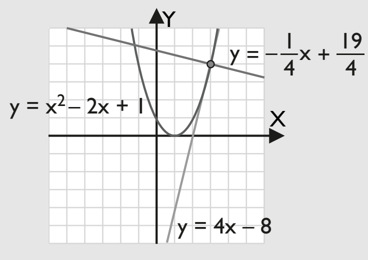
$y = 4x - 8$

La recta normal:

$y - 4 = -\dfrac{1}{4}(x - 3)$

$y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{19}{4}$

c)



5. El número de bacterias que hay en un cultivo se expresa mediante la fórmula $f(x) = 2^x$, donde **x** representa el número de horas. Calcula el crecimiento medio por hora de las bacterias entre las 3 y las 5 horas.

Solución:

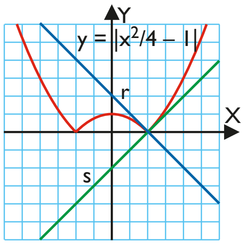
$TVM[3, 5] = \dfrac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \dfrac{32 - 8}{5 - 3} = \dfrac{24}{2} = 12$ bacterias/h

2. La función derivada

Piensa y calcula

a) Observa la gráfica de la función de $f(x) = |x^2/4 - 1|$ y calcula las pendientes de las rectas tangentes **r** y **s**

b) ¿Se puede dibujar una única recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en $x = 2$?



Solución:

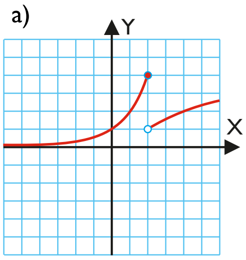
a) $m_r = -1$ y $m_s = 1$

b) No.

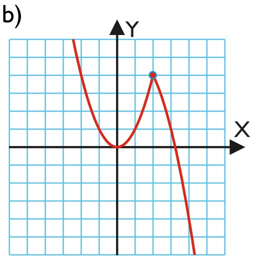
Aplica la teoría

6. Analiza si las funciones representadas admiten derivada en $x = 2$

a)



b)



Solución:

a) No, porque la función no es continua.

b) No. Hay dos rectas tangentes diferentes.

7. Aplica la definición de derivada y calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5$

b) $f(x) = 4x - 3$

c) $f(x) = x^2 - x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Solución:

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5 - 5}{h} = 0$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4(x + h) - 3 - (4x - 3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{4x} + 4h - 3 - \cancel{4x} + 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4\cancel{h}}{\cancel{h}} = 4$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - (x + h) + 1 - (x^2 - x + 1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x} - h + \cancel{1} - \cancel{x^2} + \cancel{x} - \cancel{1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}} - \cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h - 1) = 2x - 1$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x + h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{\cancel{x} - \cancel{x} - h}{(x + h)x}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-\cancel{h}}{(x + h)x\cancel{h}} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{x(x + h)} = -\dfrac{1}{x^2}$

8. Calcula el valor de la derivada de la función $f(x) = x^2 + 1$ en los puntos de abscisa:

a) $x = 2$ b) $x = -1$

c) $x = 0$ d) $x = 1$

Solución:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h) = 2x$

$f'(x) = 2x$

a) $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$

b) $f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$

c) $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$

d) $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$

9. Calcula el valor de la abscisa en el que la derivada de la función $f(x) = x^2 + x$ vale 4

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + x + h - (x^2 + x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{x} + h - \cancel{x^2} - \cancel{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}} + \cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (2x + h + 1) = 2x + 1$$

$2x + 1 = 4 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = 3/2$

10. Dibuja la gráfica de la función cuadrática $y = x^2$

a) Calcula su función derivada.

b) Representa la función derivada en los mismos ejes coordenados.

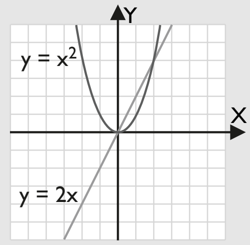
c) Observando el dibujo, calcula los puntos en los que la derivada toma estos valores: 1, 2, – 1, – 2, 0

Solución:

a) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

b)



c) $x = 1/2, x = 1, x = -1/2, x = -1, x = 0$

3. Reglas de derivación

Piensa y calcula

Clasifica las siguientes funciones como polinómicas, irracionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas:

a) $y = 2^x$ b) $y = x^5$ c) $y = \operatorname{sen} x$ d) $y = \sqrt{x}$ e) $y = L\,x$

Solución:

a) Exponencial. b) Polinómica. c) Trigonométrica. d) Irracional. e) Logarítmica.

Aplica la teoría

Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:

11. a) $y = 8$ b) $y = -3x + 1$

Solución:

a) $y' = 0$ b) $y' = -3$

12. a) $y = x^2 + 4x - 5$ b) $y = x^4 - 3x^2 + 1$

Solución:

a) $y' = 2x + 4$ b) $y' = 4x^3 - 6x$

13. a) $y = (x - 8)^2$ b) $y = (3x^2 + 1)^3$

Solución:

a) $y' = 2(x - 8)$ b) $y' = 18x(3x^2 + 1)^2$

14. a) $y = (x^2 + 4)^2$ b) $y = (x^4 - 1)^3$

Solución:

a) $y' = 4x(x^2 + 4)$ b) $y' = 12x^3(x^4 - 1)^2$

15. a) $y = \sqrt{x^2 - 3}$ b) $y = \sqrt[4]{x^3 - 2x}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$ b) $y' = \dfrac{3x^2 - 2}{4\sqrt[4]{(x^3 - 2x)^3}}$

16. a) $y = e^{3x - 2}$ b) $y = 2^{x^3 + 5}$

Solución:

a) $y' = 3e^{3x - 2}$ b) $y' = 3x^2 2^{x^3 + 5} L\,2$

17. a) $y = L(3x - 2)$ b) $y = \log(2x^3 + x)$

Solución:

a) $y' = \dfrac{3}{3x - 2}$ b) $y' = \dfrac{6x^2 + 1}{2x^3 + x} \log e$

18. a) $y = \text{sen}(3x - 7)$ b) $y = \cos(x^2 + 4x)$

Solución:

a) $y' = 3\cos(3x - 7)$

b) $y' = -(2x + 4)\ \text{sen}(x^2 + 4x)$

19. a) $y = x^2 + \text{tg}\, x$ b) $y = x\, L\, x$

Solución:

a) $y' = 2x + \sec^2 x$

b) $y' = 1 + L\, x$

20. a) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$ b) $y = \dfrac{e^x}{\cos x}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$

b) $y' = \dfrac{e^x(\text{sen}\, x + \cos x)}{\cos^2 x}$

21. Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ b) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y'' = 6x - 12$

$y''' = 6$

b) $y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$y'' = \dfrac{2}{x^3}$

$y''' = -\dfrac{6}{x^4}$

22. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^3 - 3x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$

Solución:

$f(1) = -2 \Rightarrow P(1, -2)$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

Recta tangente:

$f'(1) = -3$

$y + 2 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 1$

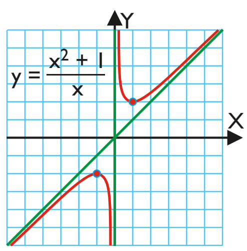
Recta normal:

$y + 2 = \dfrac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{7}{3}$

4. Máximos, mínimos relativos y monotonía

Piensa y calcula

Observa la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ y halla:



a) los máximos y mínimos relativos.

b) la monotonía, es decir:

- intervalos donde es creciente (↗)
- intervalos donde es decreciente (↘)

Solución:

a) Máximo relativo: $A(-1, -2)$

Mínimo relativo: $B(1, 2)$

b) Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-1, 0) \cup (0, 1)$

Aplica la teoría

23. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Solución:

$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$

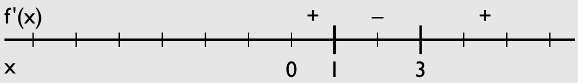
$x = 1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(1, 4)$

$x = 3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(3, 0)$

$y'' = 6x - 12$

$y''(1) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow A(1, 4)$ máximo relativo.

$y''(3) = 6 > 0\ (+) \Rightarrow B(3, 0)$ mínimo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

Decreciente (↘): $(1, 3)$

24. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 3x^2$$

Solución:

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

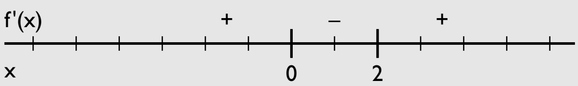
$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$x = 2 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(2, -4)$

$y'' = 6x - 6$

$y''(0) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow O(0, 0)$ máximo relativo.

$y''(2) = 6 > 0\ (+) \Rightarrow A(2, -4)$ mínimo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(0, 2)$

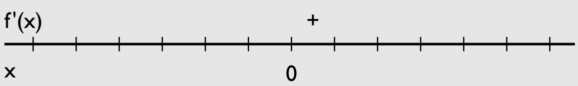
25. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$$

Solución:

$y' = 3x^2 - 6x + 4$

$y' \neq 0 \Rightarrow$ No tiene ni máximos ni mínimos relativos.



Creciente (↗): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Decreciente (↘): $\varnothing$

26. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

Solución:

$y' = x^3 - 3x^2 + 2x$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = 2$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$x = 1 \Rightarrow y = 1/4 \Rightarrow A(1, 1/4)$

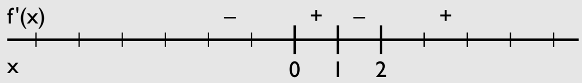
$x = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(2, 0)$

$y'' = 3x^2 - 6x + 2$

$y''(0) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow O(0, 0)$ mínimo relativo.

$y''(1) = -1 < 0\ (-) \Rightarrow A(1, 1/4)$ máximo relativo.

$y''(2) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow B(2, 0)$ mínimo relativo.



Creciente (↗): $(0, 1) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$

27. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Solución:

$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

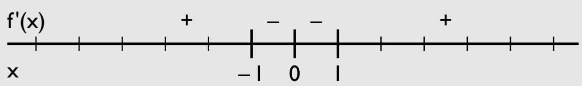
$x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow A(-1, -2)$

$x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(1, 2)$

$y'' = \frac{2}{x^3}$

$y''(-1) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow A(-1, -2)$ máximo relativo.

$y''(1) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow B(1, 2)$ mínimo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-1, 0) \cup (0, 1)$

28. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

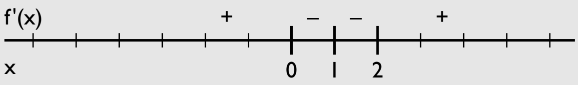
$x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(0, -1)$

$x = 2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(2, 3)$

$y'' = \dfrac{2}{(x - 1)^3}$

$y''(0) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow A(0, -1)$ máximo relativo.

$y''(2) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow B(2, 3)$ mínimo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

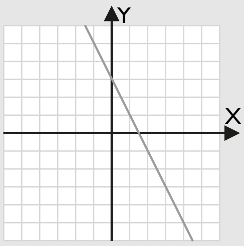
Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, 2)$

29. Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta: $y = -2x + 3$

Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

Solución:

$y' = -2 < 0$



Es siempre decreciente.

Creciente (↗): $\varnothing$

Decreciente (↘): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

30. Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

Solución:

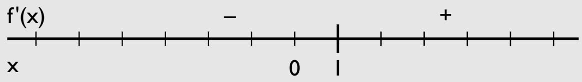
$y' = 2x - 2$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(1, -4)$

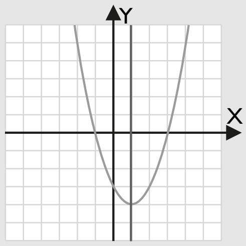
$y'' = 2$

$y''(1) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow A(1, -4)$ mínimo relativo.



Creciente (↗): $(1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 1)$

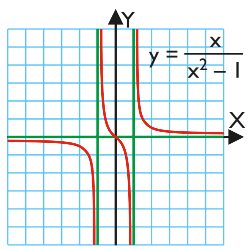


Tiene un mínimo relativo; antes del eje es decreciente, y después, creciente.

5. Puntos de inflexión y curvatura

Piensa y calcula

Observa la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ y halla visualmente el punto de inflexión y los intervalos donde es convexa (∪), y cóncava (∩)



Solución:

Punto de inflexión: $O(0, 0)$

Convexa (∪): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Aplica la teoría

31. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Solución:

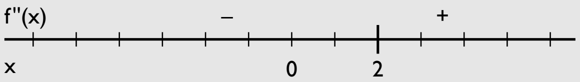
$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y'' = 6x - 12$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(2, 3)$

$y''' = 6 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(2, 3)$



Convexa ($\cup$): $(2, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 2)$

32. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x$$

Solución:

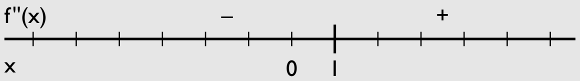
$y' = 3x^2 - 6x + 4$

$y'' = 6x - 6$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(1, 2)$

$y''' = 6 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(1, 2)$



Convexa ($\cup$): $(1, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 1)$

33. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = (x - 1)^3 + 1$$

Solución:

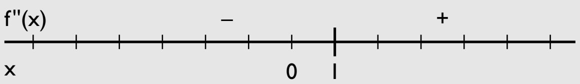
$y' = 3(x - 1)^2$

$y'' = 6(x - 1)$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(1, 1)$

$y''' = 6 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(1, 1)$



Convexa ($\cup$): $(1, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 1)$

34. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^4 - 6x^2$$

Solución:

$y' = 4x^3 - 12x$

$y'' = 12x^2 - 12$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$x = -1 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow A(-1, -5)$

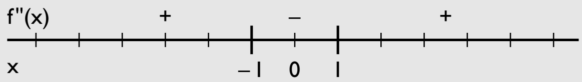
$x = 1 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow B(1, -5)$

$y''' = 24x$

$y'''(1) = 24 \neq 0$

$y'''(-1) = -24 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(-1, -5)$, $B(1, -5)$



Convexa ($\cup$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-1, 1)$

35. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^4 + 4x^3 + 2$$

Solución:

$y' = 4x^3 + 12x^2$

$y'' = 12x^2 + 24x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$

$x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(0, 2)$

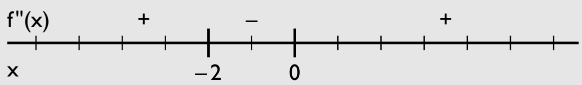
$x = -2 \Rightarrow y = -14 \Rightarrow B(-2, -14)$

$y''' = 24x + 24$

$y'''(0) = 24 \neq 0$

$y'''(-2) = -24 \neq 0$

Puntos de inflexión: $A(0, 2), B(-2, -14)$



Convexa ($\cup$): $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-2, 0)$

36. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{x - 1}{x^2}$$

Solución:

$y' = \dfrac{2 - x}{x^3}$

$$y'' = \frac{2(x-3)}{x^4}$$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2/9 \Rightarrow A(3, 2/9)$

$$y''' = \frac{6(4-x)}{x^5}$$

$y'''(3) = 2/81 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(3, 2/9)$

f''(x)	–		–		+
x		0		3	

Convexa ($\cup$): $(3, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$

37. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Solución:

$$y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$$y''' = -\frac{6(x^4 + 6x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}$$

$y'''(0) = -6 \neq 0$

Punto de inflexión: $O(0, 0)$

f''(x)	–		+		–		+
x		–1		0		1	

Convexa ($\cup$): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

38. Calcula los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $y = x^5$

b) $y = x^6$

Solución:

a) $y' = 5x^4$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$y'' = 20x^3$

$y''' = 60x^2$

$y^{IV} = 120x$

$y^{V} = 120$

Punto de inflexión en $O(0, 0)$

b) $y' = 6x^5$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$y'' = 30x^4$

$y''' = 120x^3$

$y^{IV} = 360x^2$

$y^{V} = 720x$

$y^{VI} = 720$

Mínimo en $O(0, 0)$

Ejercicios y problemas

1. La derivada

39. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = -3x + 5$ en $[-1, 2]$

b) $f(x) = x^2 - 6x - 4$ en $[1, 3]$

c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ en $[-1, 3]$

d) $f(x) = \sqrt{x+4}$ en $[-3, 0]$

Solución:

a) $TVM[-1, 2] = \dfrac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \dfrac{-1 - 8}{2 - (-1)} = \dfrac{-9}{3} = -3$

b) $TVM[1, 3] = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{-13 - (-9)}{3 - 1} = \dfrac{-4}{2} = -2$

c) $TVM[-1, 3] = \dfrac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \dfrac{0 - (-4)}{3 - (-1)} = \dfrac{4}{4} = 1$

d) $TVM[-3, 0] = \dfrac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)} = \dfrac{2 - 1}{0 - (-3)} = \dfrac{1}{3}$

40. Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 5x - 3$ en $x = -4$ b) $f(x) = -x + 2$ en $x = 3$ c) $f(x) = -x^2 + 5$ en $x = -1$ d) $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$ en $x = 1$

Solución:

a) $f'(-4) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-4+h) - f(-4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{5(-4+h) - 3 - [5 \cdot (-4) - 3]}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\cancel{20} + 5h - \cancel{3} + \cancel{20} + \cancel{3}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{5\cancel{h}}{\cancel{h}} = 5$

b) $f'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(3+h) + 2 - (-3+2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\cancel{3} - h + \cancel{2} + \cancel{3} - \cancel{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\cancel{h}}{\cancel{h}} = -1$

c) $f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(-1+h)^2 + 5 - [-(-1)^2 + 5]}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\cancel{1} + 2h - h^2 + \cancel{5} + \cancel{1} - \cancel{5}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h - h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h}(2-h)}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h\to 0} (2 - h) = 2$

d) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(1+h)^2 + 5(1+h) - 4 - (3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 4)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{3} + 6h + 3h^2 + \cancel{5} + 5h - \cancel{4} - \cancel{3} - \cancel{5} + \cancel{4}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h^2 + 11h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h}(3h+11)}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h\to 0} (3h + 11) = 11$

41. Aplica la definición de derivada y calcula:

a) la derivada de la función $f(x) = x^2 + 4x - 1$ en $x = 1$

b) las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 1$

c) Representa la función $f(x)$ y las rectas.

Solución:

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2 + 4(1+h) - 1 - (1^2 + 4 \cdot 1 - 1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{1} + 2h + h^2 + \cancel{4} + 4h - \cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{4} + \cancel{1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{6h + h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h}(6+h)}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h\to 0} (6 + h) = 6$

b) Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 4 \Rightarrow P(1, 4)$

La recta tangente:

$m = f'(1) = 6$

$y - 4 = 6(x - 1)$

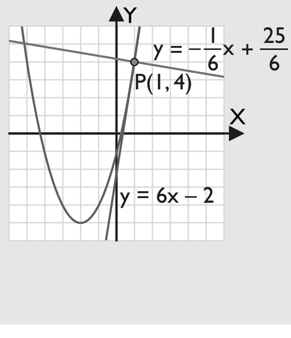
$y = 6x - 2$

La recta normal:

$y - 4 = -\dfrac{1}{6}(x - 1)$

$y = -\dfrac{1}{6}x + \dfrac{25}{6}$

c)



42. El número de llamadas que se reciben en una centralita es: $f(x) = 4x - \dfrac{x^2}{2}$, donde **x** se expresa en horas, y f(x), en miles de llamadas.

Calcula el número medio de llamadas que se reciben entre las 2 y las 4 horas; y entre las 4 y las 6 horas. ¿Cómo interpretas los resultados?

Solución:

a) $TVM[2, 4] = \dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \dfrac{8 - 6}{4 - 2} = \dfrac{2}{2} = 1$

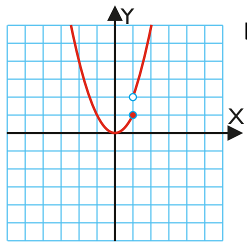
b) $TVM[4, 6] = \dfrac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \dfrac{6 - 8}{6 - 4} = \dfrac{-2}{2} = -1$

Entre 2 y 4 la función es creciente, y entre 4 y 6 es decreciente. Debe presentar un máximo en x = 4

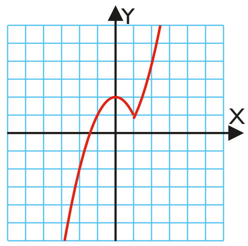
2. La función derivada

43. Analiza si las funciones representadas admiten derivada en x = 1

a)



b)



Solución:

a) No, porque es discontinua.

b) No, porque se pueden dibujar dos rectas tangentes de pendientes distintas en x = 1

44. Aplicando la definición de derivada, calcula la función derivada de la siguiente función:

$f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2(x + h)^2 - 4(x + h) + 3 - (2x^2 - 4x + 3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 4x - 4h + 3 - 2x^2 + 4x - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2x^2} + 4xh + 2h^2 - \cancel{4x} - 4h + \cancel{3} - \cancel{2x^2} + \cancel{4x} - \cancel{3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4x\cancel{h} + 2h^{\cancel{2}} - 4\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (4x + 2h - 4) = 4x - 4$$

3. Reglas de derivación

Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:

45. a) $y = 3x^2 + x - 7$ b) $y = -x^4 + x^2 - 6x$

Solución:

a) $y' = 6x + 1$ b) $y' = -4x^3 + 2x - 6$

46. a) $y = 2x^3 + x^2 - 5$ b) $y = 3x^4 + 5x + 1$

Solución:

a) $y' = 6x^2 + 2x$ b) $y' = 12x^3 + 5$

47. a) $y = (x^3 - 1)^2$ b) $y = (x^3 + 1)^4$

Solución:

a) $y' = 6x^2(x^3 - 1)$ b) $y' = 12x^2(x^3 + 1)^3$

48. a) $y = (2x^3 + x^2)^3$ b) $y = (2x^4 - 1)^5$

Solución:

a) $y' = 3(6x^2 + 2x)(2x^3 + x^2)^2$

b) $y' = 40x^3(2x^4 - 1)^4$

49. a) $y = \sqrt{3x^2 - 2}$ b) $y = \sqrt{x^3 - x}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2 - 2}}$ b) $y' = \dfrac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}}$

50. a) $y = \sqrt[5]{x^3 - x}$ b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{3x^2 - 1}{5\sqrt[5]{(x^3 - x)^4}}$ b) $y' = \dfrac{2x + 4}{3\sqrt[3]{(x^2 + 4x)^2}}$

51. a) $y = e^{2x^3}$ b) $y = e^{7x}$

Solución:

a) $y' = 6x^2e^{2x^3}$ b) $y' = 7e^{7x}$

52. a) $y = 7^{2x+3}$ b) $y = e^{-x^2+2}$

Solución:

a) $y' = 2 \cdot 7^{2x+3} \cdot L\,7$ b) $y' = -2x\,e^{-x^2+2}$

53. a) $y = L\,(5x^3 - 3x)$ b) $y = L\,(x^4 - x^2)$

Solución:

a) $y' = \dfrac{15x^2 - 3}{5x^3 - 3x}$

b) $y' = \dfrac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2} = \dfrac{4x^2 - 2}{x^3 - x}$

54. a) $y = \log\,(2x^3 + 5)$ b) $y = \log\,(x^2 + 4x + 1)$

Solución:

a) $y' = \dfrac{6x^2}{2x^3 + 5}\log e$

b) $y' = \dfrac{2x + 4}{x^2 + 4x + 1}\log e$

55. a) $y = \text{sen}\,(3x^2 - 4x)$ b) $y = \cos\,(4x^3 + x)$

Solución:

a) $y' = (6x - 4)\cos\,(3x^2 - 4x)$

b) $y' = -(12x^2 + 1)\,\text{sen}\,(4x^3 + x)$

56. a) $y = \text{sen}\,(x^3 + 2)$ b) $y = \text{tg}\,(x^2 - 1)$

Solución:

a) $y' = 3x^2\cos\,(x^3 + 2)$ b) $y' = 2x\sec^2(x^2 - 1)$

57. a) $y = e^x + \cos x$ b) $y = x\,e^x$

Solución:

a) $y' = e^x - \text{sen}\,x$

b) $y' = (x + 1)e^x$

58. a) $y = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 2}$ b) $y = \dfrac{L\,x}{\text{sen}\,x}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{-2x^2 - 6x - 4}{(x^2 - 2)^2}$

b) $y' = \dfrac{(1/x)\text{sen}\,x - L\,x\cos x}{\text{sen}^2\,x} = \dfrac{\text{sen}\,x - x\,L\,x\cos x}{x\,\text{sen}^2\,x}$

59. Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = -x^4 + 2x^2$

b) $y = \dfrac{x^3}{6} - 2x$

c) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

d) $y = \dfrac{x^2 + 4}{2x}$

Solución:

a) $y' = -4x^3 + 4x$

$y'' = -12x^2 + 4$

$y''' = -24x$

b) $y' = \dfrac{x^2}{2} - 2$

$y'' = x$

$y''' = 1$

c) $y' = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

$y'' = -\dfrac{2}{x^3}$

$y''' = \dfrac{6}{x^4}$

d) $y' = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2}$

$y'' = \dfrac{4}{x^3}$

$y''' = -\dfrac{12}{x^4}$

60. Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = -x^3 + 3x$

b) $y = x^4 - 4x^2$

c) $y = \dfrac{6}{x^2 + 3}$

d) $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{1 - x}$

Solución:

a) $y' = -3x^2 + 3$

$y'' = -6x$

$y''' = -6$

b) $y' = 4x^3 - 8x$

$y'' = 12x^2 - 8$

$y''' = 24x$

c) $y' = -\dfrac{12x}{(x^2+3)^2}$

$y'' = \dfrac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$

$y''' = \dfrac{144x(3-x^2)}{(x^2+3)^4}$

d) $y' = \dfrac{-x^2+2x-3}{(x-1)^2}$

$y'' = \dfrac{4}{(x-1)^3}$

$y''' = -\dfrac{12}{(x-1)^4}$

4. Máximos, mínimos relativos y monotonía

61. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 3x$$

Solución:

$y' = 3x^2 - 3$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

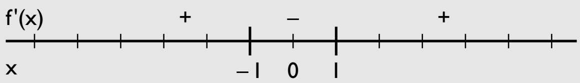
$x = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(-1, 2)$

$x = 1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow B(1, -2)$

$y'' = 6x$

$y''(-1) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow A(-1, 2)$ máximo relativo.

$y''(1) = 6 > 0\ (+) \Rightarrow B(1, -2)$ mínimo relativo.



Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente ($\searrow$): $(-1, 1)$

62. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^3}{3} - 4x$$

Solución:

$y' = x^2 - 4$

$y' = 0 \Rightarrow x = -2, x = 2$

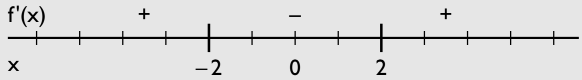
$x = -2 \Rightarrow y = 16/3 \Rightarrow A(-2, 16/3)$

$x = 2 \Rightarrow y = -16/3 \Rightarrow B(2, -16/3)$

$y'' = 2x$

$y''(-2) = -4 < 0\ (-) \Rightarrow A(-2, 16/3)$ máximo relativo.

$y''(2) = 4 > 0\ (+) \Rightarrow B(2, -16/3)$ mínimo relativo.



Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Decreciente ($\searrow$): $(-2, 2)$

63. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = 2x^3 - 6x + 1$$

Solución:

$y' = 6x^2 - 6$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

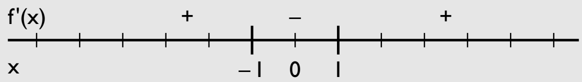
$x = -1 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A(-1, 5)$

$x = 1 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow B(1, -3)$

$y'' = 12x$

$y''(-1) = -12 < 0\ (-) \Rightarrow A(-1, 5)$ máximo relativo.

$y''(1) = 12 > 0\ (+) \Rightarrow B(1, -3)$ mínimo relativo.



Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente ($\searrow$): $(-1, 1)$

64. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = -x^3 + 6x^2 + 15x - 1$$

Solución:

$y' = -3x^2 + 12x + 15$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 5$

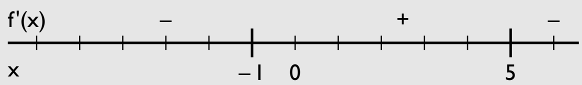
$x = -1 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow A(-1, -9)$

$x = 5 \Rightarrow y = 99 \Rightarrow B(5, 99)$

$y'' = -6x + 12$

$y''(-1) = 18 > 0\ (+) \Rightarrow A(-1, -9)$ mínimo relativo.

$y''(5) = -18 < 0\ (-) \Rightarrow B(5, 99)$ máximo relativo.



Creciente ($\nearrow$): $(-1, 5)$

Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

65. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Solución:

$y' = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

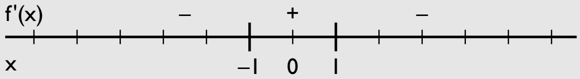
$x = -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(-1, -1)$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B(1, 1)$

$y'' = \dfrac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$

$y''(-1) = 1 > 0\ (+) \Rightarrow A(-1, -1)$ mínimo relativo.

$y''(1) = -1 < 0\ (-) \Rightarrow B(1, 1)$ máximo relativo.



Creciente (↗): $(-1, 1)$

Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

66. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

Solución:

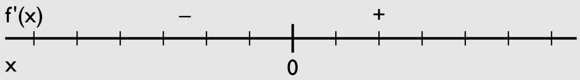
$y' = \dfrac{6x}{(x^2 + 3)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$y'' = \dfrac{-18x^2 + 18}{(x^2 + 3)^3}$

$y''(0) = 2/3 > 0\ (+) \Rightarrow O(0, 0)$ mínimo relativo.



Creciente (↗): $(0, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$

67. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$

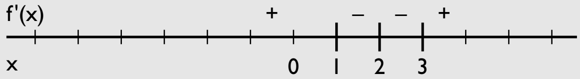
$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(1, 0)$

$x = 3 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(3, 4)$

$y'' = \dfrac{2}{(x - 2)^3}$

$y''(1) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow A(1, 0)$ máximo relativo.

$y''(3) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow B(3, 4)$ mínimo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

Decreciente (↘): $(1, 2) \cup (2, 3)$

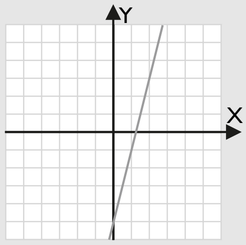
68. Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta:

$$y = 4x - 5$$

Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

Solución:

$y' = 4 > 0 \Rightarrow$ La función es siempre creciente.



Es una recta de pendiente 4, que es el valor de la derivada.

69. Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola:

$$y = -2x^2 - 8x - 3$$

Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

Solución:

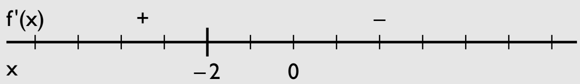
$y' = -4x - 8$

$y' = 0 \Rightarrow x = -2$

$x = -2 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A(-2, 5)$

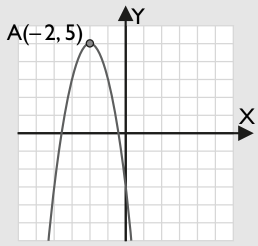
$y'' = -4$

$y''(-2) = -4 < 0\ (-) \Rightarrow A(-2, 5)$ máximo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, -2)$

Decreciente (↘): $(-2, +\infty)$



Es una parábola con eje de simetría en x = – 2 y con el vértice en A(– 2, 5)

5. Puntos de inflexión y curvatura

70. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^3 - 3x + 4$$

Solución:

$y' = 3x^2 - 3$

$y'' = 6x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(0, 4)$

$y''' = 6 \neq 0$

Punto de inflexión: A(0, 4)

f''(x)	–		+
x		0	

Convexa (∪): $(0, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$

71. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = -x^3 + 3x^2 + 1$$

Solución:

$y' = -3x^2 + 6x$

$y'' = -6x + 6$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(1, 3)$

$y''' = -6 \neq 0$

Punto de inflexión: A(1, 3)

f''(x)	+			–
x		0	1	

Convexa (∪): $(-\infty, 1)$

Cóncava (∩): $(1, +\infty)$

72. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = 2x^3 - 3x + 4$$

Solución:

$y' = 6x^2 - 3$

$y'' = 12x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(0, 4)$

$y''' = 12 \neq 0$

Punto de inflexión: A(0, 4)

f''(x)	–		+
x		0	

Convexa (∪): $(0, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$

73. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función $y = 4x^3 - 3x^4$

Solución:

$y' = 12x^2 - 12x^3$

$y'' = 24x - 36x^2$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2/3$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$x = 2/3 \Rightarrow y = 16/27 \Rightarrow B(2/3, 16/27)$

$y''' = 24 - 72x$

$y'''(0) = 24 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: O(0, 0)

$y'''(2/3) = -24 \neq 0$

Punto de inflexión: A(2/3, 16/27)

f''(x)	–		+		–
x		0		2/3	

Convexa (∪): $(0, 2/3)$

Cóncava (∩): $(-\infty, 0) \cup (2/3, +\infty)$

74. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función $y = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$

Solución:

$y' = 4x^3 - 12x - 6$

$y'' = 12x^2 - 12$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$x = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(-1, 2)$

$x = 1 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow B(1, -10)$

$y''' = 24x$

$y'''(-1) = -24 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: A(– 1, 2)

$y'''(1) = 24 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: B(1, – 10)

f''(x)	+		–		+
x		– 1	0	1	

Convexa (∪): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-1, 1)$

75. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

Solución:

$y' = -\dfrac{12x}{(x^2 + 3)^2}$

$y'' = \dfrac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$x = -1 \Rightarrow y = 3/2 \Rightarrow A(-1, 3/2)$

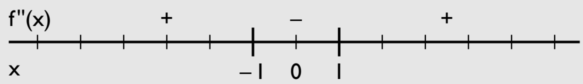
$x = 1 \Rightarrow y = 3/2 \Rightarrow B(1, 3/2)$

$y''' = \dfrac{144x(3 - x^2)}{(x^2 + 3)^4}$

$y'''(-1) = -9/8 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(-1, 3/2)$

$y'''(1) = 9/8 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $B(1, 3/2)$



Convexa ($\cup$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-1, 1)$

76. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{x}{x^2 - 4}$$

Solución:

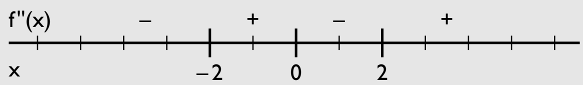
$y' = -\dfrac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}$

$y'' = \dfrac{2x^3 + 24x}{(x^2 - 4)^3}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$y''' = -\dfrac{6(x^4 + 24x^2 + 16)}{(x^2 - 4)^4}$

$y'''(0) = -3/8 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $O(0, 0)$



Convexa ($\cup$): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

77. Calcula los puntos críticos de la función $y = x^3$

Solución:

$y' = 3x^2$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$y'' = 6x$

$y''(0) = 0$

$y''' = 6 \neq 0 \Rightarrow O(0, 0)$ Punto de inflexión.

78. Calcula los puntos críticos de la función $y = x^4$

Solución:

$y' = 4x^3$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$y'' = 12x^2$

$y''(0) = 0$

$y''' = 24x$

$y'''(0) = 0$

$y^{IV} = 24 > 0\ (+) \Rightarrow O(0, 0)$ mínimo relativo.

Para ampliar

79. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = -x + 1$ en $[-1, 2]$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ en $[2, 4]$

Solución:

a) $TVM[-1, 2] = \dfrac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \dfrac{-1 - 2}{2 - (-1)} = \dfrac{-3}{3} = -1$

b) $TVM[2, 4] = \dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \dfrac{-2 - 2}{4 - 2} = \dfrac{-4}{2} = -2$

80. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ en $[3, 5]$

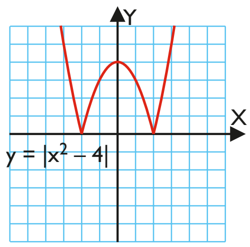
b) $f(x) = \sqrt{x + 6}$ en $[-2, 3]$

Solución:

a) $TVM[3, 5] = \dfrac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \dfrac{2 - 4}{5 - 3} = \dfrac{-2}{2} = -1$

b) $TVM[-2, 3] = \dfrac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \dfrac{3 - 2}{3 - (-2)} = \dfrac{1}{5}$

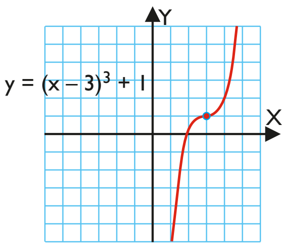
81. Analiza en qué puntos la función del gráfico no es derivable.



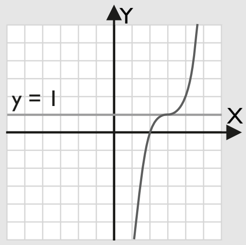
Solución:

En $x = -2$ y en $x = 2$ la gráfica de la función tiene picos, y se pueden dibujar, en cada uno de ellos, dos rectas tangentes con distinta pendiente. Es decir, la función no es derivable.

82. Analiza si en $x = 3$ la función del gráfico es derivable. Dibuja la recta tangente en dicho punto.



Solución:



La función es derivable en $x = 3$. La tangente en dicho punto es la recta $y = 1$

83. Aplicando la definición de derivada, calcula la función derivada de la siguiente función:

$f(x) = x^3$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3x^2 + 3xh + h^2)\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:

84. a) $y = (x^2 + 4)^3$

b) $y = (x^3 + 4)^2 \operatorname{sen} x$

Solución:

a) $y' = 6x(x^2 + 4)^2$

b) $y' = 6x^2(x^3 + 4) \operatorname{sen} x + (x^3 + 4)^2 \cos x$

85. a) $y = \sqrt{x} + \dfrac{5}{x}$ b) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{5}{x^2}$

b) $y' = \dfrac{-2x^2 - 2x - 4}{(x^2 - 2)^2}$

86. a) $y = \dfrac{e^x}{\operatorname{sen} x}$ b) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$

b) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

87. a) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ b) $y = \sqrt{L\,(3x-5)}$

Solución:

a) $y' = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

b) $y' = \dfrac{3}{2(3x-5)\sqrt{L(3x-5)}}$

88. a) $y = e^{\text{sen } x}$ b) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Solución:

a) $y' = \cos x\, e^{\text{sen } x}$

b) $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

89. a) $y = e^{\sqrt{x+2}}$ b) $y = e^x\, L\, x$

Solución:

a) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}\, e^{\sqrt{x+2}}$

b) $y' = e^x \left(Lx + \dfrac{1}{x}\right)$

90. a) $y = e^{2x} \cos x$ b) $y = 2x + 3e^{-(x+2)}$

Solución:

a) $y' = e^{2x}(2\cos x - \text{sen } x)$

b) $y' = 2 - 3e^{-(x+2)}$

91. a) $y = L\, \text{tg } x$ b) $y = L\, 5x + e^{\sqrt{x}}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{\sec^2 x}{\text{tg } x} = \dfrac{1}{\text{sen } x \cos x} = \sec x \,\text{cosec } x$

b) $y' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}$

92. a) $y = \text{tg } \sqrt{3x+2}$ b) $y = \text{sen } \sqrt{x}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+2}} \sec^2 \sqrt{3x+2}$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x}} \cos \sqrt{2x}$

93. a) $y = \cos^2 x$ b) $y = \text{tg}^2 x + 2^{\text{sen } x}$

Solución:

a) $y' = -2\cos x \,\text{sen } x$

b) $y' = 2\, \text{tg } x \sec^2 x + \cos x\, 2^{\text{sen } x}\, L\, 2$

94. a) $y = \dfrac{2x+1}{\cos x}$ b) $y = x \,\text{sen } x$

Solución:

a) $y' = \dfrac{2\cos x + (2x+1)\,\text{sen } x}{\cos^2 x}$

b) $y' = \text{sen } x + x \cos x$

95. Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ b) $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4$

c) $y = \dfrac{4}{x^2 - 1}$ d) $y = \dfrac{2x - 1}{x^2}$

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 12x + 12$

$y'' = 6x - 12$

$y''' = 6$

b) $y' = -3x^2 + 6x - 4$

$y'' = -6x + 6$

$y''' = -6$

c) $y' = -\dfrac{8x}{(x^2-1)^2}$

$y'' = \dfrac{24x^2 + 8}{(x^2-1)^3}$

$y''' = \dfrac{-96x^3 - 96x}{(x^2-1)^4}$

d) $y' = \dfrac{2 - 2x}{x^3}$

$y'' = \dfrac{4x - 6}{x^4}$

$y''' = \dfrac{-12x + 24}{x^5}$

96. Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = x^4 + 2x^2$

b) $y = x^4 - x^3$

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Solución:

a) $y' = 4x^3 + 4x$

$y'' = 12x^2 + 4$

$y''' = 24x$

b) $y' = 4x^3 - 3x^2$

$y'' = 12x^2 - 6x$

$y''' = 24x - 6$

c) $y' = \dfrac{6x}{(x^2+3)^2}$

$y'' = \dfrac{-18x^2 + 18}{(x^2+3)^3}$

$y''' = \dfrac{72x^3 - 216x}{(x^2+3)^4}$

d) $y' = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

$y'' = \dfrac{-12x^2 + 4}{(x^2+1)^3}$

$y''' = \dfrac{48x^3 - 48x}{(x^2+1)^4}$

97. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 2x^2 + x$$

Solución:

$y' = 3x^2 - 4x + 1$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1, x = 1/3$

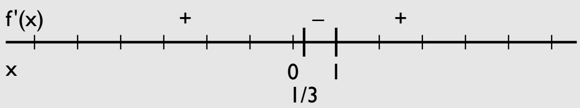
$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(1, 0)$

$x = 1/3 \Rightarrow y = 4/27 \Rightarrow B(1/3, 4/27)$

$y'' = 6x - 4$

$y''(1) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow A(1, 0)$ mínimo relativo.

$y''(1/3) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow B(1/3, 4/27)$ máximo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, 1/3) \cup (1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(1/3, 1)$

98. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{4}{x^2 - 2x + 5}$$

Solución:

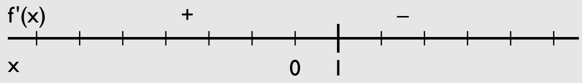
$y' = \dfrac{-8x + 8}{(x^2 - 2x + 5)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(1, 1)$

$y'' = \dfrac{8(3x^2 - 6x - 1)}{(x^2 - 2x + 5)^3}$

$y''(1) = -1/2 < 0\ (-) \Rightarrow A(1, 1)$ máximo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, 1)$

Decreciente (↘): $(1, +\infty)$

99. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

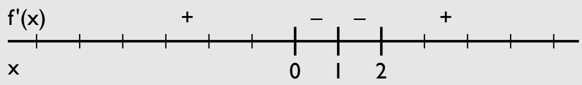
$x = 0 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(0, -4)$

$x = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(2, 0)$

$y'' = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

$y''(0) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow A(0, -4)$ máximo relativo.

$y''(2) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow B(2, 0)$ mínimo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, 2)$

100. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{5}{x^2 + 1}$$

Solución:

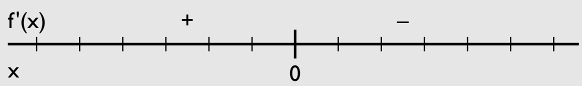
$y' = -\dfrac{10x}{(x^2+1)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A(0, 5)$

$y'' = \dfrac{30x^2 - 10}{(x^2+1)^3}$

$y''(0) = -10 < 0\ (-) \Rightarrow A(0, 5)$ máximo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, 0)$

Decreciente (↘): $(0, +\infty)$

101. Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta $y = -\dfrac{x}{2} + 3$

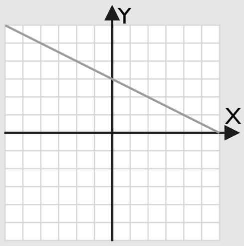
Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

Solución:

$y' = -1/2 < 0$

La derivada es menor que cero para todo valor de **x;** luego la función es siempre decreciente.

La gráfica de la función es una recta de pendiente $-1/2$, que es su derivada.



102. Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola $y = \dfrac{x^2}{2} - x - 3$

Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

Solución:

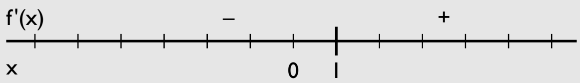
$y' = x - 1$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = -7/2 \Rightarrow A(1, -7/2)$

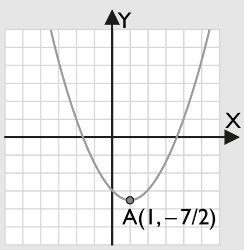
$y'' = 1$

$y''(1) = 1 > 0\ (+) \Rightarrow A(1, -7/2)$ mínimo relativo.



Creciente (↗): $(1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 1)$



El vértice de la parábola coincide con el mínimo calculado.

Antes del vértice, la parábola es decreciente, y después, creciente.

103. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

b) $y = x^4 - 6x^2 + 5x$

Solución:

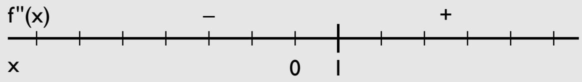
a) $y' = 3x^2 - 6x$

$y'' = 6x - 6$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(1, 0)$

$y''' = 6$

$y'''(1) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $A(1, 0)$



Convexa (∪): $(1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, 1)$

b) $y' = 4x^3 - 12x + 5$

$y'' = 12x^2 - 12$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

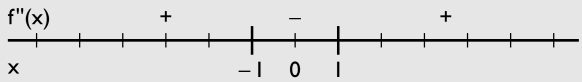
$x = -1 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow A(-1, -10)$

$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(1, 0)$

$y''' = 24x$

$y'''(-1) = -24 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $A(-1, -10)$

$y'''(1) = 24 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $B(1, 0)$



Convexa (∪): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-1, 1)$

104. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

a) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

b) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$y'' = \dfrac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$

$x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = -\sqrt{3}/2 \Rightarrow A(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2)$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$x = \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}/2 \Rightarrow B(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2)$

$$y''' = \frac{-12x^4 + 72x^2 - 12}{(x^2 + 1)^4}$$

$y'''\left(-\sqrt{3}\right) = 3/8 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Punto de inflexión: $A\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2\right)$

$y'''(0) = -12 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $O(0, 0)$

$y'''\left(\sqrt{3}\right) = 3/8 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $B\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2\right)$

$f''(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	

Convexa ($\cup$): $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

Cóncava ($\cap$): $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$

b) $y' = \dfrac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$

$$y'' = \frac{4x^3 + 12x}{(x^2 - 1)^3}$$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$$y''' = \frac{-12x^4 - 72x^2 - 12}{(x^2 - 1)^4}$$

$y'''(0) = -12 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $O(0, 0)$

$f''(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
x		-1		0		1	

Convexa ($\cup$): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Problemas

105. Halla los puntos en los que la función derivada de las siguientes funciones es igual a cero:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ b) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

Solución:

a) $y' = 6x^2 + 6x - 12$

$6x^2 + 6x - 12 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$

$x = 1 \Rightarrow y = -7 \Rightarrow P(1, -7)$

$x = -2 \Rightarrow y = 20 \Rightarrow P(-2, 20)$

b) $y' = 3x^2 - 6x + 3$

$3x^2 - 6x + 3 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow P(1, 3)$

106. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 - 4x + 5$ en el punto de abscisa $x = 3$

Solución:

$x = 3 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P(3, 2)$

$y' = 2x - 4$

Recta tangente:

$m = y'(3) = 2$

$y - 2 = 2(x - 3)$

$y = 2x - 4$

Recta normal:

$y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 3)$

$y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$

107. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^3 - 5x + 4$ en el punto de abscisa $x = -2$

Solución:

$x = -2 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow P(-2, 6)$

$y' = 3x^2 - 5$

Recta tangente:

$m = y'(-2) = 7$

$y - 6 = 7(x + 2)$

$y = 7x + 20$

Recta normal:

$y - 6 = -\dfrac{1}{7}(x + 2)$

$y = -\dfrac{1}{7}x + \dfrac{40}{7}$

108. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = \dfrac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = 1$

Solución:

$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow P(1, 1)$

$y' = -1/x^2$

Recta tangente:

$m = y'(1) = -1$

$y - 1 = -1(x - 1)$

$y = -x + 2$

Recta normal:

$y - 1 = (x - 1)$

$y = x$

109. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 + 1$ cuya pendiente sea 4

Solución:

$y' = 4x^3$

$4x^3 = 4 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P(1, 2)$

$m = 4$

$y - 2 = 4(x - 1)$

$y = 4x - 2$

110. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 9x + 1$ cuya pendiente sea 3. ¿Cuántas soluciones hay?

Solución:

$y' = 3x^2 - 9$

$3x^2 - 9 = 3 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, x = -2$

a) $x = 2 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow P(2, -9)$

$m = 3$

$y + 9 = 3(x - 2)$

$y = 3x - 15$

b) $x = -2 \Rightarrow y = 11 \Rightarrow P(-2, 11)$

$m = 3$

$y - 11 = 3(x + 2)$

$y = 3x + 17$

Hay dos soluciones.

111. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = -x^3 + 26x$ que sean paralelas a la recta $y = -x$

Solución:

La recta tiene de pendiente:

$y' = -1, m = -1$

$y' = -3x^2 + 26$

$-3x^2 + 26 = -1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3, x = -3$

a) $x = 3 \Rightarrow y = 51 \Rightarrow P(3, 51)$

$m = -1$

$y - 51 = -1(x - 3)$

$y = -x + 54$

b) $x = -3 \Rightarrow y = -51 \Rightarrow P(-3, -51)$

$m = -1$

$y + 51 = -1(x + 3)$

$y = -x - 54$

112. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - x^2$ que tengan una pendiente de 45°

Solución:

$m = \text{tg } 45° = 1$

$y' = 3x^2 - 2x$

$3x^2 - 2x = 1 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1/3$

a) $x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P(1, 0)$

$m = 1$

$y = x - 1$

b) $x = -1/3 \Rightarrow y = -4/27 \Rightarrow P(-1/3, -4/27)$

$m = 1$

$y + 4/27 = x + 1/3$

$y = x + 5/27$

113. Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^2 - 4$ en los puntos de corte con el eje X

Solución:

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -2$

$y' = 2x$

a) $P(2, 0)$

$m = y'(2) = 4$

$y = 4(x - 2)$

$y = 4x - 8$

b) $P(-2, 0)$

$m = y'(-2) = -4$

$y = -4(x + 2)$

$y = -4x - 8$

114. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \text{sen } x$$

Solución:

Como es una función periódica de período 2π, solo se estudia en el primer período positivo $[0, 2\pi]$

$y' = \cos x$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2, x = 3\pi/2$

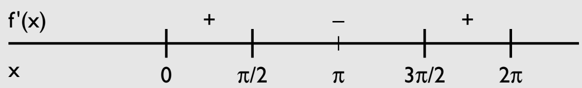
$x = \pi/2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(\pi/2, 1)$

$x = 3\pi/2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow B(3\pi/2, -1)$

$y'' = -\text{sen } x$

$y''(\pi/2) = -1 < 0\ (-) \Rightarrow A(\pi/2, 1)$ máximo relativo.

$y''(3\pi/2) = 1 > 0\ (+) \Rightarrow B(3\pi/2, -1)$ mínimo relativo.



Creciente (↗): $(0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$

Decreciente (↘): $(\pi/2, 3\pi/2)$

115. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \cos x$$

Solución:

Como es una función periódica de período 2π, solo se estudia en el primer período positivo $[0, 2\pi]$

$y' = -\operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi$

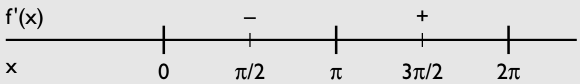
$x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(0, 1)$

$x = \pi \Rightarrow y = -1 \Rightarrow B(\pi, -1)$

$y'' = -\cos x$

$y''(0) = -1 < 0\ (-) \Rightarrow A(0, 1)$ máximo relativo.

$y''(\pi) = 1 > 0\ (+) \Rightarrow B(\pi, -1)$ mínimo relativo.



Creciente ($\nearrow$): $(\pi, 2\pi)$

Decreciente ($\searrow$): $(0, \pi)$

116. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x - \operatorname{sen} x$$

Solución:

$y' = 1 - \cos x$

$1 - \cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(0, 0)$

$y'' = \operatorname{sen} x$

$y''(0) = 0$

$y''' = \cos x$

$y'''(0) = 1 \neq 0$

$A(0, 0)$ es un punto de inflexión y lo mismo sucede con todos los $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Como $y' = 1 - \cos x$, se tiene que y' nunca puede ser negativa; por tanto, es siempre creciente.

Creciente ($\nearrow$): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Decreciente ($\searrow$): $\emptyset$

117. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función $y = x + \cos x$

Solución:

$y' = 1 - \operatorname{sen} x$

$1 - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x = \pi/2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(\pi/2, \pi/2)$

$y'' = -\cos x$

$y''(\pi/2) = 0$

$y''' = \operatorname{sen} x$

$y'''(\pi/2) = 1 \neq 0$

$A(\pi/2, \pi/2)$ es un punto de inflexión, y lo mismo sucede con todos los $x = \pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Como $y' = 1 - \operatorname{sen} x$, se tiene que y' nunca puede ser negativa; por tanto, es siempre creciente.

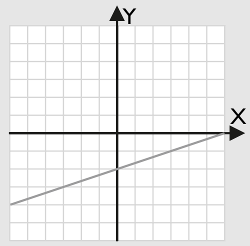
Creciente ($\nearrow$): $= \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Decreciente ($\searrow$): $= \emptyset$

118. Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta $y = \dfrac{x}{3} - 2$. Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

Solución:

$y' = 1/3 > 0$



Es siempre creciente.

Creciente ($\nearrow$): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Decreciente ($\searrow$): $= \emptyset$

119. Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola $y = -3x^2 + 6x + 2$. Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

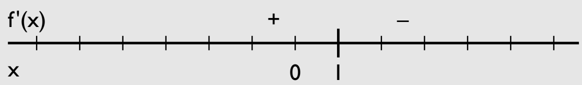
Solución:

$y' = -6x + 6$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1$

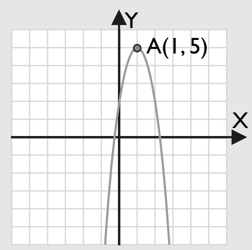
$x = 1 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A(1, 5)$

$y'' = -6 < 0\ (-) \Rightarrow A(1, 5)$ máximo relativo.



Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 1)$

Decreciente ($\searrow$): $(1, +\infty)$



Tiene un máximo relativo, antes del eje es creciente, y después, decreciente.

120. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = \operatorname{sen} x$

Solución:

Como es una función periódica de período 2π, solo se estudia en el primer período positivo $[0, 2\pi]$

$y' = \cos x$

$y'' = -\operatorname{sen} x$

$-\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(0, 0)$

$x = \pi \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(\pi, 0)$

$y''' = -\cos x$

$y'''(0) = -1 \neq 0 \Rightarrow A(0, 0)$ punto de inflexión.

$y'''(\pi) = 1 \neq 0 \Rightarrow B(\pi, 0)$ punto de inflexión.

f''(x)		–		+	
x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Convexa ($\cup$): $(\pi, 2\pi)$

Cóncava ($\cap$): $(0, \pi)$

121. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = \cos x$

Solución:

Como es una función periódica de período 2π, solo se estudia en el primer período positivo $[0, 2\pi]$

$y' = -\operatorname{sen} x$

$y'' = -\cos x$

$-\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2, x = 3\pi/2$

$x = \pi/2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(\pi/2, 0)$

$x = 3\pi/2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(3\pi/2, 0)$

$y''' = \operatorname{sen} x$

$y'''(\pi/2) = 1 \neq 0 \Rightarrow A(\pi/2, 0)$ punto de inflexión.

$y'''(3\pi/2) = -1 \neq 0 \Rightarrow B(3\pi/2, 0)$ punto de inflexión.

f''(x)		–		+		–	
x	0		$\pi/2$	π	$3\pi/2$		2π

Convexa ($\cup$): $(\pi/2, 3\pi/2)$

Cóncava ($\cap$): $(0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$

122. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = x + \operatorname{sen} x$

Solución:

$y' = 1 + \cos x$

$y'' = -\operatorname{sen} x$

$-\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(0, 0)$

$y''' = -\cos x$

$y'''(0) = -1 \neq 0$

$A(0, 0)$ es un punto de inflexión y lo mismo sucede con todos los $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

f''(x)		–		+	
x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Convexa ($\cup$): $(\pi, 2\pi)$

Cóncava ($\cap$): $(0, \pi)$

La convexidad es periódica de período 2π

123. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = x - \cos x$

Solución:

$y' = 1 + \operatorname{sen} x$

$y'' = \cos x$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2, x = 3\pi/2$

$x = \pi/2 \Rightarrow y = \pi/2 \Rightarrow A(\pi/2, \pi/2)$

$y''' = -\operatorname{sen} x$

$y'''(\pi/2) = -1 \neq 0$

$A(\pi/2, \pi/2)$ es un punto de inflexión, y lo mismo sucede con todos los $x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

f''(x)		+		–		+	
x	0		$\pi/2$	π	$3\pi/2$		2π

Convexa ($\cup$): $(0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$

Cóncava ($\cap$): $(\pi/2, 3\pi/2)$

La convexidad es periódica de período 2π

Para profundizar

124. Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva

$$y = x^2 + 6x + 4$$

en el punto de abscisa $x = -2$. Haz la representación gráfica.

Solución:

$x = -2 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow P(-2, -4)$

$y' = 2x + 6$

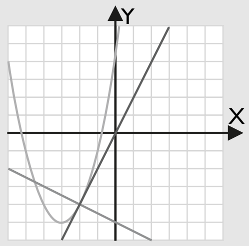
$m = y'(-2) = 2$

Recta tangente:

$y + 4 = 2(x + 2) \Rightarrow y = 2x$

Recta normal:

$y + 4 = -\frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 5$



125. La ecuación de la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$ es:

$$y - 4x + 11 = 0$$

Calcula cuánto valen $f(3)$ y $f'(3)$

Solución:

La recta tangente es:

$y = 4x - 11$

$f(3) = 4 \cdot 3 - 11 = 1$

$f'(3) = 4$

126. Halla los puntos en los que las rectas tangentes a las curvas $y = x^2 + 3x - 2$, $y = 2x^2 + x - 3$ son paralelas.

Solución:

$y' = 2x + 3$

$y' = 4x + 1$

$2x + 3 = 4x + 1 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(1, 2)$ en la 1ª parábola.

$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(1, 0)$ en la 2ª parábola.

127. Demuestra que la función $y = L\,x$ es estrictamente creciente en todo su dominio.

Solución:

$y' = 1/x$

$\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$

$y' > 0$ en todos los puntos del dominio; por lo tanto, es creciente siempre.

128. Determina los máximos, los mínimos relativos y la monotonía de la función $y = x^2 - 8\,L\,x$

Solución:

$y' = 2x - 8/x$

$2x - 8/x = 0 \Rightarrow x = 2, x = -2$

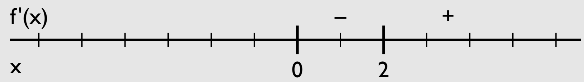
$x = -2$ no se estudia, por no estar en el dominio.

$x = 2 \Rightarrow y = 4 - 8\,L\,2 \Rightarrow A(2, 4 - 8\,L\,2)$

$y'' = 2 + 8/x^2$

$y''(2) = 4 > 0\ (+) \Rightarrow A(2, 4 - 8\,L\,2)$ mínimo relativo.

Monotonía:



Creciente (↗): $(2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(0, 2)$

Paso a paso

129. Calcula la derivada de la función:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

130. Halla las rectas tangente y normal a la curva:

$$y = x^2 - 6x + 11 \quad \text{para } x = 4$$

Representa la curva y las rectas.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

131. Calcula los máximos y mínimos relativos y la monotonía de: $y = x^3 - 3x$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

132. Determina los puntos de inflexión y la curvatura de la función: $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

133. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es,** elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

134. Calcula la 1ª derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{e^x}{\text{sen } x}$ b) $y = \sqrt{3x^2 - 5}$

Solución:

a) $y' = e^x \left(\dfrac{1}{\text{sen } x} - \dfrac{\cos x}{\text{sen}^2 x}\right)$

b) $y' = \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2 - 5}}$

135. Calcula la 1ª derivada de las siguientes funciones:

a) $y = e^{\text{tg } x}$ b) $y = e^x \text{ L } x$

Solución:

a) $y' = (\text{tg}^2 x + 1)\, e^{\text{tg} x}$

b) $y' = e^x \left(\text{L } x + \dfrac{1}{x}\right)$

136. Calcula la 1ª derivada de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^2} \cos x$ b) $y = \text{L} \cos^3 x$

Solución:

a) $y' = e^{x^2}(2x \cos x - \text{sen } x)$

b) $y' = -3\text{tg } x$

137. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función:

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

Solución:

$y' = x^3 - 3x^2 + 2x$

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = 2$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(0, 0)$

$x = 1 \Rightarrow y = 1/4 \Rightarrow B(1, 1/4)$

$x = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow C(2, 0)$

$y'' = 3x^2 - 6x + 2$

$y''(0) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow A(0, 0)$

Mínimo relativo.

$y''(1) = -1 < 0\ (-) \Rightarrow B(1, 1/4)$

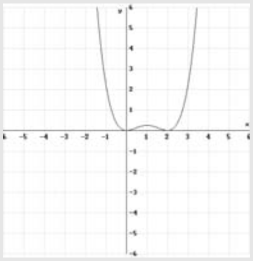
Máximo relativo.

$y''(2) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow C(2, 0)$

Mínimo relativo.

Creciente (↗): $(0, 1) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$



138. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función:

$$y = \frac{x^2 + 4}{x}$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

Solución:

$y' = \frac{x^2 - 4}{x^2}$

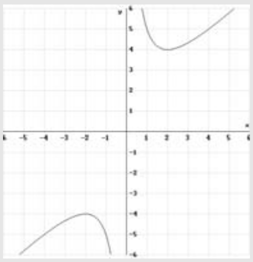
$y' = 0 \Rightarrow x = -2,\ x = 2$

Máximo relativo: $A(-2, -4)$

Mínimo relativo: $B(2, 4)$

Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Decreciente ($\searrow$): $(-2, 0) \cup (0, 2)$



139. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

Solución:

$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y'' = 6x - 12$

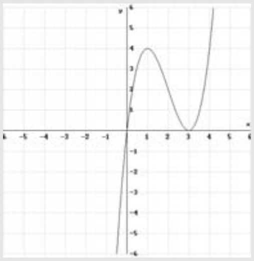
$y'' = 0 \Rightarrow x = 2$

$x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(2, 2)$

$y''' = 6 \neq 0 \Rightarrow A(2, 2)$ punto de inflexión.

Convexa ($\cup$): $(2, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 2)$



140. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

Solución:

$y' = -\frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$

$y'' = \frac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = -1$

$x = 1 \Rightarrow y = 3/2 \Rightarrow A(1, 3/2)$

$x = -1 \Rightarrow y = 3/2 \Rightarrow B(-1, 3/2)$

$y''' = \frac{144x(3 - x^2)}{(x^2 + 3)^4}$

$y'''(1) = 9/8 \neq 0 \Rightarrow A(1, 3/2)$

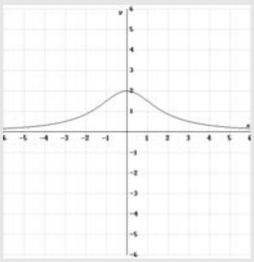
Punto de inflexión.

$y'''(-1) = -9/8 \neq 0 \Rightarrow B(-1, 3/2)$

Punto de inflexión.

Convexa ($\cup$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Cóncava ($\cap$) : $(-1, 1)$



141. Calcula y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$

b) $y = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 2$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 12x + 12$

$y' = 0 \Rightarrow x = 2$

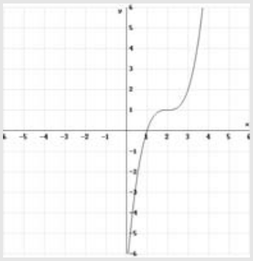
$x = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(2, 1)$

$y'' = 6x - 12$

$y''(2) = 0$

$y''' = 6 \neq 0 \Rightarrow A(2, 1)$

Punto de inflexión.



b) $y' = -4x^3 + 12x^2 - 12x + 4$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(1, 3)$

$y'' = -12x^2 + 24x - 12$

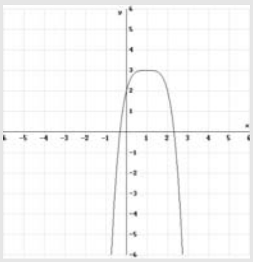
$y''(1) = 0$

$y''' = -24x + 24$

$y'''(1) = 0$

$y^{IV} = -24 < 0\ (-) \Rightarrow A(1, 3)$

Máximo relativo.



Con ayuda de Wiris o DERIVE, resuelve los siguientes problemas:

142. Halla la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la siguiente función en el punto que se indica:

$$y = x^4 - 2x^3 \text{ en } x = 1$$

Representa la función, la recta tangente y la recta normal para comprobarlo.

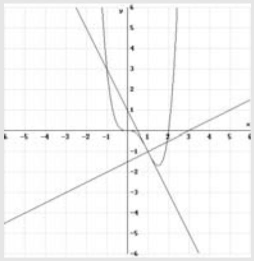
Solución:

Recta tangente:

$y = -2x + 1$

Recta normal:

$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$



143. Calcula los máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión y determina la monotonía y la curvatura de la siguiente función:

$$y = \frac{3x}{x^2 - 1}$$

Dibuja la gráfica para comprobarlo.

Solución:

Máximos relativos: no tiene.

Mínimo relativo: no tiene.

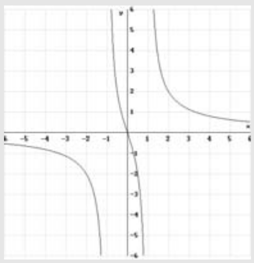
Puntos de inflexión: O(0, 0)

Creciente (↗): $\emptyset$

Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

Convexa ($\cup$): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



10 Aplicaciones de las derivadas

1. Representación de funciones polinómicas

Piensa y calcula

Calcula mentalmente: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x)$

Solución:

a) $+\infty$ b) $-\infty$

Aplica la teoría

Representa las siguientes funciones polinómicas completando el formulario de los diez apartados.

1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

Solución:

$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y'' = 6x - 12$

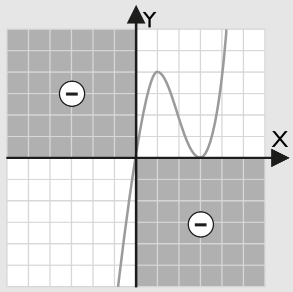
$y''' = 6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0), A(3, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, 3) \cup (3, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: B(1, 4)
   - Mínimo relativo: A(3, 0)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(1, 3)$
9. Puntos de inflexión: D(2, 2)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(2, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 2)$



10. Recorrido o imagen:

    $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

2. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$

Solución:

$y' = -3x^2 - 6x$

$y'' = -6x - 6$

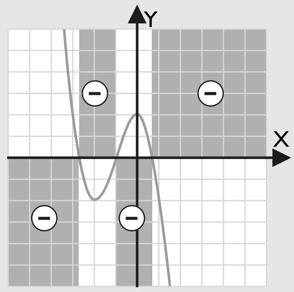
$y''' = -6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A\left(-\sqrt{3}-1, 0\right)$, $B(-1, 0)$, $C\left(\sqrt{3}-1, 0\right)$
   - Eje Y: D(0, 2)

   Signo:
   - Positiva (+): $\left(-\infty, -\sqrt{3}-1\right) \cup \left(-1, \sqrt{3}-1\right)$
   - Negativa (–): $\left(-\sqrt{3}-1, -1\right) \cup \left(\sqrt{3}-1, +\infty\right)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: D(0, 2)
   - Mínimo relativo: E(–2, –2)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): (–2, 0)
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: F(–1, 0)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -1)$
   - Cóncava (∩): $(-1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. $y = x^4 - 2x^3$

Solución:

$y' = 4x^3 - 6x^2$

$y'' = 12x^2 - 12x$

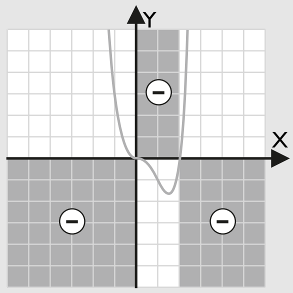
$y''' = 24x - 12$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0), A(2, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): (0, 2)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: B(3/2, –27/16)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(3/2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 3/2)$
9. Puntos de inflexión: O(0, 0), C(1, –1)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): (0, 1)



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = [-27/16, +\infty)$

4. $y = -x^4 + 2x^2$

Solución:

$y' = -4x^3 + 4x$

$y'' = -12x^2 + 4$

$y''' = -24x$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A\left(-\sqrt{2}, 0\right)$, $O(0, 0)$, $B\left(\sqrt{2}, 0\right)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $\left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right)$
   - Negativa (–): $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$

8. Máximos y mínimos relativos:

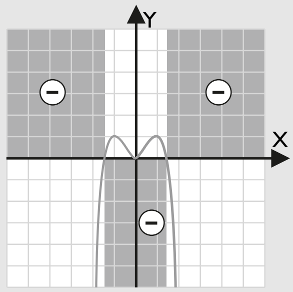
   a) Máximo relativo: $C(-1, 1)$, $D(1, 1)$

   b) Mínimo relativo: $O(0, 0)$

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
   - Decreciente ($\searrow$): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $E\left(-\sqrt{3}/3, 5/9\right)$, $F\left(\sqrt{3}/3, 5/9\right)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $\left(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\right)$
   - Cóncava ($\cap$): $\left(-\infty, -\sqrt{3}/3\right) \cup \left(\sqrt{3}/3, +\infty\right)$

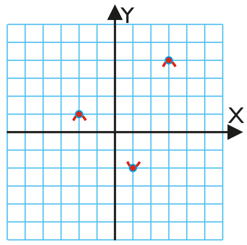


10. Recorrido o imagen:

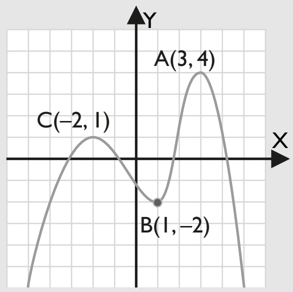
    $\text{Im}(f) = (-\infty, 1]$

5. De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto $A(3, 4)$, un mínimo relativo en el punto $B(1, -2)$, otro máximo relativo en el punto $C(-2, 1)$, y que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.



Solución:



2. Representación de funciones racionales

Piensa y calcula

Calcula mentalmente: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Solución:

a) $+\infty$ b) $-\infty$

Aplica la teoría

Representa las siguientes funciones racionales completando el formulario de los diez apartados.

6. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$

$y'' = \dfrac{2}{(x - 1)^3}$

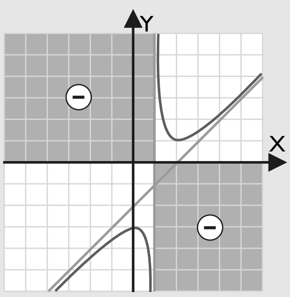
$y''' = -\dfrac{6}{(x - 1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 1$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x - 2$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: $A(0, -3)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(0, -3)$
   - Mínimo relativo: $B(2, 1)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, 2)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 1)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

7. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Solución:

$y' = -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2}$

$y'' = \dfrac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$

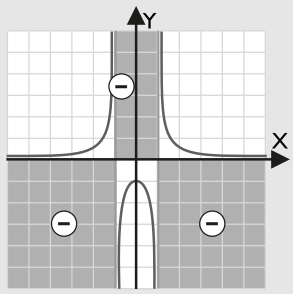
$y''' = -\dfrac{24x^3 + 24x}{(x^2 - 1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =$
   $= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 1$ y $x = -1$, donde tiene discontinuidades de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -1, x = 1$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: $A(0, -1)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(0, -1)$
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
   - Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-1, 1)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

8. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

Solución:

$y' = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$y'' = \dfrac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$

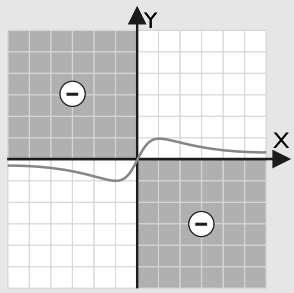
$y''' = -\dfrac{12(x^4 - 6x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje origen de coordenadas $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(1, 1)$
   - Mínimo relativo: $B(-1, -1)$

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-1, 1)$
   - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $C\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2\right)$, $O(0, 0)$, $D\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2\right)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
   - Cóncava ($\cap$): $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = [-1, 1]$

9. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

$y'' = -\dfrac{2}{x^3}$

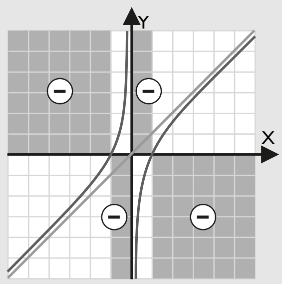
$y''' = \dfrac{6}{x^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje origen de coordenadas $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Decreciente ($\searrow$): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\infty, 0)$
   - Cóncava ($\cap$): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Problemas de optimización

Piensa y calcula

Un rectángulo tiene 12 m de perímetro; luego el ancho más el largo es 6 m. Completa la siguiente tabla:

Largo = x	0	1	2	3	4	5	6
Alto = y	6						
Superficie							

Calcula las dimensiones del rectángulo que tiene mayor superficie.

Solución:

Largo = x	0	1	2	3	4	5	6
Alto = y	6	5	4	3	2	1	0
Superficie	0	5	8	9	8	5	0

El rectángulo de mayor superficie es un cuadrado de lado $x = y = 3$ m

Aplica la teoría

10. Calcula dos números cuya suma sea 60 y de forma que sea mínimo el cuadrado del primero más el doble del cuadrado del segundo.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.
   x = primer número.
   y = segundo número.
   $x + y = 60$

b) Función que hay que minimizar.
   $f(x, y) = x^2 + 2y^2$
   Sujeto a: $x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - x$

c) Se escribe la función con una sola variable.
   $f(x, y) = x^2 + 2y^2$
   $f(x) = x^2 + 2(60 - x)^2$
   $f(x) = 3x^2 - 240x + 7\,200$

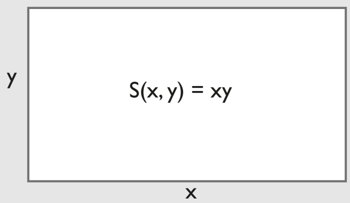
d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.
   $f'(x) = 6x - 240$
   $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 40$
   Si $x = 40 \Rightarrow y = 20$

e) Se comprueba en la segunda derivada.
   $f''(x) = 6 > 0\ (+) \Rightarrow$ Mínimo relativo.
   El primer número es $x = 40$, y el segundo, $y = 20$

11. Un ganadero quiere cercar un recinto de forma rectangular en un prado para que puedan pastar las vacas. Si dispone de 1 600 m de cerca, ¿cuánto medirá de largo y de ancho el recinto para que la superficie del recinto sea máxima?

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo:
   x = longitud de la base.
   y = altura.
   Perímetro = 1600 m



b) Función que hay que maximizar.
   $S(x, y) = xy$
   Sujeta a las condiciones:
   Perímetro = 1600 m $\Rightarrow x + y = 800$

c) Se escribe la ecuación con una sola variable.
   $S(x, y) = xy$
   $x + y = 800 \Rightarrow y = 800 - x$
   $S(x) = x(800 - x)$
   $S(x) = 800x - x^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$S'(x) = 800 - 2x$

$S'(x) = 0 \Rightarrow x = 400$

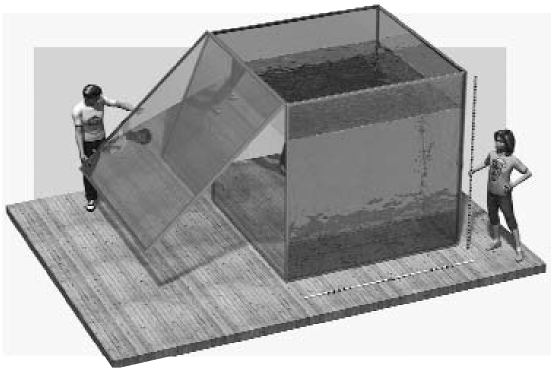
Si $x = 400 \Rightarrow y = 400$

e) Se comprueba en la 2ª derivada.

$S''(x) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) El recinto es un cuadrado que mide 400 m de lado.

12. Se quiere construir un recipiente en forma de prisma cuadrangular tal que el volumen sea máximo. Si la superficie es de 24 m^2, ¿qué dimensiones debe tener la caja?



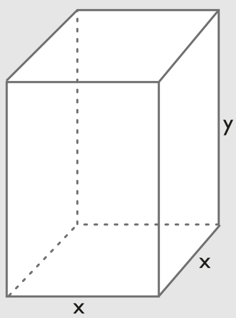
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = longitud de la base.

y = altura.

Superficie = 24 m^2



b) Función que hay que minimizar.

$V(x, y) = x^2y$

Sujeta a las condiciones:

Superficie = 24 $m^2 \Rightarrow 4xy + 2x^2 = 24 \Rightarrow 2xy + x^2 = 12$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$V(x, y) = x^2y$

$2xy + x^2 = 12 \Rightarrow y = \dfrac{12 - x^2}{2x}$

$V(x) = \dfrac{x(12 - x^2)}{2}$

$V(x) = \dfrac{1}{2}(12x - x^3)$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$V'(x) = \dfrac{1}{2}(12 - 3x^2)$

$V'(x) = 0 \Rightarrow x = -2$ y $x = 2$

(La solución negativa no tiene sentido).

Si $x = 2 \Rightarrow y = 2$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$V''(x) = -3x$

$V''(2) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) La caja es un cubo de arista 2 m y tendrá un volumen de 8 m^3

1. Representación de funciones polinómicas

13. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^3}{6} - 2x$$

Solución:

$y' = x^2/2 - 2$

$y'' = x$

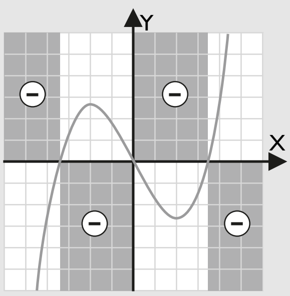
$y''' = 1$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$, $A\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$, $B\left(2\sqrt{3}, 0\right)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $\left(-2\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(2\sqrt{3}, +\infty\right)$
   - Negativa (–): $\left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(0, 2\sqrt{3}\right)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $C(-2, 8/3)$
   - Mínimo relativo: $D(2, -8/3)$

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   - Decreciente ($\searrow$): $(-2, 2)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

14. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = -x^3 + 3x$$

Solución:

$y' = -3x^2 + 3$

$y'' = -6x$

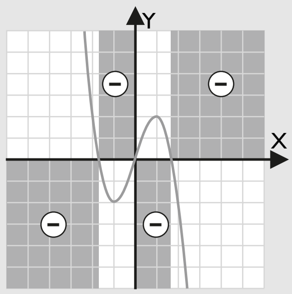
$y''' = -6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$, $A\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $B\left(\sqrt{3}, 0\right)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$
   - Negativa (–): $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $C(1, 2)$
   - Mínimo relativo: $D(-1, -2)$

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-1, 1)$
   - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\infty, 0)$
   - Cóncava ($\cap$): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

15. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^4 - 4x^2$$

Solución:

$y' = 4x^3 - 8x$

$y'' = 12x^2 - 8$

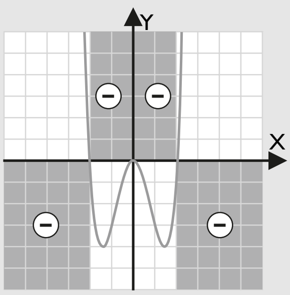
$y''' = 24x$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$, $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-2, 0) \cup (0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $O(0, 0)$
   - Mínimo relativo: $C(-\sqrt{2}, -4)$, $D(\sqrt{2}, -4)$

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
   - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$
9. Puntos de inflexión: $E(-\sqrt{6}/3, -20/9)$, $F(\sqrt{6}/3, -20/9)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\infty, -\sqrt{6}/3) \cup (\sqrt{6}/3, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$

16. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = -x^4 + 6x^2 - 5$$

Solución:

$y' = -4x^3 + 12x$

$y'' = -12x^2 + 12$

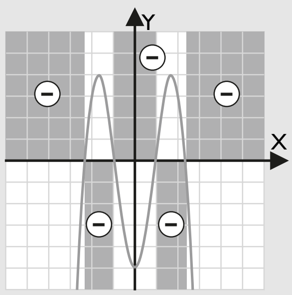
$y''' = -24x$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-\sqrt{5}, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$, $D(\sqrt{5}, 0)$
   - Eje Y: $E(0, -5)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\sqrt{5}, -1) \cup (1, \sqrt{5})$
   - Negativa (–): $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $F(-\sqrt{3}, 4)$, $G(\sqrt{3}, 4)$
   - Mínimo relativo: $E(0, -5)$

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
   - Decreciente ($\searrow$): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-1, 1)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



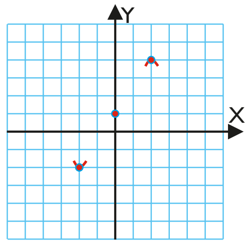
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$

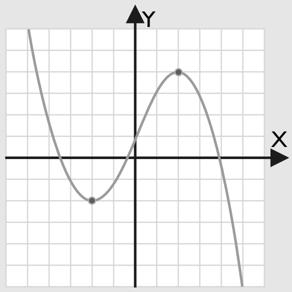
17. De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto A(2, 4), un mínimo relativo en el punto B(– 2, – 2), un punto de inflexión en el punto C(0, 1) y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.



Solución:



2. Representación de funciones racionales

18. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2 + 4}{2x}$$

Solución:

$$y' = \frac{x^2 - 4}{2x^2}$$

$$y'' = \frac{4}{x^3}$$

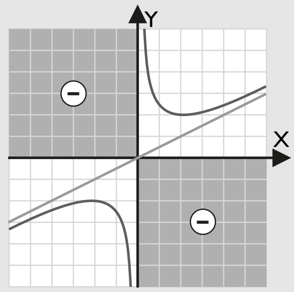
$$y''' = -\frac{12}{x^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x/2$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(–2, –2)
   - Mínimo relativo: B(2, 2)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-2, 0) \cup (0, 2)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

19. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{1 - x}$$

Solución:

$$y' = -\frac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{4}{(x - 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{12}{(x - 1)^4}$$

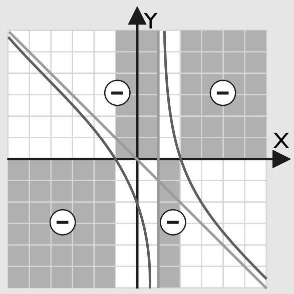
1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

3. Continuidad: es discontinua en $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 1$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = -x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(– 1, 0), B(2, 0)
   - Eje Y: C(0, – 2)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, 2)$
   - Negativa (–): $(-1, 1) \cup (2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): ∅
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 1)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

20. Represента la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

Solución:

$$y' = -\frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y'' = \frac{36x^2 - 36}{(x^2 + 3)^3}$$

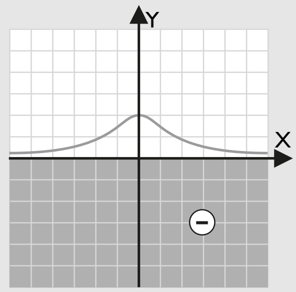
$$y''' = \frac{-144x^3 + 432x}{(x^2 + 3)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par ⇒ simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: A(0, 2)

   Signo:
   - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Negativa (–): ∅
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(0, 2)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 0)$
   - Decreciente (↘): $(0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: B(– 1, 3/2), C(1, 3/2)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-1, 1)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = (0, 2]$

21. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Solución:

$$y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$$

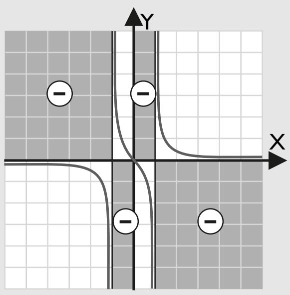
$$y''' = -\frac{6(x^4 + 6x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =$ $= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$ y $x = 1$, donde tiene discontinuidades de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -1$ y $x = 1$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $\varnothing$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: O(0, 0)

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Problemas de optimización

22. Calcula dos números **x** e **y** tales que su producto sea máximo, sabiendo que suman 60

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = primer número.

y = segundo número.

$x + y = 60$

b) Función que hay que minimizar.

$f(x, y) = xy$

sujeto a: $x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - x$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$f(x, y) = xy$

$f(x) = x(60 - x)$

$f(x) = 60x - x^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$f'(x) = 60 - 2x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 30$

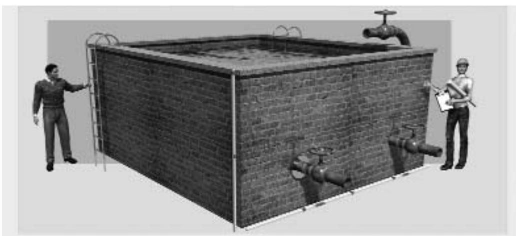
Si $x = 30 \Rightarrow y = 30$

e) Se comprueba en la 2ª derivada.

$f''(30) = -2 < 0$ (–) $\Rightarrow$ Máximo relativo.

El primer número es $x = 30$, y el segundo, $y = 30$

23. Se quiere construir un depósito abierto, es decir, sin tapa, con forma de prisma cuadrangular tal que el volumen sea máximo. Si la superficie es de 48 m^2, ¿qué dimensiones debe tener el depósito?



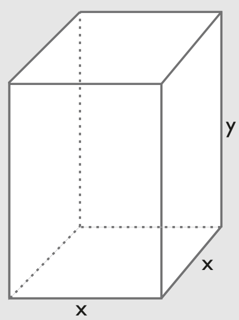
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = longitud de la base.

y = altura.

Superficie = 48 m^2



b) Función que hay que minimizar.
$V(x, y) = x^2y$
Sujeta a las condiciones:
Superficie = 48 m^2 $\Rightarrow 4xy + x^2 = 48$

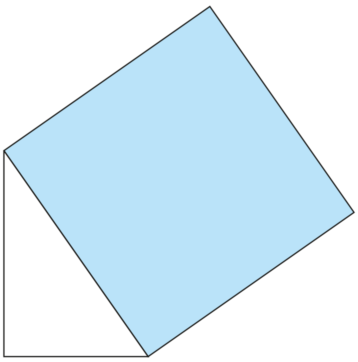
c) Se escribe la función con una sola variable.
$V(x, y) = x^2y$
$4xy + x^2 = 48 \Rightarrow y = \dfrac{48 - x^2}{4x}$
$V(x) = 1/4(48x - x^3)$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.
$V'(x) = 1/4\left(48 - 3x^2\right)$
$V'(x) = 0 \Rightarrow x = -4$ y $x = 4$
(La solución negativa no tiene sentido).
Si $x = 4 \Rightarrow y = 2$

e) Se comprueba en la 2ª derivada.
$V''(x) = -3x/2$
$V''(4) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

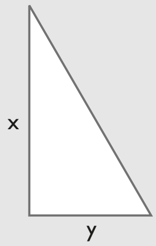
f) El depósito tiene de base un cuadrado de lado 4 m y altura 2 m y tendrá un volumen de 32 m^3

24. La suma de los catetos de un triángulo rectángulo mide 12 m. Halla las longitudes de los catetos para que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa sea mínima.



Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.
x = cateto mayor.
y = cateto menor.
Suma de los catetos = 12 m



b) Función que hay que minimizar.
$A(x, y) = x^2 + y^2$
Sujeta a las condiciones:
$x + y = 12$

c) Se escribe la función con una sola variable.
$A(x, y) = x^2 + y^2$
$x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x$
$A(x) = x^2 + (12 - x)^2$
$A(x) = 2x^2 - 24x + 144$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.
$A'(x) = 4x - 24$
$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 6$
Si $x = 6 \Rightarrow y = 6$

e) Se comprueba en la 2ª derivada.
$A''(x) = 4$
$A''(6) = 4 < 0\ (-) \Rightarrow$ Mínimo relativo.

f) El triángulo es isósceles y sus catetos miden 6 m

Para ampliar

25. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

Solución:

$y' = 3x^2 - 12x + 12$ $\quad$ $y'' = 6x - 12$ $\quad$ $y''' = 6$

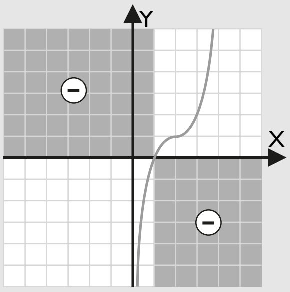
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(1, 0)
   - Eje Y: B(0, – 7)

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: C(2, 1)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(2, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 2)$



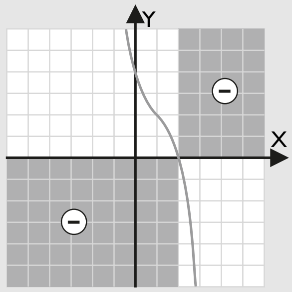
10. Recorrido o imagen:
    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(2, 0)
   - Eje Y: B(0, 4)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 2)$
   - Negativa (–): $(2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $\varnothing$
   - Decreciente (↘): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: C(1, 2)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 1)$
   - Cóncava (∩): $(1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

26. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4$$

Solución:

$y' = -3x^2 + 6x - 4$

$y'' = -6x + 6$

$y''' = -6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)

27. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^4 + 2x^2$$

Solución:

$y' = 4x^3 + 4x$

$y'' = 12x^2 + 4$

$y''' = 24x$

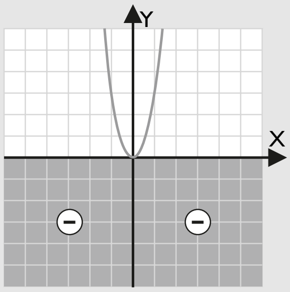
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par ⇒ simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: O(0, 0)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$



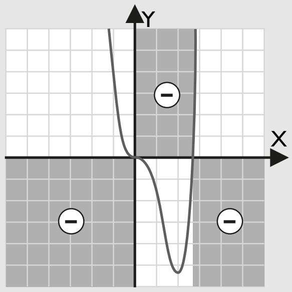
10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0), A(8/3, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (8/3, +\infty)$
   - Negativa (–): $(0, 8/3)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: O(2, – 16/3)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 2)$
9. Puntos de inflexión: O(0, 0), B(4/3, – 256/81)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (4/3, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(0, 4/3)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = [-16/3, +\infty)$

28. Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^4 - \frac{8}{3}x^3$$

Solución:

$y' = 4x^3 - 8x^2$

$y'' = 12x^2 - 16x$

$y''' = 24x - 16$

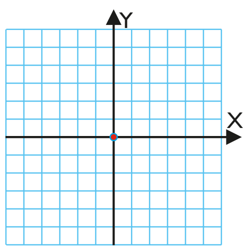
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0).

29. De una función polinómica de tercer grado se sabe que tiene un punto de inflexión en el punto O(0, 0), no tiene ni máximos ni mínimos relativos, y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

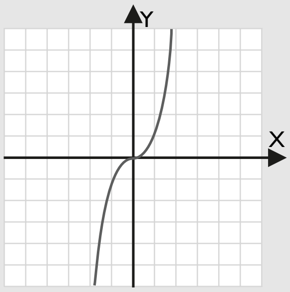
Con esta información, dibuja una gráfica a mano alzada.

Halla una fórmula para esta gráfica.



Solución:

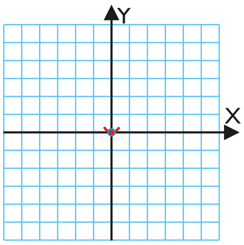
$y = x^3$



30. De una función polinómica de cuarto grado se sabe que tiene un solo mínimo relativo en el punto O(0, 0), no tiene ni máximos relativos, ni puntos de inflexión, y que:

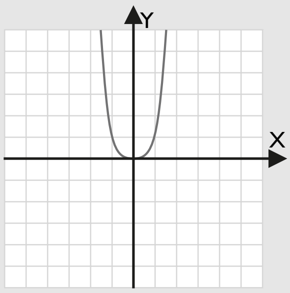
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Con esta información, dibuja una gráfica a mano alzada. Halla una fórmula para esta gráfica.

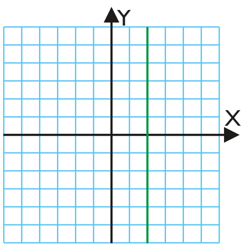


Solución:

$y = x^4$

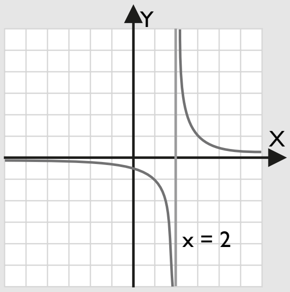


31. Halla una función racional que tenga como asíntota vertical la recta x = 2

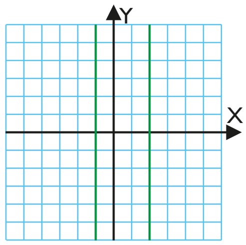


Solución:

Por ejemplo, $y = \dfrac{1}{x - 2}$

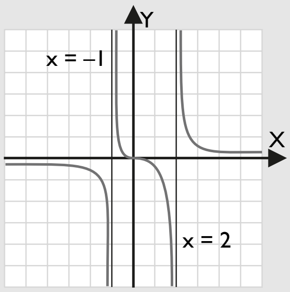


32. Halla una función racional que tenga dos asíntotas verticales x = 2, x = – 1



Solución:

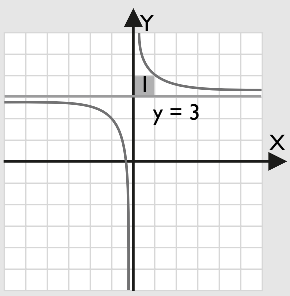
Por ejemplo, $y = \dfrac{x}{(x - 2)(x + 1)}$



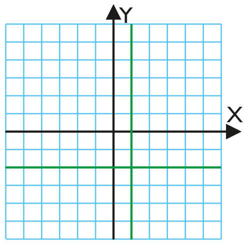
33. Halla una función racional que tenga como asíntota horizontal la recta y = 3

Solución:

Por ejemplo, $y = \dfrac{1}{x} + 3$

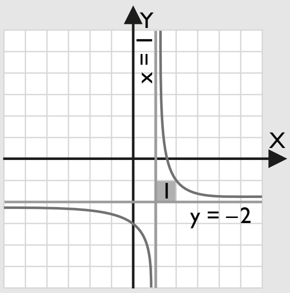


34. Halla una función racional que tenga dos asíntotas: una vertical, $x = 1$, y otra horizontal, $y = -2$

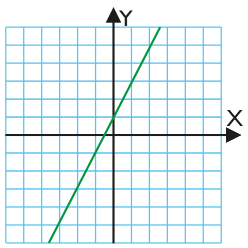


Solución:

Por ejemplo, $y = \dfrac{1}{x-1} - 2$

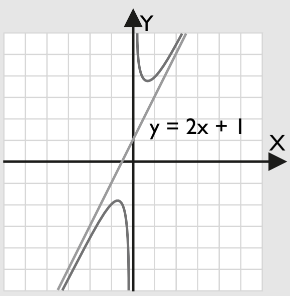


35. Halla una función racional que tenga como asíntota oblicua $y = 2x + 1$



Solución:

Por ejemplo, $y = 2x + 1 + \dfrac{1}{x}$, es decir, $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x}$



36. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{2x - 1}{x^2}$$

Solución:

$$y' = \frac{-2x + 2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{4x - 6}{x^4}$$

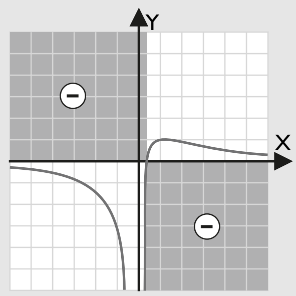
$$y''' = \frac{-12x + 24}{x^5}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(1/2, 0)
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(1/2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0) \cup (0, 1/2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: B(1, 1)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): (0, 1)
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: C(3/2, 8/9)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(3/2, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0) \cup (0, 3/2)$



10. Recorrido o imagen:

    $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 1]$

37. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2}{x^2+3}$$

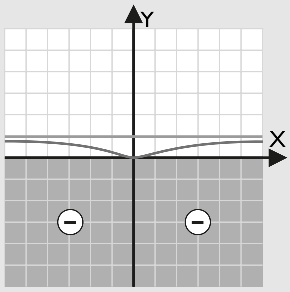
Solución:

$y' = \dfrac{6x}{(x^2+3)^2}$

$y'' = \dfrac{-18x^2+18}{(x^2+3)^3}$

$y''' = \dfrac{72x^3-216x}{(x^2+3)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   • Verticales: no tiene.
   • Horizontales: $y = 1$
   • Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   • Eje X: O(0, 0)
   • Eje Y: O(0, 0)
   Signo:
   • Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   • Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   • Máximo relativo: no tiene.
   • Mínimo relativo: O(0, 0)
   Monotonía:
   • Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   • Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: A(–1, 1/4), B(1, 1/4)
   Curvatura:
   • Convexa (∪): $(-1, 1)$
   • Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
    Im(f) = [0, 1)

38. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x}{4-x^2}$$

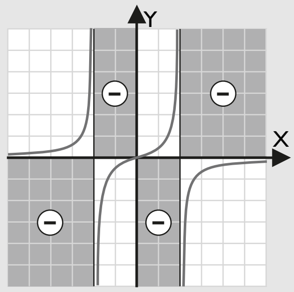
Solución:

$y' = \dfrac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$

$y'' = \dfrac{-2x^3-24x}{(x^2-4)^3}$

$y''' = \dfrac{6(x^4+24x^2+16)}{(x^2-4)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} - \{-2, 2\} =$
   $= (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -2$ y $x = 2$, donde tiene discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen.
6. Asíntotas:
   • Verticales: $x = -2$, $x = 2$
   • Horizontales: $y = 0$
   • Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   • Eje X: O(0, 0)
   • Eje Y: O(0, 0)
   Signo:
   • Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
   • Negativa (–): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   • Máximo relativo: no tiene.
   • Mínimo relativo: no tiene.
   Monotonía:
   • Creciente (↗): $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$
   • Decreciente (↘): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: O(0, 0)
   Curvatura:
   • Convexa (∪): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
   • Cóncava (∩): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
    Im(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

39. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Solución:

$$y' = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{-12x^2 + 4}{(x^2 + 1)^3}$$

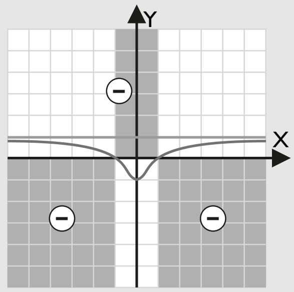
$$y''' = \frac{48x^3 - 48x}{(x^2 + 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 1$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-1, 0), B(1, 0)$
   - Eje Y: $C(0, -1)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $C(0, -1)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: $D\left(-\sqrt{3}/3, -1/2\right)$, $E\left(\sqrt{3}/3, -1/2\right)$,

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\left(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\right)$
   - Cóncava (∩): $\left(-\infty, -\sqrt{3}/3\right) \cup \left(\sqrt{3}/3, +\infty\right)$



10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = [-1, 1)$

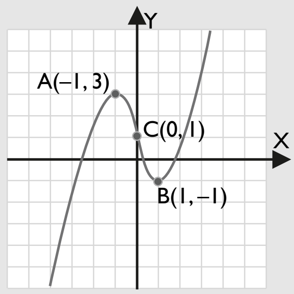
Problemas

40. De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto $A(-1, 3)$, un mínimo relativo en el punto $B(1, -1)$ y un punto de inflexión en el punto $C(0, 1)$, y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.

Solución:



41. Estudia si en el punto O(0, 0) la siguiente función polinómica tiene un punto de inflexión:

$$y = x^4 - x$$

Solución:

$y' = 4x^3 - 1$

$y'' = 12x^2$

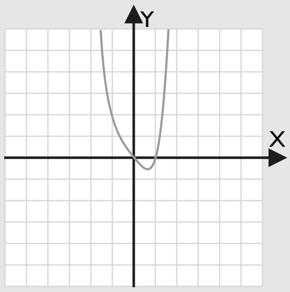
$y''(0) = 0$

$y''' = 24x$

$y'''(0) = 0$

$y^{IV} = 24$, es de orden par.

En el punto O(0, 0) no hay punto de inflexión.



42. Estudia el punto P(0, – 1) de la siguiente función polinómica:

$$y = x^4 - 1$$

Solución:

$y' = 4x^3$

$y' = 0$

$y'' = 12x^2$

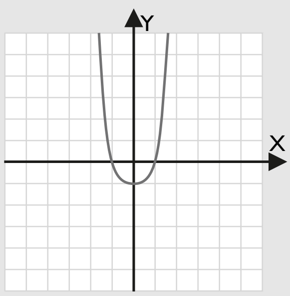
$y''(0) = 0$

$y''' = 24x$

$y'''(0) = 0$

$y^{IV} = 24 > 0$ (+)

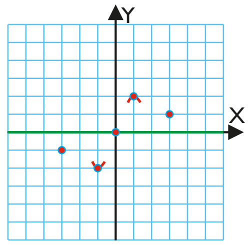
La función tiene un mínimo relativo en P(0, – 1)



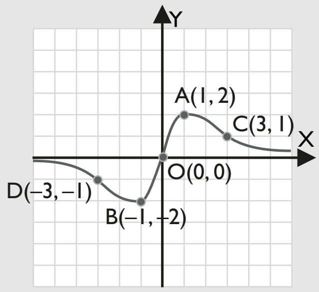
43. De una función racional se sabe que tiene como asíntota y = 0, tiene un máximo relativo en el punto A(1, 2), un mínimo relativo en el punto B(– 1, –2), puntos de inflexión en O(0, 0), C(3, 1) y D(–3, – 1), y que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+ \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-$$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.



Solución:



44. Estudia el punto P(0, 3) de la siguiente función racional:

$$y = \frac{9}{x^2 + 3}$$

Solución:

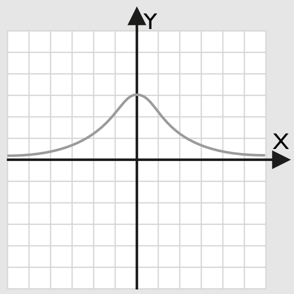
$y' = -\dfrac{18x}{(x^2 + 3)^2}$

$y'(0) = 0$

$y'' = \dfrac{54x^2 - 54}{(x^2 + 3)^3}$

$y''(0) = -2 < 0$ (–)

El punto P(0, 3) es un máximo relativo.



45. Estudia el punto O(0, 0) de la siguiente función racional:

$$y = \frac{3x}{x^2 + 1}$$

Solución:

$y' = \dfrac{-3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2}$

$y'(0) = 3$

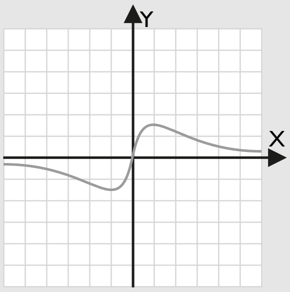
$y'' = \dfrac{6x^3 - 18x}{(x^2 + 1)^3}$

$y''(0) = 0$

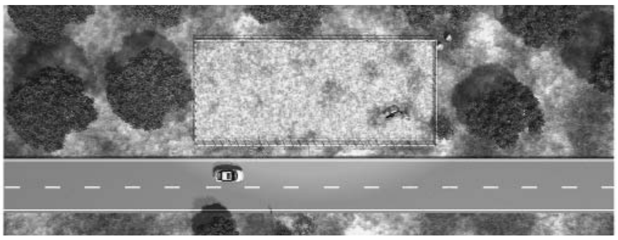
$y''' = -\dfrac{18(x^4 - 6x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4}$

$y'''(0) = -18 \neq 0$

En el punto (0, 0) hay un punto de inflexión.



46. Una finca está al lado de una carretera y se quiere vallar el mayor rectángulo posible. El metro de valla al lado de la carretera cuesta 5 €, y el resto, a 2 €. Halla el área del mayor recinto que se puede vallar con 2 800 €



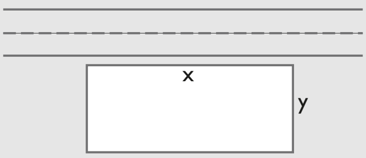
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = base del rectángulo.

y = altura del rectángulo.

$5x + 2x + 2y + 2y = 2\,800$



b) Función que hay que maximizar.

$A(x, y) = xy$

Sujeta a las condiciones:

$7x + 4y = 2\,800$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$A(x, y) = xy$

$7x + 4y = 2800 \Rightarrow y = \dfrac{2\,800 - 7x}{4}$

$A(x) = 700x - \dfrac{7}{4}x^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$A'(x) = 700 - \dfrac{7}{2}x$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 200$

Si $x = 200 \Rightarrow y = 350$

e) Se comprueba en la 2ª derivada.

$A''(x) = -7/2$

$A''(200) = -7/2 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

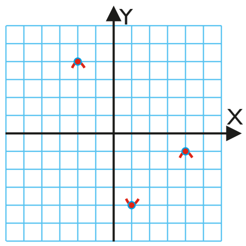
f) El rectángulo tendrá al lado de la carretera 200 m y el otro lado 350 m con un área de 70 000 m²

Para profundizar

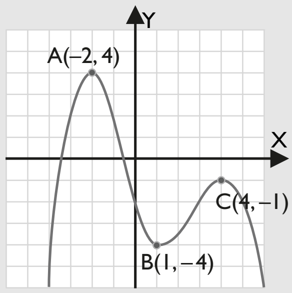
47. De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto A(–2, 4), un mínimo relativo en el punto B(1, –4), otro máximo relativo en el punto C(4, –1), y que:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.



Solución:



48. Estudia el punto P(0, 1) de la siguiente función polinómica: $y = x^4 + 1$

Solución:

$y' = 4x^3$

$y'(0) = 0$

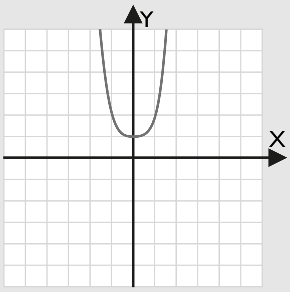
$y'' = 12x^2$

$y''(0) = 0$

$y''' = 24x$

$y'''(0) = 0$

$y^{IV} = 24 > 0\ (+) \Rightarrow$ Mínimo relativo.



49. Estudia si en el punto O(0, 0) de la siguiente función polinómica tiene un punto de inflexión:

$$y = -x^4 - x$$

Solución:

$y' = -4x^3 - 1$

$y'' = -12x^2$

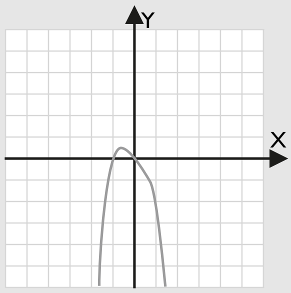
$y''(0) = 0$

$y''' = -24x$

$y'''(0) = 0$

$y^{IV} = -24 < 0\ (-)$

En O(0, 0) no hay punto de inflexión.

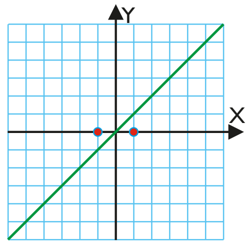


50. De una función racional se sabe que tiene como asíntotas $x = 0$ e $y = x$, corta al eje X en los puntos A(1, 0) y B(–1, 0), y que:

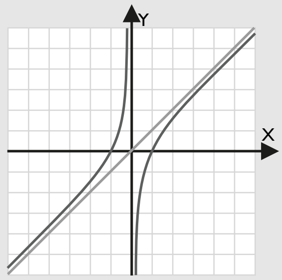
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

Con esta información, dibuja una gráfica a mano alzada.



Solución:



51. Estudia el punto P(0, – 1) de la siguiente función racional:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Solución:

$y' = -\dfrac{4x}{(x^2 - 1)^2}$

$y'(0) = 0$

$y'' = \dfrac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$

$y''(0) < 0\ (-) \Rightarrow (0, -1)$ Máximo relativo.

52. Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{1}{x^2}$$

Solución:

$y' = -\dfrac{2}{x^3}$

$y'' = \dfrac{6}{x^4}$

$y''' = -\dfrac{24}{x^5}$

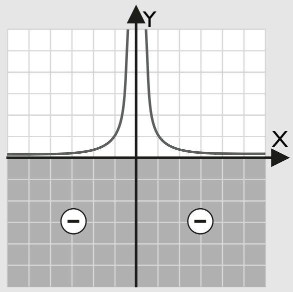
1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 0)$
   - Decreciente ($\searrow$): $(0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $\varnothing$



10. Recorrido o imagen:

    $\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$

Paso a paso

53. Representa la siguiente función y completa el formulario de los diez apartados:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Wiris o DERIVE:

54. Dentro de un prado se quiere colocar una cerca rectangular de 30 m de longitud para que pueda pastar una cabra. Calcula las dimensiones para que la superficie sea máxima.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

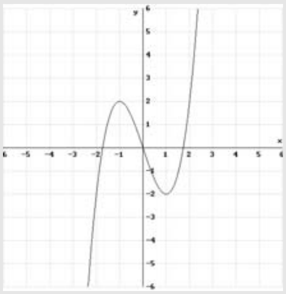
55. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es,** elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

Representa las siguientes funciones y completa para cada una de ellas el formulario de los diez apartados:

56. $y = x^3 - 3x$

Solución:



1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-\sqrt{3}, 0)$, O(0, 0), $B(\sqrt{3}, 0)$
   - Eje Y: O(0, 0)

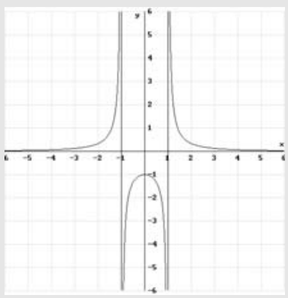
   Signo:
   - Positiva (+): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: C(–1, 2)
   - Mínimo relativo: D(1, –2)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-1, 1)$
9. Puntos de inflexión: O(0, 0)

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$
10. Recorrido o imagen:
    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

57. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Solución:



1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =$
   $= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

3. Continuidad: es discontinua en $x = 1$, $x = -1$, donde tiene discontinuidades de 1ª especie, de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par $\Rightarrow$ Es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -1$, $x = 1$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: $A(0, -1)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(0, -1)$
   - Mínimo relativo: no tiene.

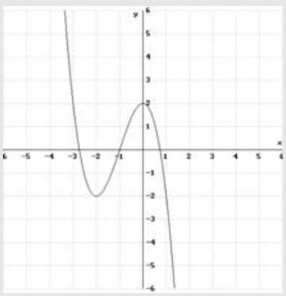
   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$) $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
   - Decreciente ($\searrow$): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-1, 1)$
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

58. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$

Solución:



1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0). Es simétrica respecto del punto $P(-1, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-\sqrt{3} - 1, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(\sqrt{3} - 1, 0)$
   - Eje Y: $D(0, 2)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{3} - 1) \cup (-1, \sqrt{3} - 1)$
   - Negativa (–): $(-\sqrt{3} - 1, -1) \cup (\sqrt{3} - 1, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $D(0, 2)$
   - Mínimo relativo: $E(-2, -2)$

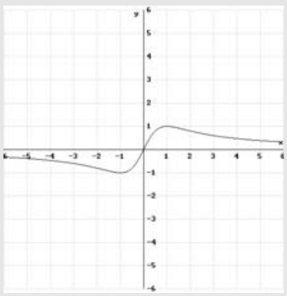
   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-2, 0)$
   - Decreciente ($\searrow$): $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $F(-1, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\infty, -1)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-1, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

59. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

Solución:



1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar $\Rightarrow$ simétrica respecto del origen de coordenadas O(0, 0)

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: y = 0
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(1, 1)
   - Mínimo relativo: B(–1, –1)

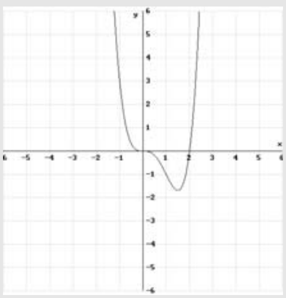
   Monotonía:
   - Creciente (↗): (–1, 1)
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $C\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2\right)$, O(0, 0), $D\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2\right)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$
   - Cóncava (∩): $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$
10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = [–1, 1]

60. $y = x^4 - 2x^3$

Solución:



1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0), A(2, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): (0, 2)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: B(3/2, –27/16)

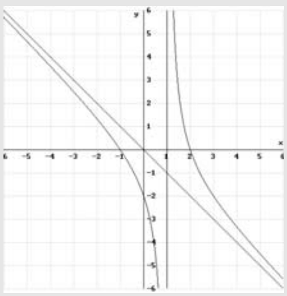
   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(3/2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 3/2)$
9. Puntos de inflexión: O(0, 0), C(1, –1)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): (0, 1)
10. Recorrido o imagen:

    $Im(f) = [-27/16, +\infty)$

61. $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{1 - x}$

Solución:



1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en x = 1, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0). Es simétrica respecto del punto P(1, –1)

6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 1$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = -x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(–1, 0), B(2, 0)
   - Eje Y: C(0, –2)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, 2)$
   - Negativa (–): $(-1, 1) \cup (2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $\varnothing$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(1, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 1)$
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-\sqrt{5}, 0)$, B(–1, 0), C(1, 0), $D(\sqrt{5}, 0)$
   - Eje Y: E(0, –5)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\sqrt{5}, -1) \cup (1, \sqrt{5})$
   - Negativa (–): $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximos relativos: $F(-\sqrt{3}, 4)$, $G(\sqrt{3}, 4)$
   - Mínimo relativo: H(0, –5)

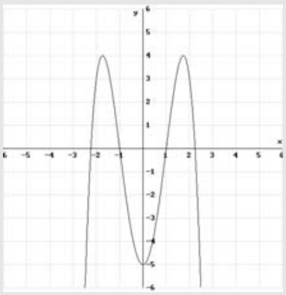
   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
   - Decreciente (↘): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: B(–1, 0), C(1, 0)

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-1, 1)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -1) \cup (1 +\infty)$
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$

62. $y = -x^4 + 6x^2 - 5$

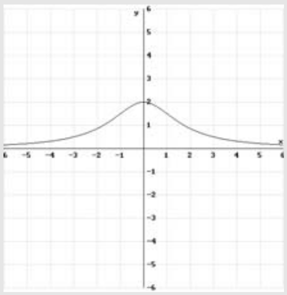
Solución:



1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par ⇒ simétrica respecto del eje Y

63. $y = \dfrac{6}{x^2 + 3}$

Solución:



1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par ⇒ simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: $A(0, 2)$

   Signo:
   - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Negativa (–): $\varnothing$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(0, 2)$
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 0)$
   - Decreciente ($\searrow$): $(0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $B(-1, 3/2)$, $C(1, 3/2)$

   Curvatura:
   - Convexa ($\cup$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava ($\cap$): $(-1, 1)$
10. Recorrido o imagen:

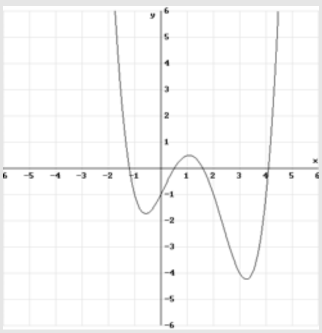
    $\text{Im}(f) = (0, 2]$

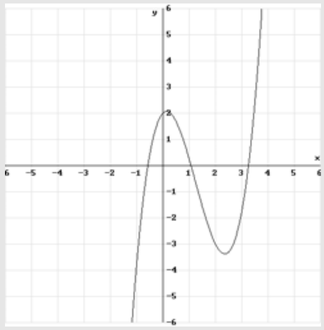
Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris o DERIVE.

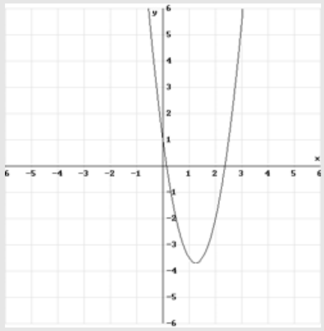
64. Representa la siguiente función polinómica y sus derivadas sucesivas. ¿Qué puedes inducir de los resultados obtenidos?

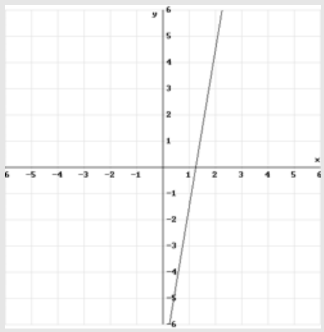
$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x - 1$$

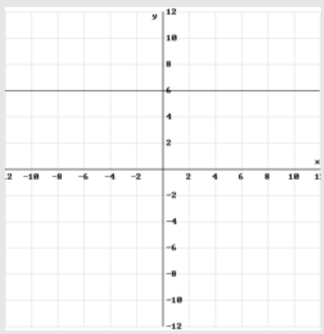
Solución:









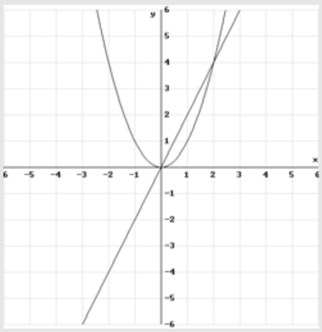


La derivada de una función polinómica es otra función polinómica de un grado menor. Tiene un máximo o mínimo relativo menos y un punto de inflexión menos.

65. Representa la función derivada f '(x) = 2x, y observa la gráfica y el punto en el que corta al eje X. Trata de deducir una fórmula de la función f(x) por *ensayo-acierto*.

Solución:

$y = x^2$



66. En una ciudad de 3 000 000 de habitantes hay una epidemia de gripe. La función que define el número de enfermos es $f(x) = 125 + 20x - x^2$, donde **x** está medido en días, e **y,** en miles de personas. Calcula el día en el que el número de enfermos es máximo.

Solución:

$y' = 20 - 2x$

$y'(x) = 0 \Rightarrow x = 10$

$y'' = -2$

$y''(10) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

El día 10 es cuando más enfermos hay.

67. Entre todos los rectángulos de perímetro 100 m, calcula las dimensiones del que tiene mayor superficie.

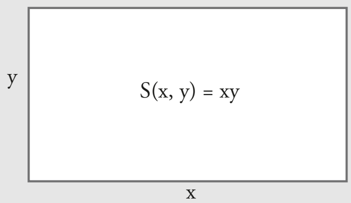
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = longitud de la base.

y = altura.

Perímetro = 100 m



b) Función que hay que maximizar.

$S(x, y) = xy$

Sujeta a las condiciones:

Perímetro = 100 m $\Rightarrow 2(x + y) = 100 \Rightarrow x + y = 50$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$S(x, y) = xy$

$y = 50 - x$

$S(x) = x(50 - x)$

$S(x) = 50x - x^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$S'(x) = 50 - 2x$

$50 - 2x = 0 \Rightarrow x = 25$

Si $x = 25 \Rightarrow y = 25$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$S''(25) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) Es un cuadrado de 25 m de lado.

68. Una finca está al lado de una carretera y se quiere vallar el mayor rectángulo posible. El metro de valla al lado de la carretera cuesta 5 €, y el resto, a 2 €. Halla el área del mayor recinto que se puede vallar con 2 800 €

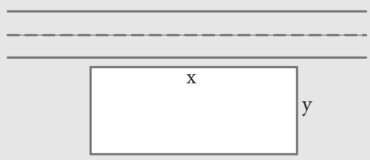
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = base del rectángulo.

y = altura del rectángulo.

$5x + 2x + 2y + 2y = 2\,800$



b) Función que hay que maximizar.

$A(x, y) = xy$

Sujeta a las condiciones:

$7x + 4y = 2\,800$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$A(x, y) = xy$

$7x + 4y = 2\,800 \Rightarrow y = \dfrac{2\,800 - 7x}{4}$

$A(x) = 700x - \dfrac{7}{4}x^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$A'(x) = 700 - \dfrac{7}{2}x$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 200$

Si $x = 200 \Rightarrow y = 350$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$A''(x) = -7/2$

$A''(200) = -7/2 < 0\ (-) \Rightarrow$ Máximo relativo.

f) El rectángulo tendrá una base de 200 m y una altura de 350 m, con un área de 70 000 m^2

BLOQUE III

Estadística y probabilidad

11. Estadística unidimensional
12. Estadística bidimensional
13. Probabilidad. Distribución binomial y normal

11 Estadística unidimensional

1. Datos y tablas de frecuencias

■ Piensa y calcula

Se ha preguntado a un grupo de personas cuántos libros han comprado en el último mes. Observa la siguiente tabla, di cuántas personas formaban el grupo y explica lo que significan los datos de cada columna:

Nº libros (x_i)	Nº personas (n_i)	N_i	N_i (%)	f_i	%	F_i
0	10	10	20,0	0,20	20	0,20
1	17	27	54,0	0,34	34	0,54
2	14	41	82,0	0,28	28	0,82
3	9	50	100,0	0,18	18	1,00

Solución:

El grupo lo formaban 50 personas.

1ª columna: el número de libros que se han comprado durante el último mes.

2ª columna: el número de personas que han comprado cada número de libros respectivamente.

3ª columna: el número de personas acumuladas que han comprado un número determinado de libros o menos.

4ª columna: la columna anterior expresada en porcentaje.

5ª columna: la proporción de personas sobre el total que han comprado un determinado número de libros.

6ª columna: la columna anterior expresada en porcentaje.

7ª columna: las proporciones acumuladas de la 5ª columna.

● Aplica la teoría

1. Pon un ejemplo de carácter estadístico cualitativo y otro cuantitativo.

Solución:

Carácter cualitativo: el color del pelo.

Carácter cuantitativo: el peso.

2. Se ha lanzado un dado de seis caras numeradas del 1 al 6, obteniéndose los siguientes resultados:

4	2	1	2	6	5	5	5	6	2
3	3	4	2	3	3	5	6	1	3
1	2	1	4	4	5	3	1	6	2
1	2	2	3	3	4	5	5	5	6

a) Clasifica el carácter estudiado.

b) Haz la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Solución:

a) Cuantitativo discreto.

b) Tabla.

x_i	n_i	N_i	N_i(%)	f_i	f_i(%)	F_i
1	6	6	15,0	0,150	15,0	0,150
2	8	14	35,0	0,200	20,0	0,350
3	8	22	55,0	0,200	20,0	0,550
4	5	27	67,5	0,125	12,5	0,675
5	8	35	87,5	0,200	20,0	0,875
6	5	40	100,0	0,125	12,5	1,000
Total	**40**			**1,000**	**100,0**	

3. Se ha realizado un estudio sobre el peso en gramos de unas piezas, obteniéndose los siguientes resultados:

69	58	54	40	61	72	56	52	64	57
52	60	54	50	63	55	50	31	69	61
51	58	54	48	63	69	58	55	50	70
32	35	46	40	38	39	42	36	40	47

a) Clasifica el carácter estudiado.

b) Agrupa los datos en 6 intervalos y haz la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Solución:

a) Cuantitativo continuo.

b) Recorrido = 72 – 31 = 41

Número de intervalos: 6

Longitud de cada intervalo: 42 : 6 = 7

Extremo inferior del primer intervalo:

$$(42 - 41) : 2 = 0{,}5 \Rightarrow 31 - 0{,}5 = 30{,}5$$

Intervalo	x_i	n_i	N_i	$N_i(\%)$	f_i	$f_i(\%)$	F_i
30,5 - 37,5	34	4	4	10,0	0,100	10,0	0,100
37,5 - 44,5	41	6	10	25,0	0,150	15,0	0,250
44,5 - 51,5	48	7	17	42,5	0,175	17,5	0,425
51,5 - 58,5	55	12	29	72,5	0,300	30,0	0,725
58,5 - 65,5	62	6	35	87,5	0,150	15,0	0,875
65,5 - 72,5	69	5	40	100,0	0,125	12,5	1,000
Total		**40**			**1,000**	**100,0**	

4. Se ha preguntado a una muestra de personas sobre el tipo de deporte que realizan, obteniéndose los siguientes resultados:

Tipo	Nº de personas
Natación	4
Tenis	10
Carrera	20
Ciclismo	6

a) Clasifica el carácter estudiado.

b) Haz la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Solución:

a) Cualitativo.

b) Tabla.

Tipo	n_i	N_i	$N_i(\%)$	f_i	$f_i(\%)$	F_i
Natación	4	4	10	0,10	10	0,10
Tenis	10	14	35	0,25	25	0,35
Carrera	20	34	85	0,50	50	0,85
Ciclismo	6	40	100	0,15	15	1,00
Total	**40**			**1,00**	**100**	

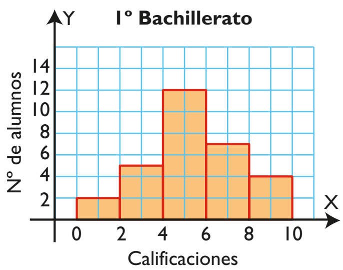
2. Gráficos estadísticos

Piensa y calcula

a) ¿Qué representa el gráfico adjunto?

b) Escribe la tabla de frecuencias absolutas.

c) ¿Cuántos individuos han sacado una calificación mayor que 5?



Solución:

a) La distribución de las calificaciones de un grupo de alumnos de 1º de Bachillerato.

b) Tabla.

Intervalo	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	Suma
x_i	1	3	5	7	9	
n_i	2	5	12	7	4	**30**

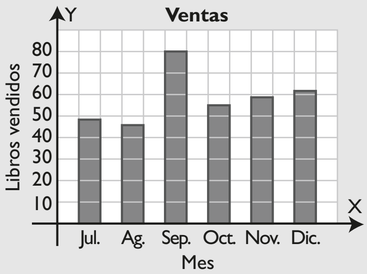
c) 7 + 4 = 11 alumnos.

Aplica la teoría

5. Representa en un diagrama de barras la distribución del número total de libros vendidos en los últimos seis meses en una librería:

Mes	Jul.	Ag.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.
Nº libros	48	46	80	55	59	62

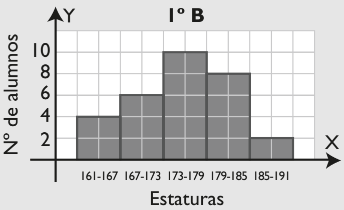
Solución:



6. Representa en un histograma la siguiente distribución de las estaturas en centímetros de los alumnos de 1º B:

x_i	161-167	167-173	173-179	179-185	185-191
n_i	4	6	10	8	2

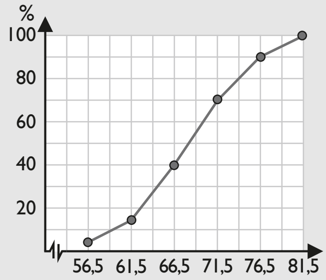
Solución:



7. La siguiente tabla recoge la distribución del peso en kilogramos de un grupo de personas. Haz un polígono de frecuencias acumuladas:

Peso (kg)	Nº de personas
51,5 a 56,5	2
56,5 a 61,5	4
61,5 a 66,5	10
66,5 a 71,5	12
71,5 a 76,5	8
76,5 a 81,5	4

Solución:



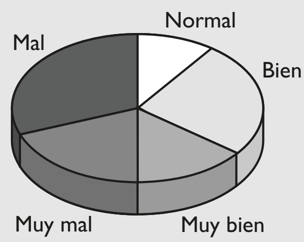
8. En una encuesta sobre el funcionamiento de un servidor de Internet, se han recogido las siguientes respuestas:

x_i	Muy mal	Mal	Normal	Bien	Muy bien
n_i	20	30	10	25	15

Representa los datos en un diagrama de sectores.

Solución:

Opinión sobre un servidor de Internet



3. Parámetros estadísticos

Piensa y calcula

En la tabla adjunta se recogen el número de hijos de las familias de 20 alumnos. Calcula el número medio de hijos por familia.

Nº de hijos	1	2	3	4
Nº de familias	6	9	4	1

Solución:

Nº medio de hijos = $(1 \cdot 6 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1) : 20 = 40 : 20 = 2$

Aplica la teoría

9. El número de errores ortográficos cometidos por un grupo de estudiantes en una prueba ha sido:

Nº de errores	0	1	2	3	4
Nº de alumnos	6	7	5	5	2

Calcula el número medio de errores, la desviación típica e interpreta el coeficiente de variación.

Solución:

Nº de errores: x_i	Nº de alumnos: n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
0	6	0	0
1	7	7	7
2	5	10	20
3	5	15	45
4	2	8	32
Total	**25**	**40**	**104**

Media: $\overline{x} = 40/25 = 1,6$ errores.

Varianza: $V = 104/25 - 1,6^2 = 1,6$

$\sigma = \sqrt{1,6} = 1,26$

CV = 1,26/1,6 = 0,79 = 79% > 30% ⇒ Hay mucha dispersión en los datos.

10. La duración en horas de una muestra de bombillas ha sido:

x_i	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
n_i	6	8	11	9	6

Calcula la duración media, la desviación típica e interpreta el coeficiente de variación.

Solución:

Intervalo	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
300 - 400	350	6	2 100	735 000
400 - 500	450	8	3 600	1 620 000
500 - 600	550	11	6 050	3 327 500
600 - 700	650	9	5 850	3 802 500
700 - 800	750	6	4 500	3 375 000
Total		**40**	**22 100**	**12 860 000**

Media: $\overline{x} = 22\,100/40 = 552,5$ horas.

Varianza: $V = 12\,860\,000/40 - 552,5^2 = 16\,243,75$

$\sigma = \sqrt{16\,243,8} = 127,45$

CV = 127,45/552,5 = 0,23 = 23% < 30% ⇒ Hay poca dispersión en los datos.

11. Se desea comparar las distribuciones A y B de la tabla adjunta. ¿Cuál de las dos tiene mayor dispersión?

x_i	A	B
1	1	12
2	8	5
3	22	2
4	7	7
5	2	14

Solución:

Distribución A:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
1	1	1	1
2	8	16	32
3	22	66	198
4	7	28	112
5	2	10	50
Total	**40**	**121**	**393**

Media: $\overline{x} = 121/40 = 3,03$

Varianza: $V = 393/40 - 3,03^2 = 0,64$

$\sigma = \sqrt{0,67} = 0,8$

CV = 0,8/3,03 = 0,26 = 26% < 30%

Distribución B:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
1	12	12	12
2	5	10	20
3	2	6	18
4	7	28	112
5	14	70	350
Total	**40**	**126**	**512**

Media: $\overline{x} = 126/40 = 3,15$

Varianza: $V = 512/40 - 3,15^2 = 2,88$

$\sigma = \sqrt{2,88} = 1,7$

CV = 1,7/3,15 = 0,54 = 54% > 30%

La distribución B tiene más del doble de dispersión que la distribución A

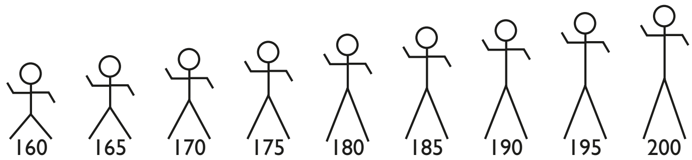
4. Medidas de posición

Piensa y calcula

Calcula la estatura que deja por debajo de ella al:

a) 50% de los individuos.

b) 25% de los individuos.



Solución:

a) 180 cm b) 170 cm

Aplica la teoría

12. Calcula los tres primeros cuartiles de los siguientes datos:

4	2	1	2	6	5	5	5	6	2
3	3	4	2	3	3	5	6	1	3

Solución:

a) Se ordenan los datos y se calcula N:

1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6

N = 20

b) $20/4 = 5 \Rightarrow 5^{\circ}$ lugar $\Rightarrow 5^{\circ}$ y 6° lugar $\Rightarrow Q_1 = \dfrac{2+2}{2} = 2$

$20/2 = 10 \Rightarrow 10^{\circ}$ lugar $\Rightarrow 10^{\circ}$ y 11° lugar $\Rightarrow$

$\Rightarrow Q_2 = \dfrac{3+3}{2} = 3$

$20 \cdot (3/4) = 15 \Rightarrow 15^{\circ}$ lugar $\Rightarrow 15^{\circ}$ y 16° lugar $\Rightarrow$

$\Rightarrow Q_3 = \dfrac{5+5}{2} = 5$

13. Calcula la mediana y el percentil P_{10} de los siguientes datos:

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	2	10	14	7	4	3

Solución:

x_i	n_i	N_i	$N_i(\%)$
1	2	2	5,0
2	10	12	30,0
3	14	26	65,0
4	7	33	82,5
5	4	37	92,5
6	**3**	**40**	**100,0**

Mediana:

$P_{50} = 3$ porque para $x = 3$

$N_3 = 65\% > 50\%$

Percentil:

$P_{10} = 2$ porque para $x = 2$

$N_2 = 30\% > 10\%$

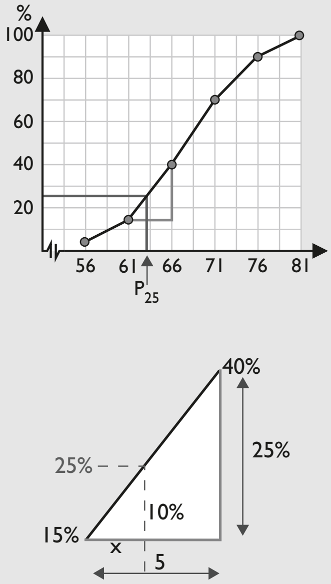
14. Calcula los percentiles P_{25} y P_{50} en la siguiente distribución de pesos:

Peso (kg)	Nº de personas
51 a 56	2
56 a 61	4
61 a 66	10
66 a 71	12
71 a 76	8
76 a 81	4

Solución:

Peso(kg)	Extremo	n_i	N_i	$N_i(\%)$
51 a 56	56	2	2	5
56 a 61	61	4	6	15
61 a 66	66	10	16	40
66 a 71	71	12	28	70
71 a 76	76	8	36	90
76 a 81	81	4	40	100

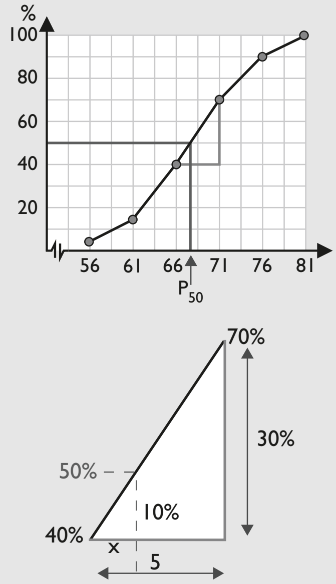
a) El P_{25} se alcanza en el intervalo: 61 - 66



$5/25 = x/10 \Rightarrow x = 2$

El $P_{25} = 61 + 2 = 63$

b) El P_{50} se alcanza en el intervalo: 66 - 71



$5/30 = x/10 \Rightarrow x = 1,67$

El $P_{50} = 66 + 1,67 = 67,67$

1. Datos y tablas de frecuencias

15. Un equipo de baloncesto ha conseguido los siguientes puntos:

78, 78, 78, 80, 80, 80, 80, 80, 85, 85, 85, 85, 85, 94, 94, 94, 94, 100, 100, 100

a) Clasifica el carácter estudiado.

b) Haz la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Solución:

a) Tiene un carácter cuantitativo discreto.

b) Tabla.

x_i	n_i	N_i	$N_i(\%)$	f_i	$f_i(\%)$	F_i
78	3	3	15	0,15	15	0,15
80	5	8	40	0,25	25	0,40
85	5	13	65	0,25	25	0,65
94	4	17	85	0,20	20	0,85
100	3	20	100	0,15	15	1,00
Total	**20**			**1,00**	**100**	

16. Las edades de los empleados de una empresa son:

27	37	24	27	29	36	25	28	34	39
34	24	31	24	32	31	35	27	30	28
35	31	24	26	32	38	34	26	29	32
23	28	36	37	35	28	31	33	29	24

a) Clasifica el carácter estudiado.

b) Agrupa los datos en 6 intervalos.

c) Haz la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Solución:

a) Carácter cuantitativo continuo.

b) Recorrido:

$$39 - 23 = 16$$

Número de intervalos: 6

Longitud de cada intervalo:

$$18 : 6 = 3$$

Extremo inferior del primer intervalo:

$$(18 - 16) : 2 = 1 \Rightarrow 23 - 1 = 22$$

c) Tabla.

	x_i	n_i	N_i	$N_i(\%)$	f_i	$f_i(\%)$	F_i
22 - 25	23,5	6	6	15	0,15	15	0,15
25 - 28	26,5	6	12	30	0,15	15	0,30
28 - 31	29,5	8	20	50	0,20	20	0,50
31 - 34	32,5	8	28	70	0,20	20	0,70
34 - 37	35,5	8	36	90	0,20	20	0,90
37 - 40	38,5	4	40	100	0,10	10	1,00
Total		**40**			**1,00**	**100**	

17. Las calificaciones de un grupo de alumnos en una prueba son:

1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3; 4; 4; 4; 4,5; 4,5; 5; 5; 5; 5; 5; 5,5; 5,5; 6; 6;6,5; 7; 7; 8; 9

a) Clasifica el carácter estudiado.

b) Agrupa los datos en 5 intervalos.

c) Haz la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Solución:

a) Carácter cuantitativo continuo.

b) Recorrido = 9 – 1 = 8

Número de intervalos: 5

Longitud de cada intervalo: 10 : 5 = 2

Extremo inferior del primer intervalo:

$(10 - 8) : 2 = 1 \Rightarrow 1 - 1 = 0$

c) Tabla.

	x_i	n_i	N_i	$N_i(\%)$	f_i	$f_i(\%)$	F_i
0 - 2	1	2	2	8	0,08	8	0,08
2 - 4	3	4	6	24	0,16	16	0,24
4 - 6	5	12	18	72	0,48	48	0,72
6 - 8	7	5	23	92	0,20	20	0,92
8 - 10	9	2	25	100	0,08	8	1,00
Total		**25**			**1,00**	**100**	

18. Las estaturas en centímetros de un grupo de personas son:

167, 185, 182, 170, 172, 164, 184, 168, 185, 175, 180, 175, 180, 184, 170, 175, 180, 168, 174, 183, 175, 183, 175, 191, 170, 163, 185, 180, 190, 190

a) Clasifica el carácter estudiado.

b) Agrupa los datos en 5 intervalos.

c) Haz la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Solución:

a) Carácter cuantitativo continuo.

b) Recorrido = 191 – 163 = 28

Número de intervalos: 5

Longitud de cada intervalo: 30 : 5 = 6

Extremo inferior del primer intervalo:

$(30 - 28) : 2 = 1 \Rightarrow 163 - 1 = 162$

c) Tabla.

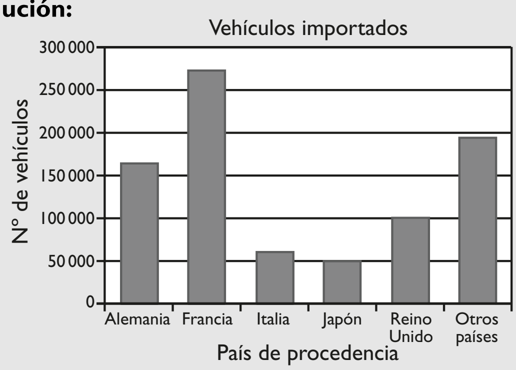
	x_i	n_i	N_i	$N_i(\%)$	f_i	$f_i(\%)$	F_i
162 - 168	165	3	3	10	0,1	10	0,1
168 - 174	171	6	9	30	0,2	20	0,3
174 - 180	177	6	15	50	0,2	20	0,5
180 - 186	183	12	27	90	0,4	40	0,9
186 - 192	189	3	30	100	0,1	10	1,0
Total		**30**			**1,00**	**100**	

2. Gráficos estadísticos

19. La siguiente tabla recoge los vehículos importados en un año según el país de procedencia. Representa los datos en un diagrama de barras.

País	Nº de vehículos
Alemania	165 000
Francia	275 000
Italia	60 000
Japón	50 000
Reino Unido	100 000
Otros países	195 000

Solución:



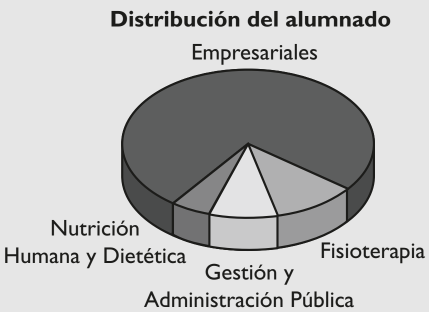
20. La siguiente tabla recoge el número de alumnos matriculados en los siguientes estudios:

Estudios	Nº de alumnos
Empresariales	82 500
Fisioterapia	11 000
Gestión y Administración Pública	11 000
Nutrición Humana y Dietética	5 500

Representa los datos en un diagrama de sectores.

Solución:

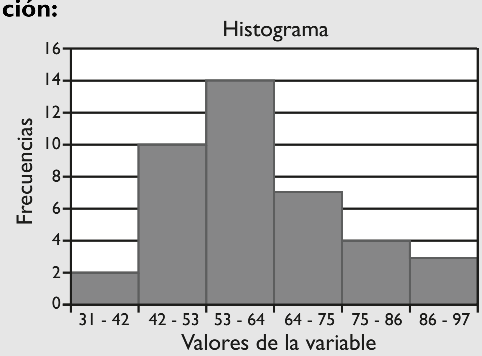
Estudios	n_i	f_i	Amplitud
Empresariales	82 500	0,75	270°
Fisioterapia	11 000	0,10	36°
Gestión y Administración Pública	11 000	0,10	36°
Nutrición Humana y Dietética	5 500	0,05	18°



21. Haz un histograma para la siguiente distribución de datos:

x_i	n_i
31-42	2
42-53	10
53-64	14
64-75	7
75-86	4
86-97	3

Solución:

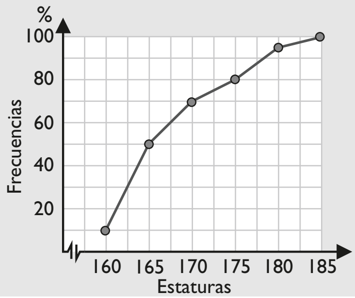


22. Haz un polígono de frecuencias acumuladas de la siguiente distribución de estaturas:

Estaturas	Frecuencias
155-160	10
160-165	40
165-170	20
170-175	10
175-180	15
180-185	5

Solución:

Estaturas	Extremo	n_i	N_i	%
155 - 160	160	10	10	10
160 - 165	165	40	50	50
165 - 170	170	20	70	70
170 - 175	175	10	80	80
175 - 180	180	15	95	95
180 - 185	185	5	100	100
		100		



3. Parámetros estadísticos

23. La puntuación obtenida por un equipo de baloncesto en los últimos partidos ha sido:

Puntuación	Nº de partidos
75	2
79	5
80	9
85	4
92	3
102	2

Calcula:

a) la media.

b) la desviación típica.

c) el coeficiente de variación.

Solución:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
75	2	150	11 250
79	5	395	31 205
80	9	720	57 600
85	4	340	28 900
92	3	276	25 392
102	2	204	20 808
Total	**25**	**2 085**	**175 155**

Media: $\overline{x} = 2\,085/25 = 83{,}4$

Varianza: $V = 175\,155/25 - 83{,}4^2 = 50{,}64$

$\sigma = \sqrt{50{,}64} = 7{,}12$

CV = 7,12/83,4 = 0,09 = 9% < 30% ⇒ Hay poca dispersión en los datos.

24. La temperatura media máxima mensual registrada en una ciudad ha sido:

Mes	Temperatura (°C)
Enero	16
Febrero	14
Marzo	22
Abril	25
Mayo	27
Junio	28
Julio	32
Agosto	30
Septiembre	26
Octubre	19
Noviembre	16
Diciembre	14

Calcula:

a) la temperatura media anual.

b) la desviación típica.

c) el coeficiente de variación.

Solución:

Mes	Temperatura (x_i)	x_i^2
Enero	16	256
Febrero	14	196
Marzo	22	484
Abril	25	625
Mayo	27	729
Junio	28	784
Julio	32	1 024
Agosto	30	900
Septiembre	26	676
Octubre	19	361
Noviembre	16	256
Diciembre	14	196
Total	**269**	**6 487**

Media: $\overline{x} = 269/12 = 22{,}42$ °C

Varianza: $V = 6487/12 - 22{,}42^2 = 37{,}93$

$\sigma = \sqrt{37{,}93} = 6{,}16$

CV = 6,16/22,42 = 0,27 = 27% < 30% ⇒ Hay poca dispersión en los datos.

25. Dos jugadores de baloncesto, A y B, consiguen encestar tiros de tres puntos por partido según la distribución siguiente:

Encestes	Jugador A	Jugador B
1	1	8
2	3	1
3	13	0
4	2	1
5	1	10

Compara los coeficientes de variación de cada jugador.

Solución:

Distribución del jugador A:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
1	1	1	1
2	3	6	12
3	13	39	117
4	2	8	32
5	1	5	25
Total	**20**	**59**	**187**

Media: $\overline{x} = 59/20 = 2,95$ encestes.

Varianza: $V = 187/20 - 2,95^2 = 0,65$

$\sigma = \sqrt{0,65} = 0,8$

$CV = 0,8/2,95 = 0,27 = 27\% < 30\%$

Distribución del jugador B:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
1	8	8	8
2	1	2	4
3	0	0	0
4	1	4	16
5	10	50	250
	20	**64**	**278**

Media: $\overline{x} = 64/20 = 3,2$ encestes.

Varianza: $V = 278/20 - 3,2^2 = 3,66$

$\sigma = \sqrt{3,66} = 1,91$

$CV = 1,91/3,2 = 0,60 = 60\%$

El jugador B tiene más del doble de dispersión que el jugador A.

4. Medidas de posición

26. Calcula el primer cuartil, el decil D_1 y el percentil P_{50} en el conjunto de datos siguientes:

3	5	4	3	4
6	5	3	3	2
6	1	4	5	4
2	2	3	5	2

Solución:

a) Se ordenan los datos:

1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6

N = 20

b) $20 \cdot (25/100) = 5 \Rightarrow 5°$ lugar $\Rightarrow 5°$ y $6°$ lugar $\Rightarrow$

$\Rightarrow Q_1 = P_{25} = \dfrac{2+3}{2} = 2,5$

$20 \cdot (10/100) = 2 \Rightarrow 2°$ lugar $\Rightarrow 2°$ y $3°$ lugar $\Rightarrow$

$\Rightarrow D_1 = P_{10} = \dfrac{2+2}{2} = 2$

$20 \cdot (50/100) = 10 \Rightarrow 10°$ lugar $\Rightarrow 10°$ y $11°$ lugar $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_{50} = \dfrac{3+4}{2} = 3,5$

27. Calcula los tres primeros cuartiles en la siguiente tabla de frecuencias:

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	4	12	14	8	7	5

Solución:

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	4	12	14	8	7	5
N_i	4	16	30	38	45	50
%	8	32	60	76	90	100

Cuartil inferior:

$Q_1 = P_{25} = 2$ porque para $x = 2$

$N_2 = 32\% > 25\%$

Segundo cuartil:

$Q_2 = P_{50} = 3$ porque para $x = 3$

$N_3 = 60\% > 50\%$

Cuartil superior:

$Q_3 = P_{75} = 4$ porque para $x = 4$

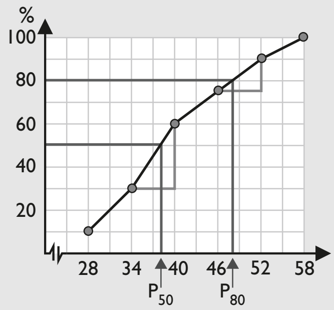
$N_4 = 76\% > 75\%$

28. Calcula la mediana y el percentil P_{80} en la siguiente distribución:

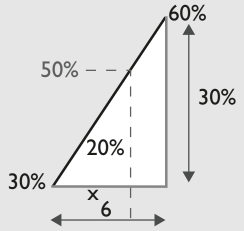
x_i	n_i
22 a 28	8
28 a 34	16
34 a 40	24
40 a 46	12
46 a 52	12
52 a 58	8

Solución:

x_i	Extremo	n_i	N_i	N_i (%)
22 a 28	28	8	8	10
28 a 34	34	16	24	30
34 a 40	40	24	48	60
40 a 46	46	12	60	75
46 a 52	52	12	72	90
52 a 58	58	8	80	100



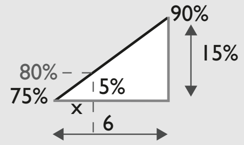
a) La mediana es el P_{50} que se alcanza en el intervalo 34-40:



$6/30 = x/20 \Rightarrow x = 4$

$P_{50} = 34 + 4 = 38$

b) El percentil P_{80} se alcanza en el intervalo 46-52:



$6/15 = x/5 \Rightarrow x = 2$

$P_{80} = 46 + 2 = 48$

Para ampliar

29. En un estudio se han obtenido los siguientes resultados:

Completa la tabla con las frecuencias relativas.

x_i	n_i
2	8
4	12
7	20
8	10

Solución:

x_i	n_i	f_i
2	8	0,16
4	12	0,24
7	20	0,40
8	10	0,20
Total	**50**	**1,00**

30. El número de veces que han ido al cine en el último mes un grupo de personas es:

1, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 3, 4, 1, 1, 1, 3, 4, 1, 2, 2, 0, 3, 1, 0, 1, 0, 1, 3, 2, 1, 3, 1, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1

a) Clasifica el carácter estudiado.

b) Haz la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

Solución:

a) Carácter cuantitativo discreto.

b) Tabla.

x_i	n_i	N_i	$N_i(\%)$	f_i	$f_i(\%)$	F_i
0	4	4	10	0,10	10	0,10
1	12	16	40	0,30	30	0,40
2	16	32	80	0,40	40	0,80
3	6	38	95	0,15	15	0,95
4	2	40	100	0,05	5	1,00
Total	**40**			**1,00**	**100**	

31. En una muestra de estudiantes de Bachillerato se ha recogido la siguiente distribución para cuatro opciones diferentes:

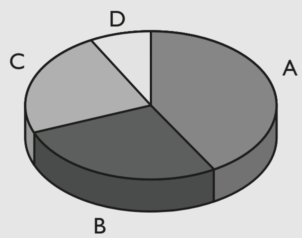
Opciones	**A**	**B**	**C**	**D**
Nº de estudiantes	64	48	32	16

Representa los datos en un diagrama de sectores.

Solución:

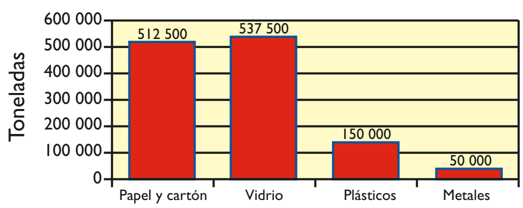
Opción	n_i	f_i	Amplitud
A	64	0,4	0,4 · 360° = 144°
B	48	0,3	0,3 · 360° = 108°
C	32	0,2	0,2 · 360° = 72°
D	16	0,1	0,1 · 360° = 36°
Total	**160**	**1,0**	**360°**

Distribución del alumnado por opción



32. Las toneladas de residuos recogidos de los hogares en el último año se han representado en el siguiente diagrama. Haz la tabla de frecuencias correspondiente.

Residuos recogidos de los hogares



Solución:

Residuo	Toneladas	f_i	%
Papel y cartón	512 500	0,41	41
Vidrio	537 500	0,43	43
Plásticos	150 000	0,12	12
Metales	50 000	0,04	4
Total	**1 250 000**	**1,00**	**100**

33. Las medidas de tórax de una muestra de varones se distribuyen así:

Medida (cm)	Nº de personas
79,5-85,5	4
85,5-91,5	8
91,5-97,5	12
97,5-103,5	20
103,5-109,5	9
109,5-115,5	5
115,5-121,5	2

Calcula:

a) la medida media del tórax.

b) la desviación típica.

c) el coeficiente de variación.

Solución:

Medida (cm)	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
79,5 - 85,5	82,5	4	330,0	27 225,00
85,5 - 91,5	88,5	8	708,0	62 658,00
91,5 - 97,5	94,5	12	1 134,0	107 163,00
97,5 - 103,5	100,5	20	2 010,0	202 005,00
103,5 - 109,5	106,5	9	958,5	102 080,25
109,5 - 115,5	112,5	5	562,5	63 281,25
115,5 - 121,5	118,5	2	237,0	28 084,50
	Total	**60**	**5 940,0**	**592 497,00**

a) Media: $\overline{x}$ = 5 940/60 = 99 cm

b) Varianza: V = 592 497/60 – 99^2 = 73,95

$\sigma = \sqrt{73,95} = 8,6$

c) CV = 8,6/99 = 0,09 = 9% < 30%

34. En una consulta médica la distribución de pacientes por su edad ha sido, en la última semana, la siguiente:

Edad	Nº de pacientes
15-23	3
23-31	4
31-39	5
39-47	8
47-55	10
55-63	12
63-71	15
71-79	12
79-87	6

Calcula:

a) la edad media de los pacientes.

b) la desviación típica.

c) el coeficiente de variación.

Solución:

Intervalo (edad)	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
15 - 23	19	3	57	1 083
23 - 31	27	4	108	2 916
31 - 39	35	5	175	6 125
39 - 47	43	8	344	14 792
47 - 55	51	10	510	26 010
55 - 63	59	12	708	41 772
63 - 71	67	15	1 005	67 335
71 - 79	75	12	900	67 500
79 - 87	83	6	498	41 334
	Total	**75**	**4 305**	**268 867**

a) Media: $\overline{x}$ = 4 305/75 = 57,4 años.

b) Varianza: V = 268 867/75 – $57,4^2$ = 290,13

$\sigma = \sqrt{290,13} = 17,03$

c) CV = 17,03/57,4 = 0,30 = 30%

35. Calcula los percentiles P_{10}, P_{50} y P_{75} de los siguientes datos:

27, 37, 24, 27, 29, 26, 34, 24, 31, 24, 32, 31, 35, 31, 24, 26, 32, 38, 23, 28, 36, 37, 35, 28

Solución:

a) Se ordenan los datos:

23, 24, 24, 24, 24, 26, 26, 27, 27, 28, 28, 29, 31, 31, 31, 32, 32, 34, 35, 35, 36, 37, 37, 38

N = 24

b) 24 · (10 : 100) = 2,4 ⇒ 3º lugar ⇒ P_{10} = 24

24 · (50 : 100) = 12 ⇒ 12º lugar ⇒ 12º y 13º lugar ⇒

$\Rightarrow P_{50} = \dfrac{29 + 31}{2} = 30$

$24 \cdot (75 : 100) = 18 \Rightarrow 18^{\circ}$ lugar $\Rightarrow 18^{\circ}$ y 19° lugar $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_{75} = \dfrac{34 + 35}{2} = 34{,}5$

36. Calcula la mediana y el percentil P_{75} en la siguiente tabla de frecuencias:

x_i	n_i
20	6
21	5
22	10
23	8
24	12
25	9

Solución:

x_i	n_i	N_i	%
20	6	6	12
21	5	11	22
22	10	21	42
23	8	29	58
24	12	41	82
25	9	50	100

Mediana:

$P_{50} = 23$ porque para $x = 23$

$N_4 = 58\% > 50\%$

$P_{75} = 24$ porque para $x = 24$

$N_5 = 82\% > 75\%$

Problemas

37. Completa los datos que faltan en la siguiente tabla estadística:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	2	5		10	8		5	
N_i			16		34	41	46	
f_i	0,04		0,18	0,20				

Solución:

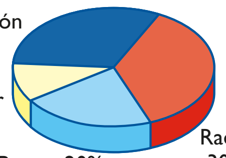
$N = 2 : 0{,}04 = 50$

x_i	n_i	N_i	f_i
1	2	2	0,04
2	5	5 + 2 = 7	5/50 = 0,10
3	16 – 7 = 9	16	0,18
4	10	16 + 10 = 26	0,20
5	8	34	8/50 = 0,16
6	41 – 34 = 7	41	7/50 = 0,14
7	5	46	5/50 = 0,10
8	50 – 46 = 4	50	4/50 = 0,08
Total	**50**		**1,00**

La tabla queda:

x_i	n_i	N_i	f_i
1	2	2	0,04
2	5	7	0,10
3	9	16	0,18
4	10	26	0,20
5	8	34	0,16
6	7	41	0,14
7	5	46	0,10
8	4	50	0,08
Total	**50**		**1,00**

38. El siguiente diagrama recoge la inversión en publicidad que realiza la empresa EMP al año. Interpreta el gráfico y haz la tabla de frecuencias correspondiente.



Solución:

Como los datos están en porcentaje, se hace la tabla para $N = 100$

Medio	Gasto en publicidad
Televisión	40
Radio	30
Prensa	20
Exterior	10
Total	**100**

Entre televisión y radio, que son los dos medios que más ve y escucha la gente, se invierte un 70%.

En prensa, un 20%, ya que la gente compra menos el periódico, y un 10% para publicidad exterior.

39. En la tabla adjunta se recoge la distribución de cargas máximas en toneladas que soportan los cables producidos en una fábrica:

Carga	Nº de cables
9-9,5	2
9,5-10	5
10-10,5	12
10,5-11	17
11-11,5	14
11,5-12	6
12-12,5	3
12,5-13	1

Calcula:

a) la carga máxima media de los cables.

b) la desviación típica.

c) el coeficiente de variación.

Solución:

Carga	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
9 - 9,5	9,25	2	18,50	171,13
9,5 - 10	9,75	5	48,75	475,31
10 - 10,5	10,25	12	123,00	1 260,75
10,5 - 11	10,75	17	182,75	1 964,56
11 - 11,5	11,25	14	157,50	1 771,88
11,5 - 12	11,75	6	70,50	828,38
12 - 12,5	12,25	3	36,75	450,19
12,5 - 13	12,75	1	12,75	162,56
	Total	**60**	**650,50**	**7 084,76**

a) Media: $\overline{x}$ = 650,5/60 = 10,84 toneladas.

b) Varianza: V = 7084,76/60 – 10,84^2 = 0,54

$\sigma = \sqrt{0,54} = 0,73$

c) CV = 0,73/10,84 = 0,07 = 7% < 30%

40. En un examen final de estadística la puntuación media de 40 estudiantes fue 7,8, y la desviación típica, 0,8. En un examen de álgebra la puntuación media fue 7,6, y la desviación típica, 0,7. ¿En qué examen fue mayor el porcentaje de dispersión relativa?

Solución:

Examen	Media	σ	CV
Estadística	7,8	0,8	0,8/7,8 = 0,10 = 10%
Álgebra	7,6	0,7	0,7/7,6 = 0,09 = 9%

En el examen de estadística hay un 1% más de dispersión.

41. La vida media de unas válvulas medida en horas fabricadas por dos empresas, A y B, se distribuye así:

Vida media (h)	Nº válculas Empresa A	Nº válculas Empresa B
300 a 400	12	90
400 a 500	45	65
500 a 600	58	45
600 a 700	75	8
700 a 800	70	7
800 a 900	65	20
900 a 1000	50	70
1000 a 1100	25	95

Compara la desviación de cada empresa.

Solución:

Empresa A:

Vida media(h)	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
300 a 400	350	12	4 200	1 470 000
400 a 500	450	45	20 250	9 112 500
500 a 600	550	58	31 900	17 545 000
600 a 700	650	75	48 750	31 687 500
700 a 800	750	70	52 500	39 375 000
800 a 900	850	65	55 250	46 962 500
900 a 1 000	950	50	47 500	45 125 000
1000 a 1 100	1 050	25	26 250	27 562 500
Total		**400**	**286 600**	**218 840 000**

Media: $\overline{x}$ = 286 600/400 = 716,5 horas.

Varianza:

V = 218 840 000/400 – 716,5^2 = 33 727,75

$\sigma = \sqrt{33\,727,75} = 183,65$

CV = 183,65/716,5 = 0,26 = 26% < 30%

Empresa B:

Vida media(h)	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
300 a 400	350	90	31 500	11 025 000
400 a 500	450	65	29 250	13 162 500
500 a 600	550	45	24 750	13 612 500
600 a 700	650	8	5 200	3 380 000
700 a 800	750	7	5 250	3 937 500
800 a 900	850	20	17 000	14 450 000
900 a 1 000	950	70	66 500	63 175 000
1000 a 1 100	1 050	95	99 750	104 737 500
Total		**400**	**279 200**	**227 480 000**

Media: $\overline{x}$ = 279 200/400 = 698 horas.

Varianza:

V = 227 480 000/400 – 698^2 = 81496

$\sigma = \sqrt{81\,496} = 285,48$

CV = 285,48/698 = 0,41 = 41% > 30%

42. En un hospital se ha seleccionado una muestra de 12 pacientes que ingresaron en urgencias y permanecieron hospitalizados los siguientes días:

3, 7, 5, 8, 3, 2, 5, 7, 5, 3, 5, 4

Calcula:

a) la media.

b) la desviación típica.

c) el coeficiente de variación.

d) el primer y segundo cuartil.

Solución:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$	N_i	%
2	1	2	4	1	8,33
3	3	9	27	4	33,33
4	1	4	16	5	41,67
5	4	20	100	9	75,00
7	2	14	98	11	91,67
8	1	8	64	12	100,00
Total	**12**	**57**	**309**		

a) Media: $\overline{x} = 57/12 = 4,75$ días.

b) Varianza: $V = 309/12 - 4,75^2 = 3,19$

$\sigma = \sqrt{3,19} = 1,79$

c) $CV = 1,79/4,75 = 0,38 = 38\%$

d) Cuartil inferior:

$Q_1 = P_{25} = 3$ porque para x = 3

$N_2 = 33,33\% > 25\%$

Mediana:

$P_{50} = 5$ porque para x = 5

$N_4 = 75\% > 50\%$

43. En los últimos 400 partidos de las ligas escolares se ha conseguido el siguiente número de goles:

Nº de goles	Nº de partidos
0	20
1	40
2	60
3	100
4	80
5	60
6	28
7	12

Calcula:

a) la media de goles por partido.

b) la desviación típica.

c) el coeficiente de variación.

d) los tres primeros cuartiles.

Solución:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$	N_i	%
0	20	0	0	20	5
1	40	40	40	60	15
2	60	120	240	120	30
3	100	300	900	220	55
4	80	320	1 280	300	75
5	60	300	1 500	360	90
6	28	168	1 008	388	97
7	12	84	588	400	100
Total	**400**	**1 332**	**5 556**		

a) Media: $\overline{x} = 1\,332/400 = 3,33$ goles.

b) Varianza: $V = 5\,556/400 - 3,33^2 = 2,8$

$\sigma = \sqrt{2,8} = 1,67$

c) $CV = 1,67/3,33 = 0,50 = 50\%$

d) Cuartil inferior:

$Q_1 = P_{25} = 2$ porque para x = 2

$N_3 = 30\% > 25\%$

Mediana:

$P_{50} = 3$ porque para x = 3

$N_4 = 55\% > 50\%$

Cuartil superior:

$P_{75} = 4,5$ porque para x = 4

$N_5 = 75\%$.

El valor 4,5 deja el 75% de los valores por debajo y el 25% por arriba.

Para profundizar

44. Si se tienen 10 datos cuya media es 6 y se añaden los valores 11 y 7, ¿cuál es la nueva media?

Solución:

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ diez datos cuya media es 6; es decir:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_{10}}{10} = 6 \Rightarrow x_1 + \ldots + x_{10} = 60$$

Entonces:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_{10} + 11 + 7}{12} = \frac{60 + 11 + 7}{12} = 6,5$$

45. Escribe una distribución con media 2 y desviación típica cero.

Solución:

Los datos: 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2

46. Si en un conjunto de datos, éstos se multiplican por 3, ¿cómo cambian la media y la desviación típica?

Solución:

La media y la desviación típica quedan multiplicadas por 3

Sean los datos: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$\overline{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{n}$, $V = \dfrac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n}$

$\sigma = \sqrt{V}$

Sean los datos: $3x_1, 3x_2, \ldots, 3x_n$

Media $= \dfrac{\Sigma 3x_i}{n} = \dfrac{3\Sigma x_i}{n} = 3\overline{x}$

Varianza $= \dfrac{\Sigma(3x_i - 3\overline{x})^2}{n} = \dfrac{9\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n} = 9V$

Desviación típica $= \sqrt{9V} = 3\sqrt{V} = 3\sigma$

47. El precio de un ordenador está en un percentil 40. ¿Está caro o barato?

Solución:

Está un 10% por debajo de la mediana; es decir, un 10% por debajo del 50% de los precios.

48. Explica qué significa que la estatura de un bebé está en un percentil 60.

Solución:

Ese bebé mide un 10% más que el 50% de los bebés de su edad.

Paso a paso

49. Estudia la distribución del color de un determinado modelo de coche.

1	Color de coches	
2	Carácter cualitativo	
3	Variables	Frecuencias
4	x_i	n_i
5	Rojo	20
6	Blanco	30
7	Gris	40
8	Azul	10
9	Total	
10	Parámetros de centralización	
11	Moda	

Obtén las medidas de centralización y dispersión que tengan sentido. Haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

50. Estudia la distribución del número de hijos de 40 familias.

1	Índice de natalidad					
2	Carácter cuantitativo discreto					
3	Variables	Frecuencias				
4	x_i	n_i	N_i(%)	$x_i * n_i$	x_i^2	x_i^2* n_i
5	0	6				
6	1	14				
7	2	10				
8	3	7				
9	4	3				
10	Total					
11	Parámetros de centralización					
12	Moda					
13	Mediana					
14	Media					
15	Parámetros de dispersión					
16	Variaza					
17	Desviación típica					
18	Coeficiente de variación					

Obtén las medidas de centralización y dispersión que tengan sentido. Halla el percentil del 91%. Haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

51. Estudia la distribución de las estaturas de las personas de la siguiente tabla.

Estatura	Marca de clase	Frecuencias
Intervalo	x_i	n_i
152 - 160	156	5
160 - 168	164	18
168 - 176	172	42
176 - 184	180	27
184 - 192	188	8

Obtén las medidas de centralización y dispersión que tengan sentido. Halla el tercer cuartil. Haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

52. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es,** elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

53. Estudia la distribución de la temperatura media de una ciudad.

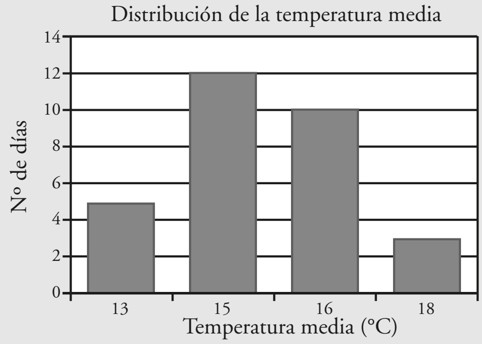
Temperaturas: x_i (°C)	13	15	16	18
Frecuencias	5	12	10	3

Obtén las medidas de centralización y de dispersión que tengan sentido. Halla el primer cuartil. Haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

Solución:
Carácter: cuantitativo discreto.

Temperatura media de una ciudad					
x_i (°C)	n_i	N_i	Ni(%)	xi * ni	xi^2 *ni
13	5	5	16,67	65	845
15	12	17	56,67	180	2 700
16	10	27	90,00	160	2 560
18	3	30	100,00	54	972
Total	**30**			**459**	**7 077**

Parámetros de centralización	
Mediana	15
Moda	15
Media	15,3
Parámetros de dispersión	
Varianza	1,81
DT	1,35
CV	0,09
Parámetros de posición	
1er cuartil	15



Interpretación:

La media está en 15,3 °C. La dispersión es pequeña, 0,09 < 0,30

54. Estudia la siguiente distribución de estaturas.

x_i	150-155	155-160	160-165	165-170	170-175
n_i	1	11	13	6	4

Obtén las medidas de centralización y de dispersión que tengan sentido. Halla el séptimo decil. Haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

Solución:

Carácter: cuantitativo continuo.

Distribución de estaturas					
Intervalo	**x_i**	**n_i**	**Ni(%)**	**xi * ni**	**xi^2 *ni**
150 - 155	152,5	1	2,86	152,5	23 256,25
155 - 160	157,5	11	34,29	1732,5	272 868,75
160 - 165	162,5	13	71,43	2 112,5	343 281,25
165 - 170	167,5	6	88,57	1 005,0	168 337,50
170 - 175	172,5	4	100,00	690,0	119 025,00
Total		**35**		**5 692,5**	**926 768,75**

Parámetros de centralización	
Moda	162,5
Media	162,64
Parámetros de dispersión	
Varianza	26,41
DT	5,14
CV	0,03

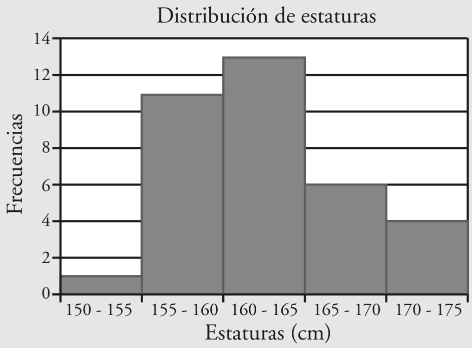
Percentiles:

Séptimo decil = Percentil 70

Cálculo del percentil				
Valor de k	70	**Valor del percentil =**		**164,81**
	Intervalo			Incógnita
	Extremo inferior	Extremo superior	Diferencia	Desde el extremo inferior
Valor	160	165,00	5,00	x
%	34,29	71,43	37,14	35,71
			Valor x =	4,81

Mediana = Percentil 50

Cálculo del percentil				
Valor de k	50	**Valor del percentil =**		**162,11**
	Intervalo			Incógnita
	Extremo inferior	Extremo superior	Diferencia	Desde el extremo inferior
Valor	160	165,00	5,00	x
%	34,29	71,43	37,14	15,71
			Valor x =	2,11



Interpretación:

La media es 162,64 y los datos están muy agrupados; 0,03 < 0,30

55. En una encuesta sobre el funcionamiento de un servidor de Internet se han recogido las siguientes respuestas:

x_i	Muy mal	Mal	Normal	Bien	Muy bien
n_i	20	30	10	25	15

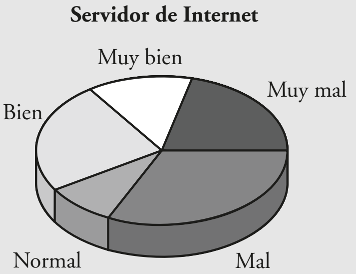
Obtén las medidas de centralización y de dispersión que tengan sentido. Haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

Solución:

Carácter: cualitativo.

Intervalo	x_i
Muy mal	20
Mal	30
Normal	10
Bien	25
Muy bien	15
Total	**100**

Solo tiene sentido calcular la moda que es: Mal.



Interpretación:

Mas de la mitad de los usuarios opina que es mala.

56. Dos empresas A y B distribuyen los sueldos de sus empleados según la siguiente tabla. Haz un estudio estadístico de cada una de ellas. ¿Cuál de las dos tiene mayor dispersión?

Salario (€)	Frecuencias A	Frecuencias B
x_i	n_i	n_i
360-600	2	14
600-840	4	3
840-1 080	7	2
1 080-1 320	18	1
1 320-1 560	5	3
1 560-1 800	3	4
1 800-2 040	1	13

Solución:

Carácter: cuantitativo continuo.

Salarios de la empresa A					
Intervalo	x_i	n_i	Ni(%)	xi * ni	xi^2 *ni
360 - 600	480	2	5,00	960	460 800
600 - 840	720	4	15,00	2 880	2 073 600
840 - 1 080	960	7	32,50	6 720	6 451 200
1 080 - 1 320	1 200	18	77,50	21 600	25 920 000
1 320 - 1 560	1 440	5	90,00	7 200	10 368 000
1 560 - 1 800	1 680	3	97,50	5 040	8 467 200
1 800 - 2 040	1 920	1	100,00	1 920	3 686 400
Total		**40**		**46 320**	**57 427 200**

Parámetros de centralización	
Media	1 158,00
Parámetros de dispersión	
Varianza	94 716,00
DT	307,76
CV	0,27

Salarios de la empresa B					
Intervalo	x_i	n_i	Ni(%)	xi * ni	xi^2 *ni
360 - 600	480	14	35	6 720	3 225 600
600 - 840	720	3	43	2 160	1 555 200
840 - 1 080	960	2	48	1 920	1 843 200
1 080 - 1 320	1 200	1	50	1 200	1 440 000
1 320 - 1 560	1 440	3	58	4 320	6 220 800
1 560 - 1 800	1 680	4	68	6 720	11 829 600
1 800 - 2 040	1 920	13	100	24 960	47 923 200
Total		**27**		**48 000**	**73 497 600**

Parámetros de centralización	
Media	1 200,00
Parámetros de dispersión	
Varianza	397 440,00
DT	630,43
CV	0,53

La empresa B tiene una dispersión de algo más del doble que la empresa A.

57. Estudia la siguiente distribución de pesos.

x_i	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80	80-85	85-90
n_i	3	5	8	12	5	4	3

Obtén las medidas de centralización y de dispersión que tengan sentido. Halla el tercer cuartil. Haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

Solución:

Carácter: cuantitativo continuo.

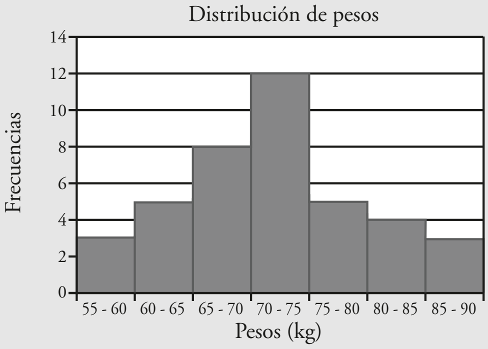
Distribución de pesos					
Intervalo	x_i	n_i	Ni(%)	xi * ni	xi^2 *ni
55-60	57,5	3	7,50	172,5	9 918,75
60-65	62,5	5	20,00	312,5	19 531,25
65-70	67,5	8	40,00	540,0	36 450,00
70-75	72,5	12	70,00	870,0	63 075,00
75-80	77,5	5	82,50	387,0	30 031,25
80-85	82,5	4	92,50	330,0	27 225,00
85-90	87,5	3	100,00	262,5	22 968,75
Total		**40**		**2 875**	**209 200**

Parámetros de centralización	
Mediana	71,67
Moda	72,5
Media	71,88
Parámetros de dispersión	
Varianza	63,98
DT	8,00
CV	0,11

Percentiles

El tercer cuartil o cuartil superior es el percentil 75

Cálculo del percentil				
Valor de k	75	Valor del percentil =		77,00
	Intervalo			Incógnita
	Extremo inferior	Extremo superior	Diferencia	Desde el extremo inferior
Valor	75	80,00	5,00	x
%	70	82,50	12,50	5
			Valor x =	2,00



Interpretación:

La media es 71,88 y los datos están muy agrupados, 0,10 < 0,30

58. El número de errores ortográficos cometidos por un grupo de estudiantes en una prueba ha sido:

Nº de errores	0	1	2	3	4
Nº de alumnos	6	7	5	5	2

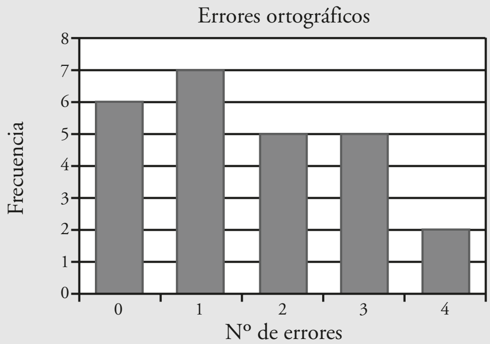
Obtén las medidas de centralización y de dispersión que tengan sentido. Halla el cuarto decil. Haz la representación gráfica más idónea. Interpreta los resultados.

Solución:

Carácter: cuantitativo discreto.

Distribución de errores ortográficos				
x_i	n_i	Ni(%)	xi * ni	xi^2 *ni
0	6	24,00	0	0
1	7	52,00	7	7
2	5	72,00	10	20
3	5	92,00	15	45
4	2	100,00	8	32
Total	**25**		**40**	**104**

Parámetros de centralización	
Mediana	1
Moda	1
Media	1,6
Parámetros de dispersión	
Varianza	1,6
DT	1,26
CV	0,79



Interpretación:

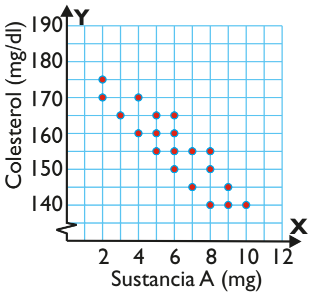
La media es 1,6 y los datos están poco agrupados, 0,79 > 0,30

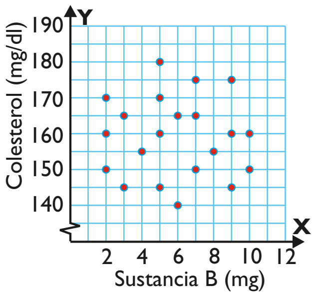
12 Estadística bidimensional

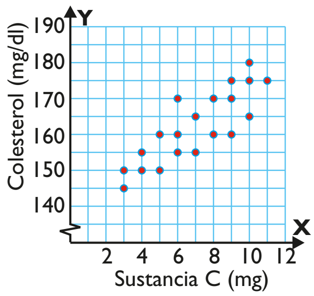
1. Distribuciones bidimensionales

Piensa y calcula

Se ha administrado una sustancia A, otra B y otra C a 20 individuos para estudiar su relación con los niveles de colesterol. Observando las gráficas, indica qué sustancia tiene mayor relación con la subida o bajada de colesterol.







Solución:

La A y la C. En la A, al aumentar la cantidad de sustancia baja el nivel del colesterol; y en la C, al aumentar la cantidad de sustancia, aumenta también la cantidad de colesterol.

Aplica la teoría

1. Las calificaciones de 30 estudiantes en dos exámenes han sido las siguientes:

1er Examen	4	5	6	7	7	9	10
2º Examen	5	5	7	6	7	8	10
Nº estudiantes	5	10	4	2	4	3	2

Haz la tabla de frecuencia de doble entrada.

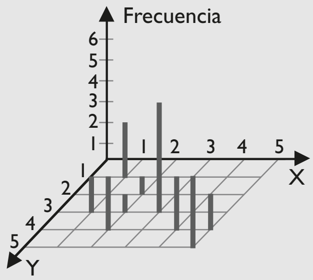
Solución:

Y \ X	4	5	6	7	9	10	
5	5	10	0	0	0	0	15
6	0	0	0	2	0	0	2
7	0	0	4	4	0	0	8
8	0	0	0	0	3	0	3
10	0	0	0	0	0	2	2
	5	10	4	6	3	2	30

2. Dibuja el diagrama de barras correspondiente a la siguiente distribución bidimensional:

Y \ X	1	2	3	4	5
1	3	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0
3	2	1	6	0	0
4	0	3	0	3	2
5	0	0	0	0	4

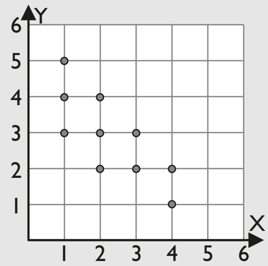
Solución:



3. Dibuja la nube de puntos de la siguiente distribución bidimensional:

X	2	1	4	2	1	3	4	2	3	1
Y	2	5	1	3	3	2	2	4	3	4

Solución:



2. Parámetros

Piensa y calcula

La siguiente distribución recoge las calificaciones de Matemáticas y de Lengua de un grupo de 6 alumnos. Calcula mentalmente la media de cada asignatura:

Matemáticas	2	3	5	5	6	9
Lengua	4	4	5	6	7	10

Solución:
Media de Matemáticas: 5 Media de Lengua: 6

Aplica la teoría

4. Calcula la covarianza de la siguiente distribución bidimensional:

x_i	8	7	6	5	7	8	6	5
y_i	5	4	7	4	3	6	5	5
n_i	2	4	3	5	3	4	2	2

Solución:
Covarianza = 783/25 – 6,48 · 4,80 = 0,22

5. Calcula la covarianza de la siguiente distribución bidimensional:

Y \ X	2	4	6	8
1	1	3	0	2
2	2	5	1	0
3	3	1	4	6
4	0	2	0	0

Solución:
Covarianza = 368/30 – 5 · 2,40 = 0,27

6. La siguiente tabla recoge la distribución de la cilindrada de un motor y la velocidad máxima que puede generar:

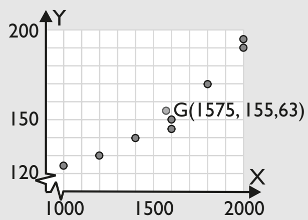
a) Representa la nube de puntos.

b) Representa el centro de gravedad.

c) Calcula e interpreta la covarianza.

Cilindrada (cm^3)	Velocidad (km/h)
1 000	125
1 200	130
1 400	140
1 600	145
1 600	150
1 800	170
2 000	190
2 000	195

Solución:
a) b)

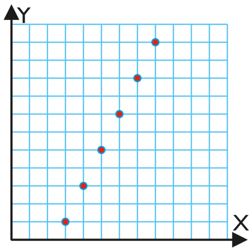


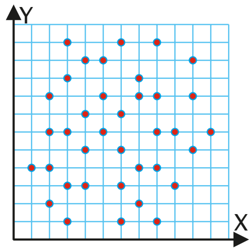
c) Covarianza = 2 025 000/8 – 1 575 · 155,63 = 8 015,63
La nube de puntos se orienta a la derecha y arriba.

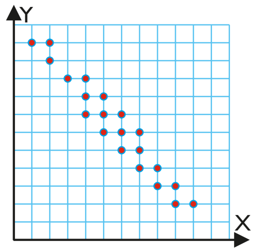
3. Correlación

Piensa y calcula

Indica el signo de la covarianza y si la relación entre las variables es funcional, fuerte o nula en los siguientes casos:







Solución:
En la 1ª, la covarianza es positiva y la relación es funcional; en la 2ª, la covarianza y la relación son nulas, y en la 3ª, la covarianza es negativa y la relación es fuerte.

Aplica la teoría

7. Calcula el coeficiente de correlación e indica el tipo de correlación para la siguiente distribución bidimensional:

x_i	1	4	4	2	5	3	1
y_i	5	2	3	6	3	2	4

Solución:
Coeficiente de correlación = –0,66
Correlación débil e inversa.

8. La temperatura media en los meses de invierno en varias ciudades y el gasto medio por habitante en calefacción han sido:

Temperatura (°C)	10	12	14	15	17	20
Gasto (€)	150	120	102	90	50	18

Calcula el coeficiente de correlación e interpreta el resultado.

Solución:
Coeficiente de correlación = –0,99
Correlación muy fuerte e inversa.
Es decir, cuando baja la temperatura se gasta mucho en calefacción.

9. Calcula el coeficiente de correlación e indica el tipo de correlación para la siguiente distribución bidimensional:

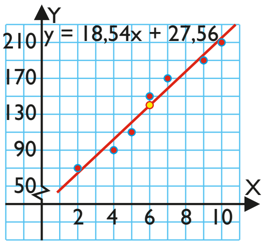
Y \ X	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	2	0	0
2	2	1	0	0
3	0	1	2	3
4	0	4	3	1

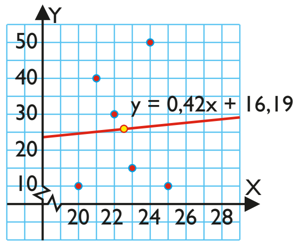
Solución:
Coeficiente de correlación = 0,45
Correlación débil y directa.

4. Regresión

Piensa y calcula

Se han ajustado las nubes de puntos adjuntas según las rectas dadas. Calcula el valor de **y** para x = 20 en la 1ª y x = 30 en la 2ª. ¿Qué estimación crees que es más fiable?





Solución:

En la 1ª, para x = 20 ⇒ y = 398,36

En la 2ª, para x = 30 ⇒ y = 28,79

La 1ª es más fiable, porque los datos están más relacionados.

Aplica la teoría

10. Calcula la recta de regresión de la siguiente distribución bidimensional:

X	1	2	3	4	5
Y	26	30	27	31	28

Solución:

y – 28,4 = 0,5(x – 3) ⇒ y = 0,5x + 26,9

11. Un laboratorio ha experimentado, en 6 pacientes, con un medicamento para bajar la temperatura de los enfermos, observado el tiempo que tarda en desaparecer, y ha obtenido los resultados siguientes:

Dosis (mg)	100	200	300	400	500	600
Tiempo (h)	4	3,5	3	2	2,5	1,5

Calcula la recta de regresión y estima el tiempo que tardaría en normalizarse la temperatura para 650 mg

Solución:

y – 2,75 = –0,0047(x – 350)

y = –0,0047x + 4,4

Para x = 650 ⇒ y = 1,35 horas.

12. En una empresa, la relación entre el número de piezas defectuosas que elaboran unos trabajadores y la antigüedad de éstos es:

Antigüedad	1	2	3	4	5	6
Nº piezas	7	8	6	4	3	2

a) Calcula la recta de regresión.

b) Estima el número de piezas defectuosas que haría un obrero con 7 años de antigüedad.

c) Estima el tiempo que llevaría trabajando un obrero si no hiciese piezas defectuosas.

Solución:

a) y – 5 = –1,2(x – 3,5)

y = –1,2x + 9,2

b) Para x = 7 ⇒ y = 0,8 piezas defectuosas.

c) Para y = 0 ⇒ x = 7,67 años.

1. Distribuciones bidimensionales

13. Haz la tabla de frecuencia de doble entrada de la siguiente distribución bidimensional:

X	14	16	16	17	17	19	20
Y	20	19	21	20	21	20	21
n_i	6	12	8	5	4	3	4

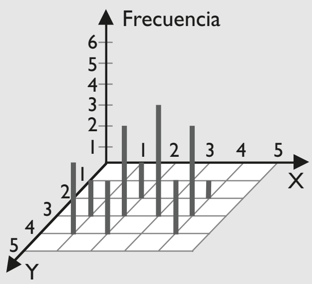
Solución:

Y \ X	14	16	17	19	20	
19	0	12	0	0	0	12
20	6	0	5	3	0	14
21	0	8	4	0	4	16
	6	20	9	3	4	42

14. Dibuja el diagrama de barras correspondiente a la siguiente distribución bidimensional:

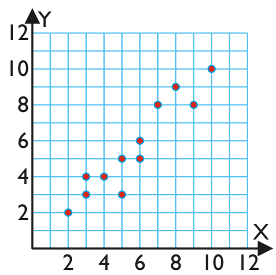
Y \ X	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	2	0	1
3	2	5	6	5
4	4	3	0	3

Solución:

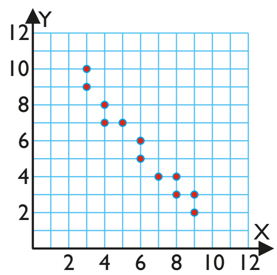


15. Haz la tabla de frecuencias de las siguientes nubes de puntos:

a)



b)



Solución:

a)

X	2	3	3	4	5	5	6	6	7	8	9	10
Y	2	3	4	4	3	5	5	6	8	9	8	10

b)

X	3	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9
Y	9	10	7	8	7	5	6	4	3	4	2	3

2. Parámetros

16. Calcula la covarianza de la siguiente distribución bidimensional:

x_i	5	7	4	5	7	8	4	6
y_i	11	11	10	10	12	11	9	10
n_i	2	4	3	3	4	2	3	5

Solución:

Covarianza = 1 608/26 – 5,81 · 10,50 = 0,87

17. Calcula la covarianza de la siguiente distribución bidimensional:

Y \ X	3	5	7	9	11
24	3	0	0	1	0
26	2	4	3	0	0
28	0	3	2	4	2
30	1	0	1	3	4

Solución:

Covarianza = 6 520/33 – 7,06 · 27,52 = 3,30

18. La siguiente tabla recoge el crecimiento de una planta según los gramos de abono que se le suministran. Abono (g): X; crecimiento (cm): Y

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	5	5	6	7	9	10	12	12

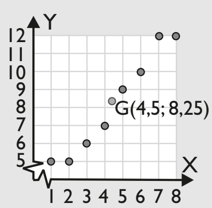
a) Representa la nube de puntos.

b) Representa el centro de gravedad.

c) Calcula e interpreta la covarianza.

Solución:

a) b)



c) Covarianza = 346/8 – 4,50 · 8,25 = 6,13

La nube de puntos se orienta a la derecha y arriba.

3. Correlación

19. Calcula el coeficiente de correlación e indica el tipo de correlación para la siguiente distribución bidimensional:

x_i	14	15	16	19	17	15
y_i	80	81	80	82	81	78

Solución:

Coeficiente de correlación = 0,65

La correlación es directa y débil.

20. La temperatura en grados y la presión atmosférica en milímetros en distintas ciudades son:

Temp. (°C)	12	13	14	17	15	13	16
Presión (mm)	800	805	803	810	805	800	810

Calcula el coeficiente de correlación e interpreta el resultado.

Solución:

Coeficiente de correlación = 0,91

La correlación es directa y fuerte.

21. Calcula el coeficiente de correlación e indica el tipo de correlación para la siguiente distribución bidimensional:

x_i	3	4	5	6	6	7	8	8	10
y_i	3	6	6	7	8	7	8	10	10
n_i	5	7	13	5	6	5	4	2	3

Solución:

Coeficiente de correlación = 0,90

La correlación es directa y fuerte.

4. Regresión

22. Calcula la recta de regresión de **y** sobre **x** de la siguiente distribución bidimensional:

X	2	4	6	7	8
Y	16	20	25	34	34

Calcula el valor de **y** para x = 9 y el valor de **x** para y = 30

Solución:

$y - 25,8 = 3,25(x - 5,4)$

$y = 3,25x + 8,25$

Para $x = 9 \Rightarrow y = 37,5$

Para $y = 30 \Rightarrow x = 6,69$

23. Calcula la recta de regresión de **y** sobre **x** de la siguiente distribución bidimensional:

Y \ X	0	1	2	3	4
0	5	2	0	0	0
1	1	8	6	7	0
2	2	5	10	10	0
3	0	1	4	6	2
4	0	0	6	0	0

Solución:

$y - 1,85 = 0,45(x - 1,93)$ $\qquad y = 0,45x + 0,98$

24. Las 10 últimas cotizaciones de dos empresas dedicadas a dar servicios por Internet han sido:

X	8,20	8,15	8,40	8,50	8,88	8,81	8,87	8,75	8,87	8,99
Y	4,80	4,83	4,90	4,88	4,95	4,96	4,88	4,80	4,85	4,92

Calcula la recta de regresión de **y** sobre **x** y analiza si sería fiable hacer alguna estimación.

Solución:

$y - 4,88 = 0,1(x - 8,64)$

$y = 0,1x + 4,02$

No es muy fiable hacer estimaciones porque el coeficiente de correlación r = 0,53 está, en valor absoluto, muy alejado de 1. La correlación es débil.

Para ampliar

25. La tabla siguiente recoge los datos de un grupo de estudiantes con las horas dedicadas al estudio de un examen, X, y la calificación obtenida, Y:

X	4	6	7	3	3	7	8	7	5	6
Y	5	7	8	5	6	7	8	9	6	6

Dibuja la nube de puntos e indica si sobre ella se puede deducir alguna relación.

Solución:

La relación que se obtiene es que al aumentar las horas de estudio se aumenta la calificación. Es una relación directa.

26. Haz la tabla de frecuencia de doble entrada de la siguiente distribución bidimensional:

x_i	6	6	5	4	4	3	2
y_i	2	3	3	3	4	5	5
n_i	7	10	6	4	5	2	3

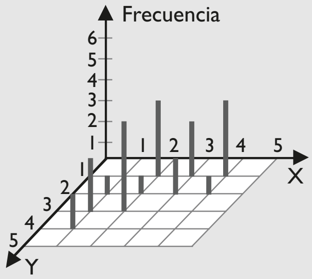
Solución:

Y \ X	2	3	4	5	6	
2	0	0	0	0	7	7
3	0	0	4	6	10	20
4	0	0	5	0	0	5
5	3	2	0	0	0	5
	3	2	9	6	17	37

27. Dibuja el diagrama de barras correspondiente a la siguiente distribución bidimensional:

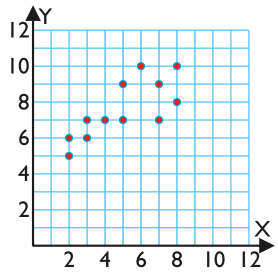
Y \ X	1	2	3	4
1	0	4	3	4
2	1	1	2	1
3	3	5	0	0
4	2	0	0	0

Solución:

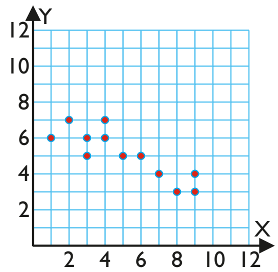


28. Haz la tabla de frecuencias de las siguientes nubes de puntos:

a)



b)



Solución:

a)

X	2	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	8
Y	5	6	6	7	7	7	9	10	7	9	8	10

b)

X	1	2	3	3	4	4	5	6	7	8	9	9
Y	6	7	5	6	6	7	5	5	4	3	3	4

29. Calcula la covarianza de la siguiente distribución bidimensional:

x_i	1	1	3	4	6	6	8	9	9	10
y_i	0	4	2	5	8	5	4	8	10	8
n_i	2	3	2	4	3	2	3	4	2	5

Solución:

Covarianza: 1 272/30 – 6,17 · 5,80 = 6,63

30. Calcula la covarianza de la siguiente distribución bidimensional:

Y \ X	0	1	2	3
60	4	2	0	0
70	6	7	8	0
80	0	3	3	4
90	0	0	0	3

Solución:

Covarianza: 4 220/40 – 1,38 · 72,50 = 5,81

31. Calcula el coeficiente de correlación e indica el tipo de correlación para la siguiente distribución bidimensional:

x_i	65	63	67	64	68	62	70	66
y_i	68	66	68	65	69	66	68	65

Solución:

Coeficiente de correlación: 0,64

Es directa y débil.

32. Calcula el coeficiente de correlación e indica el tipo de correlación para la siguiente distribución bidimensional:

X	175	181	192	211	235	255	275	286	292
Y	169	185	202	219	240	266	295	329	357

Solución:

Coeficiente de correlación: 0,98

Es directa y fuerte.

33. Calcula la recta de regresión de **y** sobre **x** de la siguiente distribución bidimensional:

X	6	5	8	8	7	6	10
Y	8	7	10	9	8	8	11

Solución:

$y - 8{,}71 = 0{,}7881(x - 7{,}14)$

$y = 0{,}7881x + 3{,}083$

34. Calcula la recta de regresión de **y** sobre **x** de la siguiente distribución bidimensional:

Y \ X	4	5	6	7
5	3	2	0	0
6	4	6	0	0
7	0	5	8	0
8	0	0	2	6

Solución:

$y - 6{,}67 = 0{,}83(x - 5{,}42)$

$y = 0{,}83x + 2{,}17$

Problemas

35. La siguiente tabla recoge la estatura en centímetros de un grupo de padres (X) y sus respectivos hijos mayores (Y):

X	170	168	170	165	175	169	180	175	173
Y	173	170	173	170	178	170	179	172	180

Calcula:

a) el coeficiente de correlación.

b) la recta de regresión de **y** sobre **x**

c) Estima la estatura de un hijo cuyo padre mida 185 cm, e indica si la estimación es fiable.

Solución:

a) Coeficiente de correlación: 0,76

b) Recta de regresión de **y** sobre **x**

$y - 173{,}89 = 0{,}6809(x - 171{,}67)$

$y = 0{,}6809x + 57$

c) 182,97 cm. Como $r = 0{,}76 < 0{,}85$, no es muy fiable la estimación.

36. La siguiente tabla muestra el cierre de los últimos días de los índices del IBEX35 (X) y Dow Jones 30 (Y):

X	8 236,9	8 164,7	8 236,1	8 202,1	8 241,2
Y	10 334,5	10 235,1	10 198,2	10 313,7	10 356,4

a) Calcula el coeficiente de regresión.

b) Calcula la recta de regresión del Dow Jones sobre el IBEX.

Solución:

a) Coeficiente de regresión: 0,7551

b) $y - 10\,287{,}58 = 0{,}7551(x - 8\,216{,}20)$

$y = 0{,}7551x + 4\,083{,}5$

37. El rendimiento anual obtenido según la inversión realizada, en miles de euros, en una plantación agrícola es:

Inversión	12	14	16	15	18	20	21	15
Rendimeinto	3	3,5	4,5	5	6	6,5	7,5	4,5

Calcula:

a) el coeficiente de correlación.

b) la recta de regresión del rendimiento sobre la inversión.

c) Estima el rendimiento para una inversión de 22 000 €, e indica si la estimación es fiable.

Solución:

a) Coeficiente de correlación: 0,97

b) y – 5,06 = 0,4829(x – 16,38)

y = 0,4829x – 2,85

c) 7,7738 · 1 000 = 7 773,8 €

Como r = 0,97 > 0,85, la estimación es fiable.

38. Las estaturas y los pesos de un grupo de personas son:

Estatura	175	180	180	185	183	180	190	175
Peso	77	79	80	82	80	80	85	75

Calcula:

a) el coeficiente de correlación.

b) la recta de regresión del peso sobre la estatura.

c) Estima el peso para una persona que mida 195 cm, e indica si la estimación es fiable.

Solución:

a) Coeficiente de correlación: 0,96

b) y – 79,75 = 0,5795(x – 181)

y = 0,5795x – 25,14

c) 87,86 kg

Como r = 0,96 > 0,85, la estimación es fiable.

39. En un taller de artesanía se ha registrado el número de piezas acabadas que unos artesanos hacen según las horas de trabajo:

Horas	8	7,5	8	8,5	6	7	8	9
Nº piezas	3	4	4	5	2	3	5	4

Calcula:

a) el coeficiente de correlación.

b) la recta de regresión del número de piezas sobre el número de horas.

c) Estima el número de piezas para 10 h de trabajo, e indica si la estimación es fiable.

Solución:

a) Coeficiente de correlación: 0,75

b) y – 3,75 = 0,8333(x – 7,75)

y = 0,8333x – 2,71

c) 5,62 piezas.

Como r = 0,75 < 0,85, no es fiable la estimación.

40. De una goma se cuelgan distintos pesos en gramos y se mide el alargamiento en centímetros producido; se obtienen los siguientes resultados:

Peso (g)	10	20	30	40	50	60	70	80
Alargamiento (cm)	2	4	7	10	12	15	18	20

Calcula:

a) el coeficiente de correlación.

b) la recta de regresión del alargamiento sobre el peso.

c) Estima el alargamiento que se producirá para un peso de 90 g, e indica si la estimación es fiable.

Solución:

a) Coeficiente de correlación: 0,998 = 1

b) y – 11 = 0,2643(x – 45)

y = 0,2643x – 0,89

c) 22,9 cm

Se puede aceptar una relación funcional ⇒ es muy fiable la estimación.

41. Calcula el centro de gravedad, las desviaciones típicas marginales, la covarianza y el coeficiente de correlación de la siguiente distribución:

Cilindrada (cm^3)	1 000	1 200	1 400	1 600	1 600	1 800	2 000	2 000
Velocidad (km/h)	125	130	140	145	150	170	190	195

a) Representa la nube de puntos y calcula la recta de regresión de **y** sobre **x,** e interpreta los resultados.

b) Un coche tiene 1 900 cm^3 de cilindrada. ¿Qué velocidad máxima alcanzará?

c) Un coche tiene una velocidad máxima de 150 km/h. ¿Qué cilindrada tendrá?

Solución:

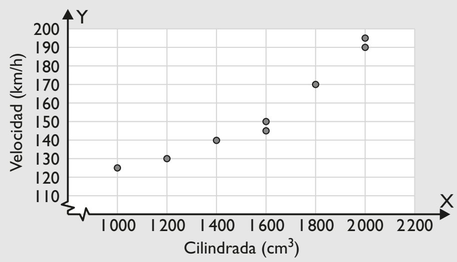
$\overline{x}$ = 1 575, $\overline{y}$ = 155,63

s_x = 338,19, s_y = 24,80

s_{xy} = 8 015,63

r = 0,96

a)



y – 155,63 = 0,0701(x – 1 575)

y = 0,0701x + 45,22

Como el coeficiente de correlación es 0,96 > 0,85, las estimaciones son fiables.

b) 178,41 km/h

c) 1 494,72 cm^3

42. Calcula el centro de gravedad, las desviaciones típicas marginales, la covarianza y el coeficiente de correlación de la siguiente distribución:

Nº de vendedores: x_i	2	4	5	6	7	9	10
Nº de pedidos: y_i	70	90	110	150	170	190	210

a) Representa la nube de puntos y calcula la recta de regresión de **y** sobre **x,** e interpreta los resultados.

b) Si hubiese 12 vendedores, ¿cuántos pedidos se esperarían?

c) Para obtener 250 pedidos, ¿cuántos vendedores harían falta?

Solución:

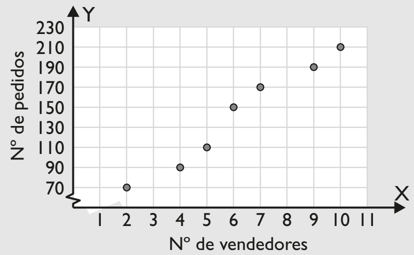
$\overline{x} = 6,14, \overline{y} = 141,43$

$s_x = 2,59, s_y = 48,82$

$s_{xy} = 124,08$

$r = 0,98$

a)



$y - 141,43 = 18,537(x - 6,14)$

$y = 18,537x + 27,61$

Como el coeficiente de correlación es 0,98 > 0,85, las estimaciones son fiables.

b) 250,05 pedidos = 250 pedidos.

c) 12 vendedores.

43. El número de bacterias por centímetro cúbico que hay en un cultivo, según el paso del tiempo, es:

Tiempo (h)	0	1	2	3	4	5	6
Nº de bacterias	10	17	24	32	40	48	52

Calcula:

a) el coeficiente de correlación.

b) la recta de regresión del número de bacterias sobre el tiempo.

c) Estima el número de bacterias que habrá después de 7 horas, e indica si la estimación es fiable.

Solución:

a) Coeficiente de correlación: 0,998 = 1

b) $y - 31,86 = 7,2857(x - 3)$

$y = 7,2857x + 10$

c) 61 bacterias.

Se puede aceptar una relación funcional ⇒ es muy fiable la estimación.

44. En una compañía telefónica, han registrado en una muestra los siguientes datos sobre el número de teléfonos y el número de llamadas interurbanas realizadas:

Nº de teléfonos	550	600	650	700	750	800
Nº de llamadas	50	55	58	62	65	70

Calcula:

a) el coeficiente de correlación.

b) la recta de regresión del número de llamadas sobre el número de teléfonos.

c) Estima el número de llamadas para 850 teléfonos e indica si es fiable la estimación.

Solución:

a) Coeficiente de correlación: 0,997 = 1

b) $y - 60 = 0,0766(x - 675)$

$y = 0,0766x + 8,3$

c) 73,41 llamadas.

Se puede aceptar una relación funcional ⇒ es muy fiable la estimación.

Para profundizar

45. Se ha medido experimentalmente la presión del vapor del agua en centímetros de mercurio según la temperatura, y se han obtenido los siguientes resultados:

Temperatura	0	10	20	30	40	50
Presión	0,5	0,8	1,6	3	5,5	9

a) Calcula el coeficiente de correlación.

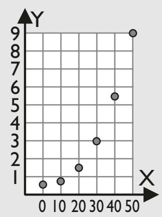
b) Dibuja la nube de puntos.

c) ¿Qué tipo de curva crees que se ajustará mejor a estos puntos?

Solución:

a) Coeficiente de correlación: 0,94

b) Nube de puntos:



c) Una parábola.

46. Las calificaciones de un grupo de estudiantes en Matemáticas y en Física se distribuyen así:

$Y_{(Física)}$ \ $X_{(Matem.)}$	0 a 2	2 a 4	4 a 6	6 a 8	8 a 10
0 a 2	6	2			
2 a 4	8	14	1		
4 a 6	1	3	12	1	
6 a 8		2	4	12	1
8 a 10		1	1	1	10

Calcula:

a) el coeficiente de correlación.

b) la recta de regresión de **y** sobre **x**

c) Estima la calificación en Física para un alumno que haya sacado un 7,5 en Matemáticas.

d) ¿Se debería hacer la recta de regresión de **x** sobre **y** para estimar la calificación en Matemáticas de un alumno que haya obtenido un 6,5 en Física? Haz dicha estimación.

Solución:

a) Coeficiente de correlación: 0,85

b) $y - 5{,}15 = 0{,}81(x - 4{,}6)$

$y = 0{,}81x + 1{,}42$

c) 7,5 en Física.

d) Para $y = 6{,}5$ se obtiene con la recta de regresión de **y** sobre **x:**

$x = 6{,}27$

La recta de regresión de **x** sobre **y** es:

$x - 4{,}6 = 0{,}89(y - 5{,}15)$

$x = 0{,}89y + 0{,}02$

Para $y = 6{,}5 \Rightarrow x = 5{,}8$

Teniendo en cuenta que $r = 0{,}85$, no es demasiado fiable utilizar la recta de regresión de **y** sobre **x.**

Paso a paso

47. Calcula el centro de gravedad, las desviaciones típicas marginales, la covarianza y el coeficiente de correlación de la siguiente distribución:

Peso (kg)	70	65	85	60	70	75	90	80	60	70
Estatura (cm)	175	160	180	155	165	180	185	175	160	170

Representa la nube de puntos y calcula la recta de regresión de **y** sobre **x,** e interpreta los resultados.

- Una persona pesa 95 kg. ¿Cuánto medirá?
- Una persona mide 177 cm. ¿Cuánto pesará?

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

48. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es,** elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

49. Calcula el centro de gravedad, las desviaciones típicas marginales, la covarianza y el coeficiente de correlación de la siguiente distribución:

Cilindrada (cm^3)	1 000	1 200	1 400	1 600	1 600	1 800	2 000	2 000
Velocidad (km/h)	125	130	140	145	150	170	190	195

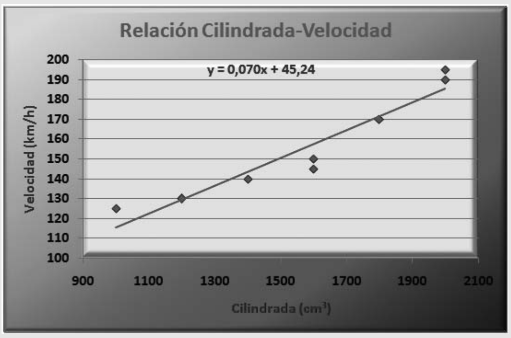
a) Representa la nube de puntos y calcula la recta de regresión de **y** sobre **x,** e interpreta los resultados.

b) Un coche tiene de cilindrada 1 900 cm^3. ¿Qué velocidad máxima alcanzará?

c) Un coche tiene una velocidad máxima de 150 km/h. ¿Qué cilindrada tendrá?

Solución:

	A	B	C
1	Relación Cilindrada-Velocidad		
2		Cilindrada (cm^3)	Velocidad (km/h)
3		1000	125
4		1200	130
5		1400	140
6		1600	145
7		1600	150
8		1800	170
9		2000	190
10		2000	195
11	Centro de gravedad	1575	155,63
12	Desviaciones típicas marginales	338,19	24,80
13	Covarianza	8015,63	
14	Coeficiente de correlación	0,96	
15	Predecir resultados	**1900**	178,24
16	Buscar objetivos…	1496,57	**150,00**



50. Calcula el centro de gravedad, las desviaciones típicas marginales, la covarianza y el coeficiente de correlación de la siguiente distribución:

Nº de vendedores: x_i	2	4	5	6	7	9	10
Nº de pedidos: y_i	70	90	110	150	170	190	210

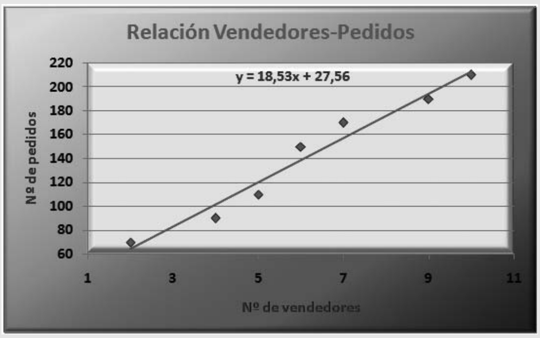
a) Representa la nube de puntos y calcula la recta de regresión de **y** sobre **x,** e interpreta los resultados.

b) Si hubiese 12 vendedores, ¿cuántos pedidos se esperarían?

c) Para obtener 250 pedidos, ¿cuántos vendedores harían falta?

Solución:

	A	B	C
1	Relación Vendedores-Pedidos		
2		Nº de vendedores	Nº de pedidos
3		2	70
4		4	90
5		5	110
6		6	150
7		7	170
8		9	190
9		10	210
10	Centro de gravedad	6,14	141,43
11	Desviaciones típicas marginales	2,59	48,82
12	Covarianza	124,08	
13	Coeficiente de correlación	0,98	
14	Predecir resultados	**12**	249,92
15	Buscar objetivos…	12,00	**250,00**



51. Calcula el centro de gravedad, las desviaciones típicas marginales, la covarianza y el coeficiente de correlación de la siguiente distribución:

Temperatura (°C): x_i	18	19	20	18	22	21
Presión (mm): y_i	790	800	805	795	820	810

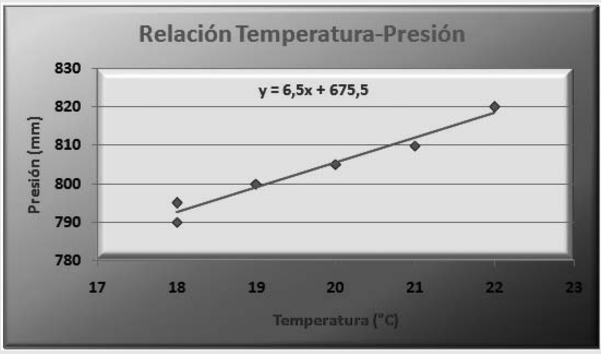
a) Representa la nube de puntos y calcula la recta de regresión de **y** sobre **x,** e interpreta los resultados.

b) Para una temperatura de 23 °C, ¿qué presión habrá?

c) Para una presión de 900 mm, ¿qué temperatura habrá?

Solución:

	A	B	C
1	Relación Temperatura-Presión		
2		Temperatura (°C)	Presión (mm)
3		18	790
4		19	800
5		20	805
6		18	795
7		22	820
8		21	810
9	Centro de gravedad	19,67	803,33
10	Desviaciones típicas marginales	1,49	9,86
11	Covarianza	14,44	
12	Coeficiente de correlación	0,98	
13	Predecir resultados	23	825,00
14	Buscar objetivos...	34,54	900,00



13 Probabilidad. Distribución binomial y normal

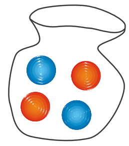
1. Probabilidad condicionada

■ Piensa y calcula

Calcula mentalmente:

a) la probabilidad de que al sacar una bola, sea roja.

b) la probabilidad de que al sacar dos bolas sin devolución, la primera sea roja y la segunda azul.



Solución:

a) 1/2 b) 1/3

● Aplica la teoría

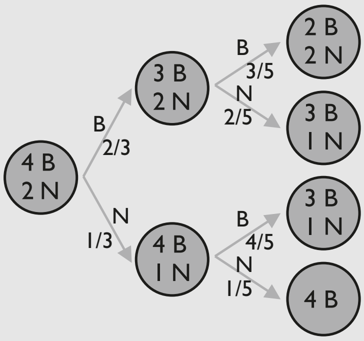
1. De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin devolución, dos bolas.

a) Haz el diagrama de árbol que representa el experimento.

b) Calcula la probabilidad de que la segunda bola sea negra, condicionado a que la primera ha sido blanca.

Solución:

a)



B = "sacar bola blanca"

N = "sacar bola negra"

b) P(N/B) = 2/5

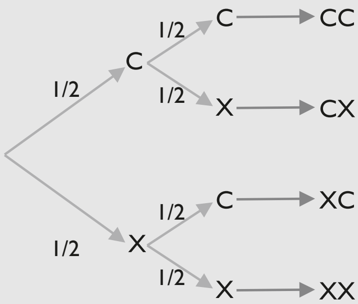
2. Lanzamos dos monedas de 1 € al aire:

a) Haz el diagrama de árbol.

b) Calcula la probabilidad de sacar dos caras.

Solución:

a)



C = "sacar cara" X = "sacar cruz"

b) $P(C \cap C) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

3. De una baraja española de 40 cartas se extraen dos de ellas con devolución. Determinar:

a) la probabilidad de que las dos sean copas.

b) la probabilidad de que la segunda sea de oros, condicionado a que la primera haya sido de copas.

c) la probabilidad de que las dos sean figuras.

d) la probabilidad de que la segunda sea figura, condicionado a que la primera haya sido un as.

Solución:

C = "sacar copas" O = "sacar oros"

F = "sacar figura" A = "sacar as"

a) $P(C \cap C) = 10/40 \cdot 10/40 = 1/16$

b) $P(O/C) = P(O) = 1/4$

Los sucesos son independientes al ser con devolución.

c) $P(F \cap F) = 12/40 \cdot 12/40 = 9/100$

d) $P(F/A) = P(F) = 3/10$

2. Teoremas de probabilidad

Piensa y calcula

En una familia con dos hijos la probabilidad de que sean los dos varones es 1/4 y de que sean las dos mujeres es 1/4. Calcula la probabilidad de que en una familia con dos hijos, ambos tengan el mismo sexo.

Solución:

$1/4 + 1/4 = 1/2$

Aplica la teoría

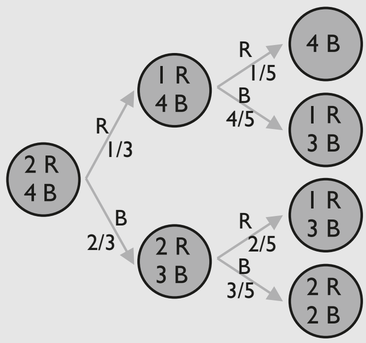
4. Considérese una urna que contiene 2 bolas rojas y 4 blancas. Si de la urna se sacan dos bolas sin devolución, calcula la probabilidad de que:

a) las dos bolas sean del mismo color.

b) al menos una de las bolas sea blanca.

Solución:

CR = "sacar bola roja" B = "sacar bola blanca"



a) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

$P(R \cap R) + P(B \cap B) = 1/3 \cdot 1/5 + 2/3 \cdot 3/5 = 7/15$

b) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

$P(R \cap B) + P(B \cap R) + P(B \cap B) =$

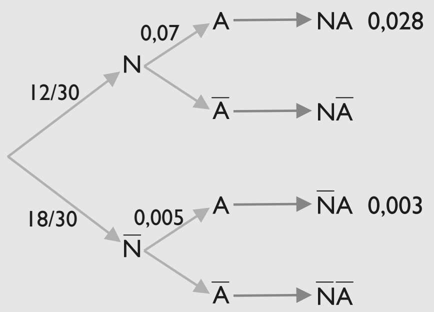
$= 1/3 \cdot 4/5 + 2/3 \cdot 2/5 + 2/3 \cdot 3/5 = 14/15$

5. Un barco cubre diariamente el servicio entre dos puertos. Se sabe que la probabilidad de accidente en día sin niebla es 0,005, y en día de niebla, 0,07. Un cierto día de un mes en el que hubo 18 días sin niebla y 12 con niebla se produjo un accidente. Calcula la probabilidad de que el accidente haya sido en un día sin niebla.

Solución:

N = "día con niebla"

A = "producirse un accidente"



Se aplica el teorema de Bayes:

$$P(\overline{N}/A) = \frac{P(\overline{N} \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}003}{0{,}028 + 0{,}003} = 0{,}097$$

6. Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas. Si la carta extraída es un rey, nos dirigimos a la urna I; en caso contrario, a la urna II. A continuación, extraemos una bola. El contenido de la urna I es de 7 bolas blancas y 5 negras y el de la urna II es de 6 bolas blancas y 4 negras. Halla:

a) la probabilidad de que la bola extraída sea blanca y de la urna II

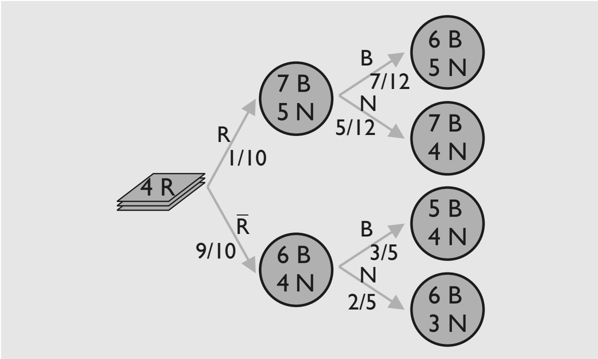
b) la probabilidad de que la bola extraída sea negra.

Solución:

R = "sacar rey"

B = "sacar bola blanca"

N = "sacar bola negra"



a) Se aplica la regla del producto o de la probabilidad compuesta:

$P(B \cap \overline{R}) = 9/10 \cdot 3/5 = 27/50$

b) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

$P(N) = 1/10 \cdot 5/12 + 9/10 \cdot 2/5 = 241/600$

3. Distribuciones de frecuencia y probabilidad discretas

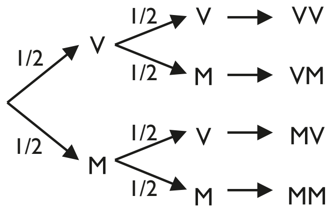
Piensa y calcula

Calcula mentalmente la probabilidad de que una familia con dos hijos tenga:

a) dos varones. b) un varón y una mujer. c) dos mujeres.

Solución:

a) 1/4 b) 1/2 c) 1/4



Aplica la teoría

7. La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta **x** viene dada por:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,07	0,35	0,03	k	0,25

a) Calcula el valor de **k**

b) Calcula la media y la desviación típica.

Solución:

a) $k + 0,7 = 1 \Rightarrow k = 0,3$

b) $\mu = 3,31$

$\sigma = 1,35$

8. La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta **x** viene dada por:

x_i	3	4	5	6	7
p_i	0,1	0,2	0,15	0,25	0,3

Calcula:

a) $P(x > 5)$ b) $P(x < 3)$

c) la media. d) la desviación típica.

Solución:

a) $P(x > 5) = 0,25 + 0,3 = 0,55$

b) $P(x < 3) = 0$

c) $\mu = 5,45$

d) $\sigma = 1,36$

9. Se considera el experimento de lanzar dos monedas al aire y observar el número de caras. Calcula:

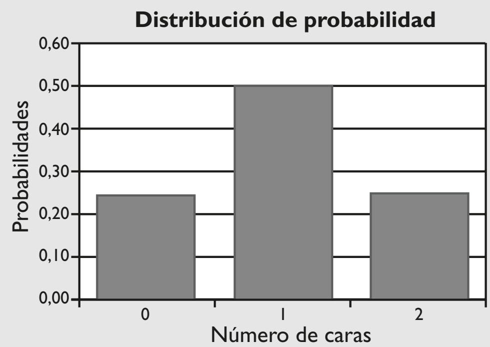
a) la distribución de probabilidad, y represéntala gráficamente.

b) los parámetros.

Solución:

a)

Nº de caras	p_i
0	0,25
1	0,50
2	0,25



b) $\mu = 1$

$\sigma = 0,71$

10. Un opositor domina 80 temas de los 100 de que consta el temario. Para el examen se eligen 2 temas al azar, y el opositor puede dominar los dos, uno o ninguno. Haz la distribución de probabilidad.

Solución:

Nº de temas	p_i
0	0,04
1	0,32
2	0,64

4. Distribución binomial

Piensa y calcula

Un jugador encesta con probabilidad 1/3. Calcula la probabilidad de que al tirar dos veces enceste:

a) dos veces. b) una vez. c) ninguna vez.

Solución:

a) 1/9 b) 4/9 c) 4/9

Aplica la teoría

11. Calcula mentalmente:

a) 1! b) 5! c) $\binom{4}{0}$ d) $\binom{7}{1}$

Solución:

a) 1 b) 120 c) 1 d) 7

12. Halla, utilizando la calculadora:

a) 8! b) 13! c) $\binom{10}{4}$ d) $\binom{10}{5}$

Solución:

a) 40 320 b) 6 227 020 800 c) 210 d) 252

13. La probabilidad de que un jugador de baloncesto enceste una canasta de 3 puntos es 0,6. Si tira a cesta 4 veces, calcula la probabilidad de que enceste 3

Solución:

a) $x \equiv$ número de encestes.

b) $B(4; 0,6)$

c) $P(x = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4 = 0,3456$

14. Un 5% de las piezas producidas en un proceso de fabricación resultan defectuosas. Halla la probabilidad de que en una muestra de 20 piezas elegidas al azar haya exactamente dos piezas defectuosas.

Solución:

a) $x \equiv$ número de piezas defectuosas.

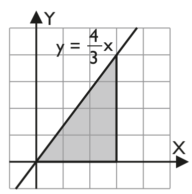
b) $B(20; 0,05)$

c) $P(x = 2) = \binom{20}{2} \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^{18} = 0,1887$

5. Distribuciones de frecuencia y probabilidad continuas

Piensa y calcula

Calcula mentalmente el área comprendida entre el eje X y la recta $y = \frac{4}{3}x$ en el intervalo [0, 3]



Solución:

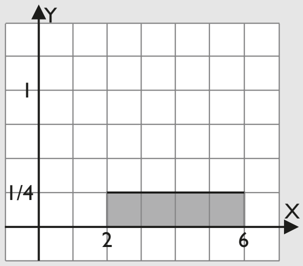
Área = 6 u^2

Aplica la teoría

15. Demuestra que la siguiente función es de densidad y calcula $P(3 \le x \le 4)$

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si} \quad x \in [2, 6] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [2, 6] \end{cases}$$

Solución:



a) $f(x) \ge 0$ para todo valor del dominio.

b) El área comprendida entre el eje X y la función f(x) en el dominio es el área de un rectángulo: $4 \cdot 1/4 = 1$

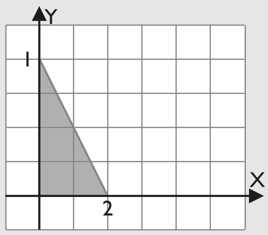
Como se verifican las características a) y b), es una función de densidad.

$P(3 \le x \le 4) = 1 \cdot 1/4 = 1/4$

16. Demuestra que la siguiente función es de densidad y calcula $P(1 \le x \le 2)$

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} + 1 & \text{si} \quad x \in [0, 2] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0, 2] \end{cases}$$

Solución:



a) $f(x) \ge 0$ para todo valor del dominio.

b) El área comprendida entre el eje X y la función f(x) en el dominio es el área de un triángulo: $(2 \cdot 1)/2 = 1$

Como se verifican las características a) y b), es una función de densidad.

$P(1 \le x \le 2) = (1 \cdot 1/2)/2 = 1/4$

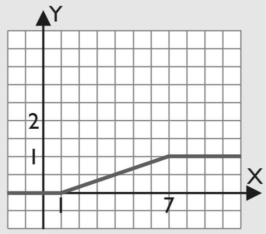
17. Calcula la función de distribución de una variable aleatoria cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 1/6 & \text{si} \quad x \in [1, 7] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [1, 7] \end{cases}$$

Solución:

x	1	2	3	4	5	6	7
$P(x \le x_i)$	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{6} & \text{si} \quad 1 < x < 7 \\ 1 & \text{si} \quad x \ge 7 \end{cases}$$



18. Una variable aleatoria tiene la siguiente función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{x+2} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

Calcula $P(x \le 10)$ y $P(8 \le x \le 10)$

Solución:

$P(x \le 10) = F(10) = 10/12 = 5/6$

$P(8 \le x \le 10) = F(10) - F(8) = 10/12 - 8/10 = 1/30$

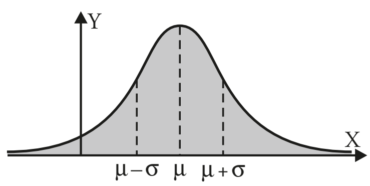
6. Distribución normal

Piensa y calcula

En el primer dibujo del margen, el área comprendida entre el eje X y la curva es 1. Calcula mentalmente cuánto vale el área que queda a la izquierda de la recta $x = \mu$

Solución:

1/2



Aplica la teoría

19. Calcula en una N(0, 1) las siguientes probabilidades:

a) $P(z \leq 0,5)$
b) $P(z \leq 1,72)$
c) $P(z \geq 2,4)$
d) $P(z \leq -3,56)$

Solución:
a) 0,6915
b) 0,9573
c) $1 - P(z \leq 2,4) = 0,0082$
d) $P(z \geq 3,56) = 1 - P(z \leq 3,56) = 0,0002$

20. Calcula en una N(0,1) las siguientes probabilidades:

a) $P(1,5 \leq z \leq 2)$
b) $P(-2,3 \leq z \leq 3,7)$
c) $P(-3,4 \leq z \leq -1,8)$
d) $P(-1,6 \leq z \leq 1,6)$

Solución:
a) $P(z \leq 2) - P(z \leq 1,5) = 0,0440$
b) $P(z \leq 3,7) - P(z \leq -2,3) =$
$= P(z \leq 3,7) - 1 + P(z \leq 2,3) = 0,9892$
c) $P(z \leq -1,8) - P(z \leq -3,4) =$
$= \cancel{1} - P(z \leq 1,8) - \cancel{1} + P(z \leq 3,4) = 0,0356$
d) $P(z \leq 1,6) - P(z \leq -1,6) =$
$= P(z \leq 1,6) - 1 + P(z \leq 1,6) = 2P(z \leq 1,6) - 1 = 0,8904$

21. Calcula el valor de **k** en los siguientes casos:

a) $P(z \leq k) = 0,9582$
b) $P(z \geq k) = 0,7612$

Solución:
a) $k = 1,73$
b) $k = -0,71$

22. Calcula en una N(20, 4) las siguientes probabilidades:

a) $P(x \leq 25)$
b) $P(x \geq 17)$
c) $P(23 \leq x \leq 27)$
d) $P(15 \leq x \leq 18)$

Solución:
a) $P\left(z \leq \frac{25 - 20}{4}\right) = P(z \leq 1,25) = 0,8944$
b) $P\left(z \geq \frac{17 - 20}{4}\right) = P(z \geq -0,75) = P(z \leq 0,75) = 0,7734$
c) $P\left(\frac{23 - 20}{4} \leq z \leq \frac{27 - 20}{4}\right) = P(0,75 \leq z \leq 1,75) =$
$= P(z \leq 1,75) - P(z \leq 0,75) = 0,1865$
d) $P\left(\frac{15 - 20}{4} \leq z \leq \frac{18 - 20}{4}\right) = P(-1,25 \leq z \leq -0,5) =$
$= P(z \leq -0,5) - P(z \leq -1,25) =$
$= \cancel{1} - P(z \leq 0,5) - \cancel{1} + P(z \leq 1,25) = 0,2029$

23. El peso de los recién nacidos sigue una distribución normal de media 3,5 kg y una desviación típica de 0,6 kg. Calcula la probabilidad de que un recién nacido pese entre 2,7 kg y 4 kg

Solución:
a) $x \equiv$ peso de los recién nacidos.
b) N(3,5; 0,6)
c) $P(2,7 \leq x \leq 4)$
$P(2,7 \leq x \leq 4) = P\left(\frac{2,7 - 3,5}{0,6} \leq z \leq \frac{4 - 3,5}{0,6}\right) =$
$= P(-1,33 \leq z \leq 0,83) = P(z \leq 0,83) - P(z \leq -1,33) =$
$= P(z \leq 0,83) - 1 + P(z \leq 1,33) = 0,7049$

7. La binomial se aproxima a la normal

Piensa y calcula

En una función de distribución se estudia la probabilidad de la variable aleatoria número de hijas de las familias con dos descendientes. Calcula mentalmente $P(x = 1)$ y $P(0,5 < x < 1,5)$

Solución:
1/4 y 1/4

Aplica la teoría

24. El 5% de los libros prestados en una biblioteca de un centro escolar son técnicos. Si se toman los últimos 500 préstamos, calcula la probabilidad de que se hayan prestado entre 25 y 30 libros técnicos.

Solución:

a) $x \equiv$ Número de libros prestados.

b) B(500; 0,05)

c) $P(25 \le x \le 30)$

Se decide si se puede normalizar:

$np = 500 \cdot 0,05 = 25 > 5$

$nq = 500 \cdot 0,95 = 475 > 5$

Se puede aproximar a una normal.

Se normaliza:

$\mu = np = 500 \cdot 0,05 = 25$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0,05 \cdot 0,95} = 4,87$

$B(500; 0,05) \Rightarrow N(25; 4,87)$

Se corrige la continuidad y se tipifica:

$P(25 \le x \le 30) \Rightarrow P(24,5 \le x \le 30,5) =$

$= P\left(\frac{24,5 - 25}{4,87} \le z \le \frac{30,5 - 25}{4,87}\right) =$

$= P(-0,10 \le z \le 1,13) =$

$= P(z \le 1,13) - P(z \le -0,10) =$

$= P(z \le 1,13) - (1 - P(z \le 0,10) = 0,4106$

25. Se lanza una moneda 500 veces. Calcula la probabilidad de que salgan a lo sumo 260 caras.

Solución:

a) $x \equiv$ Número de caras.

b) B(500; 0,05)

c) $P(x \le 260)$

Se decide si se puede normalizar:

$np = 500 \cdot 0,5 = 250 > 5$

$nq = 500 \cdot 0,5 = 250 > 5$

Se puede aproximar a una normal.

Se normaliza:

$\mu = np = 500 \cdot 0,5 = 250$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 11,18$

$B(500; 0,5) \Rightarrow N(250; 11,18)$

Se corrige la continuidad y se tipifica:

$P(x \le 260) \Rightarrow P(x \le 260,5) =$

$= P\left(z \le \frac{260,5 - 250}{11,18}\right) = P(z \le 0,94) = 0,8264$

26. Se sabe que entre los enfermos diabéticos la probabilidad de superar un infarto es del 20%. Si se tienen 200 pacientes, calcula la probabilidad de que al menos 50 superen el infarto.

Solución:

a) $x \equiv$ Número de pacientes.

b) B(200; 0,2)

c) $P(x \ge 50)$

Se decide si se puede normalizar:

$np = 200 \cdot 0,2 = 40 > 5$

$nq = 200 \cdot 0,8 = 160 > 5$

Se puede ajustar a una normal.

Se normaliza:

$\mu = np = 200 \cdot 0,2 = 40$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = 5,66$

$B(200; 0,2) \Rightarrow N(40; 5,66)$

Se corrige la continuidad y se tipifica:

$P(x \ge 50) \Rightarrow P(x \ge 49,5) =$

$= P\left(z \ge \frac{49,5 - 40}{5,66}\right) = P(z \ge 1,68) =$

$= 1 - P(z \le 1,68) = 0,0465$

27. Se lanza un dado 130 veces. Calcula la probabilidad de que salga al menos 18 veces el número 4

Solución:

a) $x \equiv$ Número de cuatros.

b) B(130; 0,17)

c) $P(x \ge 18)$

Se decide si se puede normalizar:

$np = 130 \cdot 0,17 = 22,1 > 5$

$nq = 130 \cdot 0,83 = 107,9 > 5$

Se puede ajustar a una normal.

Se normaliza:

$\mu = np = 130 \cdot 0,17 = 22,1$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{130 \cdot 0,17 \cdot 0,83} = 4,28$

$B(130; 0,17) \Rightarrow N(22,1; 4,28)$

Se corrige la continuidad y se tipifica:

$P(x \ge 18) \Rightarrow P(x \ge 17,5) = P\left(z \ge \frac{17,5 - 22,1}{4,28}\right) =$

$= P(z \ge -1,07) = P(z \le 1,07) = 0,8577$

1. Probabilidad condicionada

28. Haz un diagrama cartesiano para el experimento de lanzar al aire dos monedas y calcula la probabilidad de obtener:

a) dos caras.

b) dos cruces.

c) una cara y la otra cruz.

Solución:

	C	C
C	CC	CX
X	XC	XX

a) 1/4 b) 1/4 c) 1/2

29. La probabilidad de un suceso A es 0,2 y la probabilidad de un suceso B es 0,35. Calcula la probabilidad de la intersección de A y B sabiendo que son sucesos independientes.

Solución:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}35 = 0{,}07$

30. En una urna hay 4 bolas amarillas y 6 verdes. Si se extraen dos bolas, haz el diagrama de árbol del experimento cuando se hace:

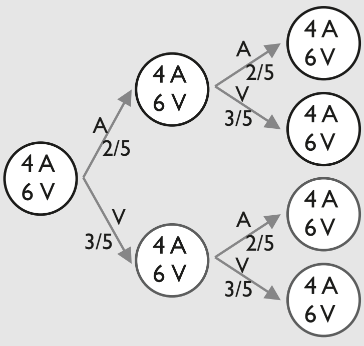
a) con devolución.

b) sin devolución.

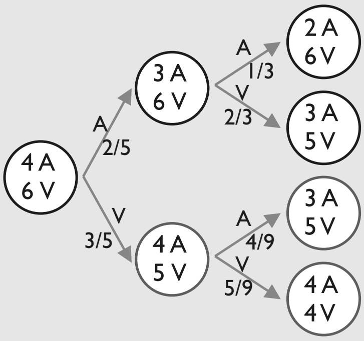
Solución:

A = “sacar bola amarilla” V = “sacar bola verde”

a)



b)



31. Haz un diagrama en árbol para el experimento de lanzar una moneda tres veces y calcula la probabilidad de obtener:

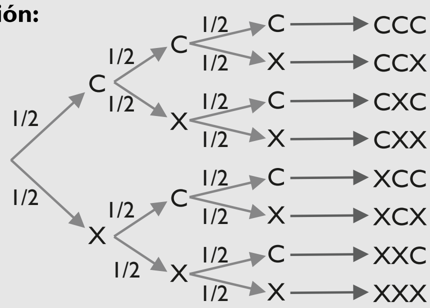
a) tres caras.

b) las dos primeras caras y una cruz.

c) la primera cara y luego dos cruces.

d) tres cruces.

Solución:



a) 1/8 b) 1/8 c) 1/8 d) 1/8

2. Teoremas de la probabilidad

32. Dos máquinas se usan para producir marcapasos. La máquina A produce el 75% de todos los marcapasos, mientras que la máquina B produce el 25%. El 1% de todos los marcapasos producidos por la máquina A son defectuosos, mientras que el 2% de los marcapasos producidos por la máquina B son defectuosos.

a) Dibuja un diagrama de árbol que represente esta situación.

b) Se selecciona un marcapasos al azar de entre todos los producidos y se encuentra que es defectuoso. Encuentra la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A.

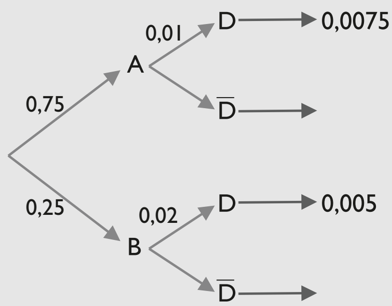
Solución:

A = “producido por la máquina A”

B = “producido por la máquina B”

D = “sacar marcapasos defectuoso”

a)



b) Se utiliza el teorema de Bayes:

$$P(A/D) = \frac{0{,}0075}{0{,}0125} = 0{,}6$$

33. En un supermercado, el 70% de las compras las realizan las mujeres; de las compras realizadas por éstas, el 80% supera los 12 €, mientras que de las compras realizadas por hombres solo el 30% supera esa cantidad.

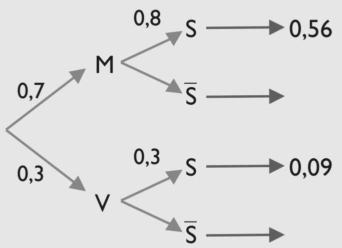
a) Elegido un tique de compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere los 12 €?

b) Si se sabe que el tique de compra supera los 12 €, ¿cuál es la probabilidad de que la compra haya sido hecha por una mujer?

Solución:

M = "compra realizada por mujer"

S = "compra superior a 12 €"



a) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

P(S) = 0,56 + 0,09 = 0,65

b) Se aplica el teorema de Bayes:

$$P(M/S) = \frac{0,56}{0,65} = 0,86$$

34. Se estima que solo un 20% de los que compran acciones en Bolsa tienen conocimientos bursátiles. De ellos, el 80% obtienen beneficios. De los que compran acciones sin conocimientos bursátiles, solo un 10% obtienen beneficios.

Se desea saber:

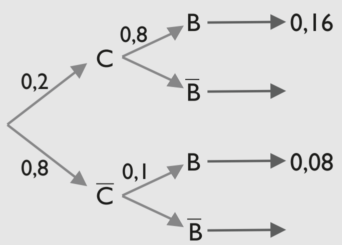
a) el tanto por ciento de los que compran acciones en Bolsa que obtienen beneficios.

b) Si se elige al azar una persona que ha comprado acciones en Bolsa y resulta que ha obtenido beneficios, ¿cuál es la probabilidad de que tenga conocimientos bursátiles?

Solución:

C = "tienen conocimientos bursátiles"

B = "obtienen beneficios"



a) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

P(B) = 0,16 + 0,08 = 0,24 ⇒ 24%

b) Se aplica el teorema de Bayes:

$$P(C/B) = \frac{0,16}{0,24} = 0,67$$

35. En una universidad existen tres facultades: A, B y C. En A hay matriculadas 150 chicas y 50 chicos; en B, 300 chicas y 200 chicos; y en C, 150 chicas y 150 chicos.

a) Calcula la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, sea chico.

b) Si un estudiante elegido al azar resultara ser chico, ¿cuál es su facultad más probable?

Solución:

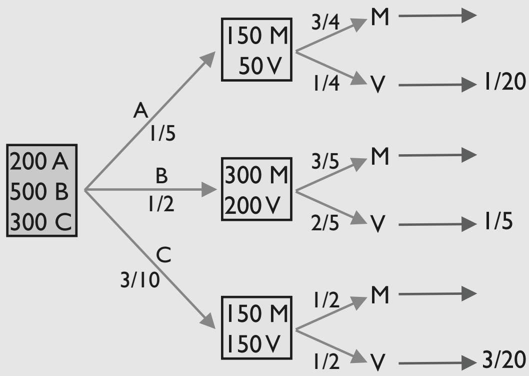
A = "ser de la universidad A"

B = "ser de la universidad B"

C = "ser de la universidad C"

V = "ser chico"

M = "ser chica"



a) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

P(V) = 1/20 + 1/5 + 3/20 = 2/5

b) Se aplica el teorema de Bayes:

$$P(A/V) = \frac{1/20}{2/5} = 1/8$$

$$P(B/V) = \frac{1/5}{2/5} = 1/2$$

$$P(C/V) = \frac{3/20}{2/5} = 3/8$$

La universidad más probable es la B

3. Distribuciones de frecuencia y probabilidad discretas

36. Una variable **x** tiene una distribución de probabilidad dada por la siguiente tabla:

x_i	1	2	3	4	6
p_i	2/9	1/9	3/9	2/9	1/9

Calcula:

a) P(x = 7) b) P(x > 3)

c) la media. d) la desviación típica.

Solución:

a) P(x = 7) = 0 b) P(x > 3) = 1/3

c) μ = 3 d) σ = 1,49

37. Se considera el experimento de lanzar dos dados de seis caras numerados y sumar los números que se obtienen.

a) Halla la función de probabilidad.

b) Halla sus parámetros.

Solución:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

x_i	p_i
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

a) μ = 7

b) σ = 2,42

38. Una variable **x** tiene una distribución de probabilidad dada por la siguiente tabla:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	3/19	4/19	k	2/19	5/19	4/19

a) Calcula el valor de **k**

b) Representa la función de probabilidad.

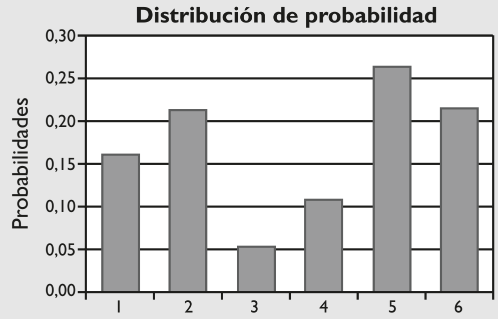
c) Calcula la media.

d) Calcula la desviación típica.

Solución:

a) 1/19

b)



c) μ = 3,74

d) σ = 1,83

4. Distribución binomial

39. Un examen tipo test tiene diez preguntas con cuatro respuestas cada una. Si un alumno responde aleatoriamente, ¿qué probabilidad tiene de contestar bien a más de tres preguntas?

Solución:

a) x ≡ número de respuestas acertadas.

b) B(10, 1/4)

c) P(x > 3)

P(x > 3) = 1 – P(x ≤ 3) = 1 – 0,7759 = 0,2241

40. Considera una caja que contiene 4 bolas rojas y 2 bolas negras. Se selecciona una bola al azar, se anota su color y se devuelve a la caja. Esta actividad se repite diez veces. Encuentra la probabilidad de observar una bola roja seis veces.

Solución:

a) x ≡ número de bolas rojas.

b) B(10, 2/3)

c) P(x = 6)

$$P(x = 6) = \binom{10}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^4 = 0{,}2276$$

41. En un centro, aprobaron Lengua el 80% de los alumnos. ¿Cuál es la probabilidad de que, de un grupo de 8 alumnos elegidos al azar, solo dos hayan suspendido Lengua?

Solución:

a) x ≡ número de alumnos suspensos.

b) B(8; 0,2)

c) P(x = 2)

$$P(x = 2) = \binom{8}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^6 = 0{,}2936$$

42. Si el 20% de las piezas producidas por una máquina son defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que entre cuatro piezas elegidas al azar, a lo sumo 2 sean defectuosas?

Solución:

a) $x \equiv$ número de piezas defectuosas.

b) $B(4; 0{,}2)$

c) $P(x \leq 2)$

$P(x \leq 2) =$

$= \binom{4}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^4 + \binom{4}{1} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^3 + \binom{4}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^2 =$

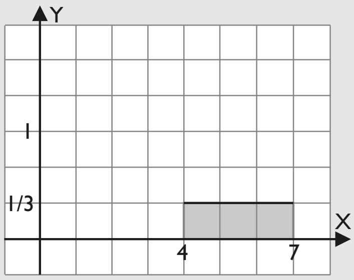
$= 0{,}9728$

5. Distribuciones de frecuencia y probabilidad continuas

43. Demuestra que la siguiente función es de densidad y calcula $P(5 \leq x \leq 6)$

$$f(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{si} \quad x \in [4, 7] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [4, 7] \end{cases}$$

Solución:



a) $f(x) \geq 0$ para todo valor del dominio.

b) El área comprendida entre el eje X y la función f(x) en el dominio es el área de un rectángulo: $3 \cdot 1/3 = 1$

Como se verifican las características a) y b), es una función de densidad.

$P(5 \leq x \leq 6) = 1 \cdot 1/3 = 1/3$

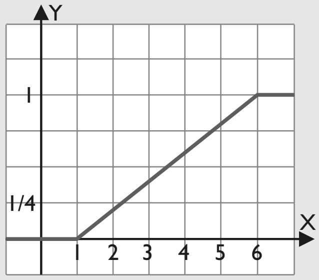
44. Calcula la función de distribución de una variable aleatoria cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{si} \quad x \in [1, 6] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [1, 6] \end{cases}$$

Solución:

x	1	2	3	4	5	6
$P(x \leq x_i)$	0	1/5	2/5	3/5	4/5	1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{5} & \text{si} \quad 1 < x < 6 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 6 \end{cases}$$



45. Una variable aleatoria tiene la siguiente función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 5 \\ \dfrac{x}{5} - 1 & \text{si} \quad 5 \leq x \leq 10 \\ 1 & \text{si} \quad x > 10 \end{cases}$$

Calcula la $P(6 \leq x \leq 8)$

Solución:

$P(6 \leq x \leq 8) = F(8) - F(6) = 8/5 - \cancel{1} - 6/5 + \cancel{1} = 2/5$

6. Distribución normal

46. Calcula en una N(0, 1) las siguientes probabilidades:

a) $P(z \leq 3{,}51)$

b) $P(z \geq -2{,}43)$

c) $P(z \geq 1{,}62)$

d) $P(z \leq -2{,}38)$

Solución:

a) 0,9998

b) $P(z \leq 2{,}43) = 0{,}9925$

c) $1 - P(z \leq 1{,}62) = 0{,}0526$

d) $1 - P(z \leq 2{,}38) = 0{,}0087$

47. Calcula en una N(0,1) las siguientes probabilidades:

a) $P(2{,}5 \leq z \leq 3)$

b) $P(-1{,}34 \leq z \leq 1{,}72)$

c) $P(-2{,}14 \leq z \leq -1{,}18)$

d) $P(-3{,}5 \leq z \leq 3{,}5)$

Solución:

a) $P(z \leq 3) - P(z \leq 2{,}5) = 0{,}0049$

b) $P(z \leq 1{,}72) - P(z \leq -1{,}34) =$

$= P(z \leq 1{,}72) - 1 + P(z \leq 1{,}34) = 0{,}8672$

c) $P(z \leq -1{,}18) - P(z \leq -2{,}14) =$

$= \cancel{1} - P(z \leq 1{,}18) - \cancel{1} + P(z \leq 2{,}14) = 0{,}1028$

d) $P(z \leq 3{,}5) - P(z \leq -3{,}5) = P(z \leq 3{,}5) - 1 + P(z \leq 3{,}5) =$

$= 2P(z \leq 3{,}5) - 1 = 0{,}9996$

48. Calcula el valor de **k** en los siguientes casos:

a) $P(z \leq k) = 0{,}7881$

b) $P(z \geq k) = 0{,}9959$

Solución:

a) $k = 0{,}8$ b) $k = -2{,}64$

49. Calcula en una N(16, 2) las siguientes probabilidades:

a) $P(x \leq 18)$ b) $P(x \geq 14)$

c) $P(15 \leq x \leq 17)$ d) $P(17 \leq x \leq 18)$

Solución:

a) $P\left(z \leq \dfrac{18-16}{2}\right) = P(z \leq 1) = 0{,}8413$

b) $P\left(z \geq \dfrac{14-16}{2}\right) = P(z \geq -1) = P(z \leq 1) = 0{,}8413$

c) $P\left(\dfrac{15-16}{2} \leq z \leq \dfrac{17-16}{2}\right) = P(-0{,}5 \leq z \leq 0{,}5) =$

$= P(z \leq 0{,}5) - P(z \leq -0{,}5) = P(z \leq 0{,}5) - 1 + P(z \leq 0{,}5) =$

$= 2 \cdot P(z \leq 0{,}5) - 1 = 0{,}383$

d) $P\left(\dfrac{17-16}{2} \leq z \leq \dfrac{18-16}{2}\right) = P(0{,}5 \leq z \leq 1) =$

$= P(z \leq 1) - P(z \leq 0{,}5) = 0{,}1498$

7. La binomial se aproxima a la normal

50. Halla la probabilidad de que al lanzar una moneda 12 veces salgan al menos 5 caras.

Solución:

a) $x \equiv$ Número de caras.

b) $B(12; 0{,}5)$

c) $P(x \geq 5)$

Se decide si se puede normalizar:

$np = 12 \cdot 0{,}5 = 6 > 5$

$nq = 12 \cdot 0{,}5 = 6 > 5$

Se puede aproximar a una normal.

Se normaliza:

$\mu = np = 12 \cdot 0{,}5 = 6$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{12 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 1{,}73$

$B(12; 0{,}5) \Rightarrow N(6; 1{,}73)$

Se corrige la continuidad y se tipifica:

$P(x \geq 5) \Rightarrow P(x \geq 4{,}5) = P\left(z \geq \dfrac{4{,}5-6}{1{,}73}\right) =$

$P(z \geq -0{,}87) = P(z \leq 0{,}87) = 0{,}8078$

51. En un test de 120 preguntas de verdadero o falso, halla la probabilidad de acertar al menos 40 respuestas.

Solución:

a) $x \equiv$ Número de respuestas.

b) $B(120; 0{,}5)$

c) $P(x \geq 40)$

Se decide si se puede normalizar:

$np = 120 \cdot 0{,}5 = 60 > 5$

$nq = 120 \cdot 0{,}5 = 60 > 5$

Se puede aproximar a una normal.

Se normaliza:

$\mu = np = 120 \cdot 0{,}5 = 60$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{120 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 5{,}48$

$B(120; 0{,}5) \Rightarrow N(60; 5{,}48)$

Se corrige la continuidad y se tipifica:

$P(x \geq 40) \Rightarrow P(x \geq 39{,}5) = P\left(z \geq \dfrac{39{,}5-60}{5{,}48}\right) =$

$P(z \geq -3{,}74) = P(z \leq 3{,}74) = 0{,}9999$

52. Se sabe que una máquina produce un 5% de piezas defectuosas. Calcula la probabilidad de que sean defectuosas en una muestra de 500 piezas:

a) a lo sumo 30

b) entre 30 y 50

Solución:

a) $x \equiv$ Número de piezas defectuosas.

b) $B(500; 0{,}05)$

c) $P(x \leq 30)$ y $P(30 \leq x \leq 50)$

Se decide si se puede normalizar:

$np = 500 \cdot 0{,}05 = 25 > 5$

$nq = 500 \cdot 0{,}95 = 475 > 5$

Se puede aproximar a una normal.

Se normaliza:

$\mu = np = 500 \cdot 0{,}05 = 25$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95} = 4{,}87$

$B(500; 0{,}05) \Rightarrow N(25; 4{,}87)$

Se corrige la continuidad y se tipifica:

Apartado a)

$P(x \leq 30) \Rightarrow P(x \leq 30{,}5) = P\left(z \leq \dfrac{30{,}5-25}{4{,}87}\right) =$

$P(z \leq 1{,}13) = 0{,}8708$

Apartado b)

$P(30 \leq x \leq 50) \Rightarrow P(29{,}5 \leq x \leq 50{,}5) =$

$= P\left(\dfrac{29{,}5-25}{4{,}87} \leq x \leq \dfrac{50{,}5-25}{4{,}87}\right) =$

$= P(0{,}92 \leq z \leq 5{,}24) = P(z \leq 5{,}24) - P(z \leq 0{,}92) =$

$= 1 - 0{,}8212 = 0{,}1788$

Para ampliar

53. Halla la probabilidad de obtener dos bolas azules al extraer dos bolas de una urna que contiene 5 bolas rojas y 5 azules cuando el experimento se hace:

a) con devolución.

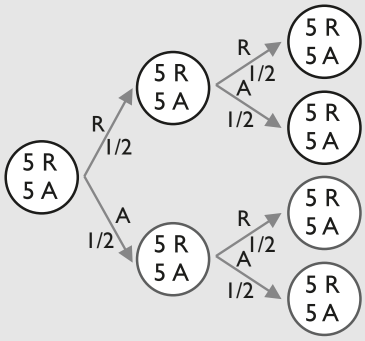
b) sin devolución.

Solución:

A = "sacar bola azul"

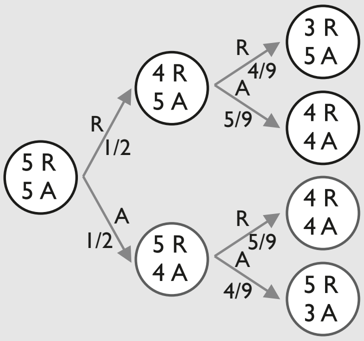
R = "sacar bola roja"

a)



P(A ∩ A) = 1/2 · 1/2 = 1/4

b)



P(A ∩ A) = 1/2 · 4/9 = 2/9

54. Calcula la probabilidad de obtener dos reyes al extraer dos cartas con devolución de una baraja española de 40 cartas.

Solución:

R = "extraer rey"

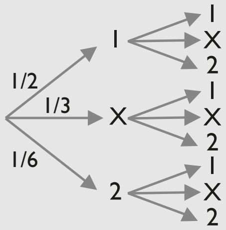
P(R ∩ R) = 1/10 · 1/10 = 1/100

55. Se lanza un dado de quinielas dos veces. Calcula la probabilidad de sacar:

a) dos unos.

b) una X, condicionado a que ha salido un dos.

Solución:



a) P(1 ∩ 1) = 1/2 · 1/2 = 1/4

b) P(X/2) = 1/3

56. Calcula la probabilidad de obtener dos números que sumen 5 al lanzar al aire dos dados.

Solución:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

S = "sacar dos números que sumen 5"

P(S) = 5/36

57. Halla la probabilidad de obtener dos bastos al extraer con devolución dos cartas de una baraja española de 40 cartas.

Solución:

B = "sacar bastos"

P(B ∩ B) = 1/4 · 1/4 = 1/16

58. Considera dos cajas con bolas de colores. La caja A contiene 4 bolas rojas, 1 bola blanca y 3 bolas negras. La caja B contiene 8 bolas rojas, 1 bola blanca y 7 bolas negras. Considera un experimento en dos etapas: primero se lanza un dado y luego se selecciona una bola de una de las cajas A o B. La caja se selecciona dependiendo del resultado observado al lanzar el dado. Si el resultado al lanzar el dado está en el conjunto {1, 2, 3, 4}, entonces se selecciona al azar una bola de la caja A. De otra manera, se selecciona al azar una bola de la caja B. Calcula la probabilidad:

a) de sacar bola blanca.

b) de que se haya sacado la bola de la caja B sabiendo que es negra.

Solución:

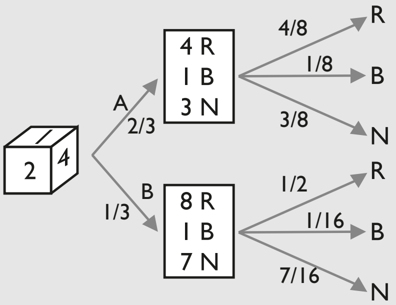
A = “elegir la urna A”

B = “elegir la urna B”

R = “sacar bola roja”

B = “sacar bola blanca”

N = “sacar bola negra”



a) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

$P(B) = 2/3 \cdot 1/8 + 1/3 \cdot 1/16 = 5/48$

b) Se aplica el teorema de Bayes:

$$P(B/N) = \frac{7/48}{1/4 + 7/48} = 7/19$$

59. El equipo directivo de cierta empresa del sector de hostelería está constituido por 25 personas de las que un 60% son mujeres. El gerente tiene que seleccionar a una persona de dicho equipo para que represente a la empresa en un certamen internacional. Decide lanzar una moneda: si sale cara, selecciona a una mujer, y si sale cruz, a un hombre.

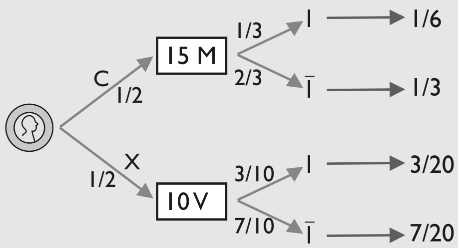
Sabiendo que 5 mujeres y 3 hombres del equipo directivo hablan inglés, determina, justificando la respuesta, la probabilidad de que la persona seleccionada hable inglés.

Solución:

M = “seleccionar mujer”

V = “seleccionar hombre”

I = “saber inglés”



Se aplica la regla de la suma:

$P(I) = 1/6 + 3/20 = 19/60$

60. En una oficina el 70% de los empleados son asturianos. De entre los asturianos, el 50% son hombres, mientras que de los no asturianos, solo son hombres el 20%.

a) ¿Qué porcentaje de empleados no asturianos son mujeres?

b) Calcula la probabilidad de que un empleado de la oficina sea mujer.

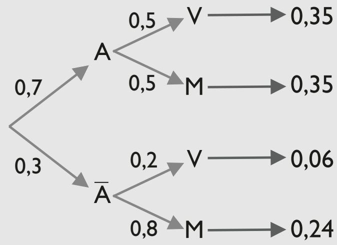
c) Fernando trabaja en dicha oficina. ¿Cuál es la probabilidad de que sea asturiano?

Solución:

A = “ser asturiano”

V = “ser hombre”

M = “ser mujer”



a) $P(M/\bar{A}) = 0,8 \Rightarrow 80\%$

b) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

$P(M) = 0,35 + 0,24 = 0,59$

c) Se utiliza el teorema de Bayes:

$$P(A/V) = \frac{0,035}{0,35 + 0,06} = 0,85$$

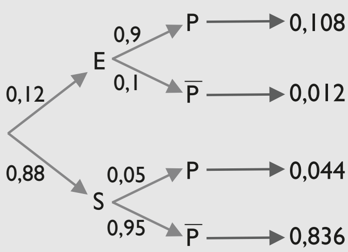
61. El 12% de los habitantes de un país padece cierta enfermedad. Para el diagnóstico de ésta, se dispone de un procedimiento que no es completamente fiable, ya que da positivo en el 90% de los casos de personas realmente enfermas, pero también da positivo en el 5% de personas sanas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que el procedimiento le ha dado positivo?

Solución:

E = “estar enfermo”

S = “estar sano”

P = “dar positivo”



Se aplica el teorema de Bayes:

$$P(A/D) = \frac{0,044}{0,108 + 0,044} = 0,29$$

62. Un distribuidor de bolsas de plástico las vende en lotes de 100. El número de bolsas defectuosas en un lote tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x_i	0	1	2	3	4
P_i	0,9	0,01	0,02	0,03	0,04

Calcula la media y la desviación típica.

Solución:

x_i	P_i	$P_i \cdot x_i$	$P_i \cdot x^2$
0	0,90	0,00	0,00
1	0,01	0,01	0,01
2	0,02	0,04	0,08
3	0,03	0,09	0,27
4	0,04	0,16	0,64
Total	**1,00**	**0,30**	**1,00**

Parámetros:

Media: 0,3 bolsas defectuosas.

Varianza: 0,91

Desviación típica: 0,95

63. Considera el experimento de lanzar dos dados de cuatro caras al aire. Sea **x** la variable aleatoria que representa el valor absoluto de la diferencia de los valores observados. Encuentra la función de probabilidad de **x**

Solución:

	1	**2**	**3**	**4**
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

x_i	0	1	2	3
P_i	0,2500	0,3750	0,2500	0,1250

64. Una variable aleatoria discreta tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x_i	1	2	3	4	5
P_i	0,15	a	b	c	0,1

y se sabe que $P(x < 4) = 0,65$ y $P(x > 2) = 0,6$.

Calcula:

a) la media.

b) la desviación típica.

Solución:

Para calcular los parámetros se calcula previamente el valor de a, b y c:

$$\left.\begin{array}{l} 0,15 + a + b = 0,65 \\ b + c + 0,1 = 0,6 \\ 0,15 + a + b + c + 0,1 = 1 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$a = b = c = 1/4$

a) Media = 2,9

b) Desviación típica = 1,22

65. Se lanza 12 veces una moneda. Calcula:

a) la probabilidad de obtener 5 caras.

b) la esperanza matemática de que salga cara.

c) la desviación típica.

Solución:

• $x \equiv$ Número de caras.

• $B(12; 0,5)$

a) $P(x = 5) = \binom{12}{5} \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^7 = 0,1934$

b) $\mu = np = 12 \cdot 0,5 = 6$

c) $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{12 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 1,73$

66. Se lanza un dado 5 veces. Calcula:

a) la probabilidad de obtener tres cuatros.

b) el número medio de cuatros obtenidos.

c) la desviación típica.

Solución:

• $x \equiv$ Número de cuatros.

• $B(5; 1/6)$

a) $P(x = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0,0322$

b) $\mu = np = 5 \cdot 1/6 = 0,83$

c) $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot 1/6 \cdot 5/6} = 0,83$

67. Un determinado antibiótico produce efectos secundarios en el 25% de las personas que lo toman. Lo ingieren ocho personas. Calcula la probabilidad de que sufran efectos secundarios:

a) a lo sumo dos personas.

b) más de dos personas.

Solución:

- x ≡ Número de personas con efectos secundarios.
- B(8; 0,25)

a) $P(x \le 2) =$

$= \binom{8}{0} \cdot 0{,}75^8 + \binom{8}{1} \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^7 + \binom{8}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^6 =$

$= 0{,}6785$

b) $P(x > 2) = 1 - P(x \le 2) = 0{,}3215$

68. Una moneda está trucada de forma que la probabilidad de obtener cara es 3/7. Se lanza la moneda 10 veces. Calcula:

a) la probabilidad de obtener cinco caras.

b) la probabilidad de obtener a lo sumo dos caras.

Solución:

- x ≡ Número de caras.
- B(10; 3/7)

a) $P(x = 5) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^5 = 0{,}2220$

b) $P(x \le 3) =$

$= \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^9 + \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^8 =$

$= 0{,}1255$

69. Calcula el valor de **k** para que la siguiente función sea de densidad de una variable aleatoria, y calcula la $P(3 \le x \le 4)$

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si} \quad x \in [0, 4] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0, 4] \end{cases}$$

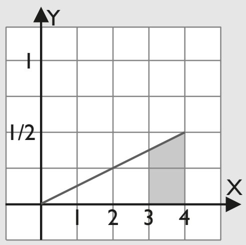
Solución:

a) La función debe cumplir:

- $f(x) \ge 0$ para todo valor del dominio.
- El área comprendida entre el eje X y la función f(x) en el dominio debe ser 1

$\frac{4 \cdot 4k}{2} = 1 \Rightarrow k = 1/8$

b) Se calcula el área del trapecio de la figura:



$P(3 \le x \le 4) = \frac{1/2 + 3/8}{2} \cdot 1 = 7/16$

70. Calcula el valor de **k** para que la siguiente función sea de densidad de una variable aleatoria, y calcula la $P(2 \le x \le 3)$

$$f(x) = \begin{cases} k(x + 1) & \text{si} \quad x \in [0, 4] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0, 4] \end{cases}$$

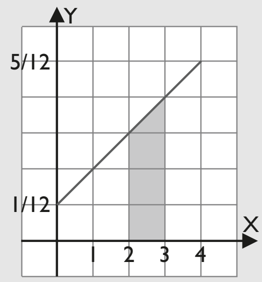
Solución:

a) La función debe cumplir:

- $f(x) \ge 0$ para todo valor del dominio.
- El área comprendida entre el eje X y la función f(x) en el dominio debe ser 1

$\frac{5k + k}{2} \cdot 4 = 1 \Rightarrow k = 1/12$

b) Se calcula el área del trapecio de la figura:



$P(2 \le x \le 3) = \frac{1/3 + 1/4}{2} \cdot 1 = 7/24$

71. En una distribución **N(0,1),** calcula:

a) $P(z \ge -1{,}75)$

b) $P(z \le -2{,}38)$

c) $P(0{,}25 \le z \le 1{,}65)$

d) $P(-2 \le z \le 2)$

Solución:

a) $P(z \le 1{,}75) = 0{,}9599$

b) $1 - P(z \le 2{,}38) = 0{,}0087$

c) $P(z \le 1{,}65) - P(z \le 0{,}25) = 0{,}3518$

d) $P(z \le 2) - P(z \le -2) = P(z \le 2) - 1 + P(z \le 2) =$

$= 2P(z \le 2) - 1 = 0{,}9544$

72. En una distribución **N(18; 2,5),** calcula:

a) $P(x \ge 17)$

b) $P(15 \le x \le 21)$

Solución:

a) $P(x \ge 17) = P\left(z \ge \frac{17 - 18}{2{,}5}\right) = P(z \ge -0{,}4) =$

$= P(z \le 0{,}4) = 0{,}6554$

b) $P(15 \le x \le 21) = P\left(\frac{15 - 18}{2{,}5} \le z \le \frac{21 - 18}{2{,}5}\right) =$

$= P(-1{,}2 \le z \le 1{,}2) = P(z \le 1{,}2) - P(z \le -1{,}2) =$

$= P(z \le 1{,}2) - 1 + P(z \le 1{,}2) = 2P(z \le 1{,}2) - 1 = 0{,}7698$

73. En una normal **N(0,1),** calcula el valor de **k** en los siguientes casos:

a) $P(z \geq k) = 0{,}9066$

b) $P(-k \leq z \leq k) = 0{,}8$

Solución:

a) $k = -1{,}32$

b) $P(-k \leq z \leq k) = P(z \leq k) - P(z \leq -k) =$

$= P(z \leq k) - 1 + P(z \leq k) = 2P(z \leq k) - 1$

$2P(x \leq k) - 1 = 0{,}8 \Rightarrow P(z \leq k) = \dfrac{0{,}8 + 1}{2} = 0{,}9 \Rightarrow$

$k = 1{,}28$

74. En una distribución **N(8; 1,5),** calcula el valor de **k** en los siguientes casos:

a) $P(x \geq k) = 0{,}05$

b) $P(-k \leq x \leq k) = 0{,}99$

Solución:

a) $P\left(z \geq \dfrac{k-8}{1{,}5}\right) = 0{,}05 \Rightarrow P\left(z \leq \dfrac{k-8}{1{,}5}\right) = 0{,}95$

$\dfrac{k-8}{1{,}5} = 1{,}64 \Rightarrow k = 10{,}46$

b) $P(-k \leq x \leq k) \Rightarrow 2P(x \leq k) - 1 = 0{,}99 \Rightarrow$

$P(x \leq k) = \dfrac{0{,}99 + 1}{2} = 0{,}995$

Tipificando: $\dfrac{k-8}{1{,}5} = 2{,}58 \Rightarrow k = 11{,}87$

Problemas

75. Una caja contiene 7 tarjetas de la misma forma y tamaño: 4 de color amarillo y 3 de color rojo. Se extrae de ella al azar una tarjeta, se anota su color y, sin devolverla a la caja, extraemos de ésta una segunda tarjeta. Se pide:

a) escribir el espacio muestral.

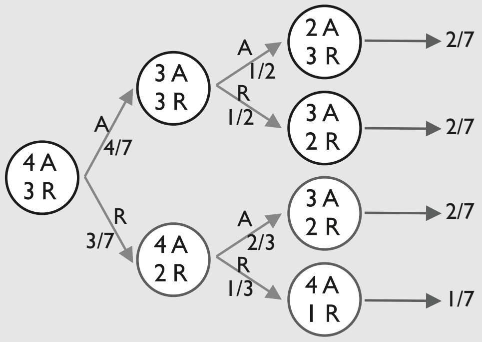
b) hallar la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales del espacio muestral.

Solución:

A = "sacar bola amarilla"

R = "sacar bola roja"

E = {(A, A), (A, R), (R, A), (R, R)}



76. Se ha realizado un estudio entre 800 estudiantes, obteniéndose los datos siguientes: hay 440 mujeres, de las cuales cursan estudios técnicos 300 y el resto estudian humanidades. De los 360 varones, 200 cursan estudios técnicos y 160 humanidades. Se selecciona al azar un alumno. Se pide:

a) probabilidad de que estudie humanidades si se sabe que es varón.

b) probabilidad de que la persona elegida sea mujer si se sabe que realiza estudios técnicos.

c) ¿Son independientes los sucesos ser varón y estudiar humanidades?

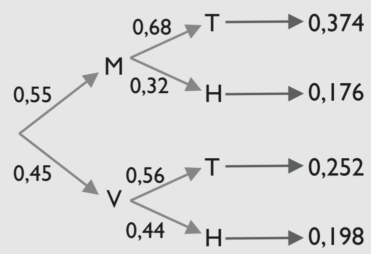
Solución:

M = "ser mujer"

V = "ser varón"

T = "realizar estudios técnicos"

H = "realizar estudios de humanidades"



a) $P(H/V) = 0{,}44$

b) Se aplica el teorema de Bayes:

$P(M/T) = \dfrac{0{,}374}{0{,}374 + 0{,}252} = 0{,}6$

c) $P(V) = 0{,}45$

$P(H) = 0{,}374$

$P(V) \cdot P(H) = 0{,}168$

$P(V \cap H) = 0{,}198 \Rightarrow P(V \cap H) \neq P(V) \cdot P(H)$

Son dependientes.

77. En una asesoría fiscal se ha contratado a tres personas para hacer declaraciones de renta. La primera de ellas se encarga de efectuar el 30%, la segunda el 45% y la tercera el 25% restante. Se ha comprobado que de las declaraciones realizadas por la primera persona, el 1% son erróneas, la segunda comete errores en el 3% de los casos y la tercera en el 2% de los casos.

a) Calcula la probabilidad de que al elegir al azar una declaración de la renta, ésta sea errónea.

b) Al elegir una declaración que resultó correcta, ¿cuál es la probabilidad de que la haya realizado la segunda persona?

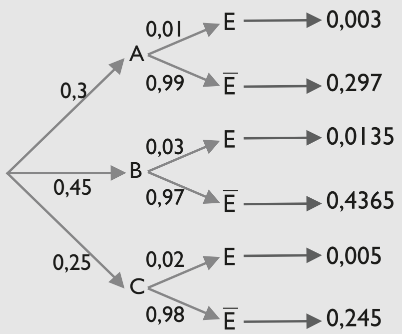
Solución:

A = "estar realizada por la primera persona"

B = "estar realizada por la segunda persona"

C = "estar realizada por la tercera persona"

E = "declaración errónea"



a) Se aplica la regla de la suma o de la probabilidad total:

$P(E) = 0{,}003 + 0{,}0135 + 0{,}005 = 0{,}0215$

b) Se utiliza el teorema de Bayes:

$$P(B/\overline{E}) = \frac{0{,}4365}{0{,}297 + 0{,}4365 + 0{,}245} = 0{,}45$$

78. Un estuche contiene 5 lápices de igual forma y tamaño: 2 de color azul y 3 de color verde. Se extrae un lápiz del estuche y, a continuación, sin devolución, se extrae otro lápiz. Se pide:

a) escribir los sucesos elementales que definen los sucesos M = "Solo ha salido un lápiz de color verde" y N = "El segundo lápiz extraído es de color azul".

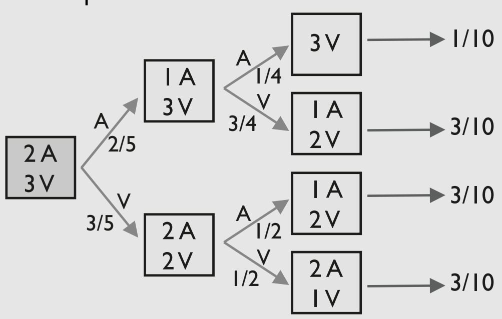
b) calcular las probabilidades de los sucesos M, N y $M \cap N$

c) Estudia la independencia de los sucesos M y N. Razona la respuesta.

Solución:

A = "sacar lápiz de color azul"

V = "sacar lápiz de color verde"



a) $M = (A \cap V) \cup (V \cap A)$

$N = (A \cap A) \cup (V \cap A)$

b) $P(M) = 3/10 + 3/10 = 3/5$

$P(N) = 1/10 + 3/10 = 2/5$

$M \cap N = (V \cap A)$

$P(M \cap N) = 3/10$

c) $P(M) \cdot P(N) = 6/25$

$P(M \cap N) \neq P(M) \cdot P(N) \Rightarrow$ Son dependientes.

79. En un quiosco ganan 150 € diarios si no llueve, y si llueve pierden 20 € al día. Si la probabilidad de lluvia es 0,3, ¿cuál es la ganancia esperada ese día?

Solución:

$\mu = 150 \cdot 0{,}7 - 20 \cdot 0{,}3 = 99$ €

80. Una variable aleatoria **x** toma los valores 1, 2, 3, 4 y 5, y las probabilidades que toma cada valor son $P(x = x_i) = k \cdot x_i$, siendo **k** un número real.

a) Calcula el valor de **k**

b) Calcula $P(x < 4)$

Solución:

a) $k + 2k + 3k + 4k + 5k = 1 \Rightarrow k = 1/15$

b) $P(x < 4) = 1/15 + 2/15 + 3/15 = 6/15 = 2/5$

81. En un juego con una baraja española con 40 cartas, una persona recibe 15 céntimos cuando saca una sota o un caballo, y 5 céntimos si saca un rey o un as. Si saca cualquier otra carta, tiene que pagar 4 céntimos. ¿Cuál es la ganancia esperada para una persona que entra en el juego?

Solución:

$\mu = 15 \cdot 8/40 + 5 \cdot 8/40 - 4 \cdot 24/40 = 8/5 = 1{,}6$

82. Un tratamiento contra la hipertensión arterial produce una mejoría en el 75% de los casos. Se administra el tratamiento a cinco pacientes. Calcula:

a) la probabilidad de que los 5 pacientes mejoren.

b) la probabilidad de que 3 pacientes no obtengan mejoría.

Solución:

- $x \equiv$ Número de pacientes que mejoran.
- $B(5; 0{,}75)$

a) $P(x = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}75^5 = 0{,}2373$

b) $P(x = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}75^2 \cdot 0{,}25^3 = 0{,}0879$

83. La probabilidad de que el proceso en el horno de secado de pinturas para coches sea defectuoso es del 2%. Se han secado 100 coches. Calcula:

a) el número medio de secados defectuosos.

b) la desviación típica.

Solución:

- $x \equiv$ Número de secados defectuosos.
- B(100; 0,02)

a) $\mu = np = 100 \cdot 0{,}02 = 2$

b) $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98} = 1{,}4$

84. De una baraja española se extraen 12 cartas, con devolución. Calcula:

a) la probabilidad de obtener a lo sumo dos reyes.

b) el número medio de reyes.

Solución:

- $x \equiv$ Número de reyes.
- B(12; 0,1)

a) $P(x \le 2) =$

$= \binom{12}{0} \cdot 0{,}9^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^{11} + \binom{12}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{10} =$

$= 0{,}8891$

b) $\mu = np = 12 \cdot 0{,}1 = 1{,}2$

85. Un test de inteligencia está compuesto de 80 preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro respuestas de las que solo una es correcta. Se contesta aleatoriamente. Halla la media, la varianza y la desviación típica del número de preguntas acertadas.

Solución:

- $x \equiv$ Número de respuestas acertadas.
- B(80; 0,25)

a) $\mu = n \cdot p = 80 \cdot 0{,}25 = 20$

b) $V = n \cdot p \cdot q = 80 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 15$

c) $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{15} = 3{,}87$

86. La probabilidad de que un jugador de golf haga hoyo en un lanzamiento a 12 m de distancia es 0,4. Realiza 5 lanzamientos. Calcula:

a) la probabilidad de obtener 5 hoyos.

b) la probabilidad de obtener a lo sumo 2 hoyos.

c) el número medio de hoyos.

d) la desviación típica.

Solución:

- $x \equiv$ Número de hoyos.
- B(5; 0,4)

a) $P(x = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}4^5 = 0{,}0102$

a) $P(x \le 2) =$

$= \binom{5}{0} \cdot 0{,}6^5 + \binom{5}{1} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^4 + \binom{5}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 =$

$= 0{,}6826$

c) $\mu = np = 5 \cdot 0{,}4 = 2$

d) $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = 1{,}1$

87. La duración de cierto tipo de batería sigue una distribución normal de media 3 años, con una desviación típica de 0,5 años.

a) ¿Qué porcentaje de baterías se espera que duren entre 2 y 4 años?

b) Si una batería lleva funcionando 3 años, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 4,5 años?

Solución:

- $x \equiv$ Número de años.
- N(3; 0,5)

a) $P(2 \le x \le 4) = P\left(\frac{2-3}{0{,}5} \le z \le \frac{4-3}{0{,}5}\right) =$

$= P(-2 \le z \le 2) = P(z \le 2) - P(z \le -2) =$

$= P(z \le 2) - 1 + P(z \le 2) =$

$= 2P(z \le 2) - 1 = 0{,}9544 = 95{,}44\%$

b) $P(3 \le x \le 4{,}5) = P\left(\frac{3-3}{0{,}5} \le z \le \frac{4{,}5-3}{0{,}5}\right) =$

$= P(0 \le z \le 3) = P(z \le 3) - P(z \le 0) = 0{,}4987$

88. El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 10 km está normalmente distribuido con una media de 60 minutos y una desviación típica de 9 minutos.

a) Calcula la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos.

b) Calcula la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 55 minutos o más de 65 minutos.

c) En una fiesta de animación al deporte participan 500 personas sanas. Calcula cuántas de ellas invertirán en hacer el recorrido entre 50 y 60 minutos.

Solución:

- $x \equiv$ Tiempo en minutos que se invierte.
- N(60; 9)

a) $P(x \le 50) = P\left(z \le \frac{50-60}{9}\right) = P(z \le -1{,}11) =$

$= 1 - P(z \le 1{,}11) = 0{,}1335$

b) $P(x \le 55) + P(x \ge 65) =$

$= P\left(z \le \frac{55-60}{9}\right) + P\left(z \le \frac{65-60}{9}\right) =$

$= P(z \le -0{,}56) + P(z \ge 0{,}56) =$

$= 1 - P(z \le 0{,}56) + 1 - P(z \le 0{,}56) =$

$= 2 - 2P(z \le 0{,}56) = 0{,}5754$

c) $500 \cdot P(50 \le x \le 60) =$

$= 500 \cdot P\left(\frac{50-60}{9} \le z \le \frac{60-60}{9}\right) =$

$= 500 \cdot P(-1{,}11 \le z \le 0) =$

$= 500 \cdot [P(z \le 0) - P(z \le -1{,}11)] =$

$= 500 \cdot [P(z \le 0) - 1 + P(z \le 1{,}11)] =$

$= 500 \cdot 0{,}3665 = 183{,}25 \approx 183$ personas.

89. El número de libros prestados semanalmente en la biblioteca de un centro escolar sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 1,5. Calcula la probabilidad de que en una semana se presten entre 25 y 30 libros.

Solución:

a) $x \equiv$ Número de libros prestados semanalmente.

b) $N(25; 1{,}5)$

c) $P(25 \le x \le 30) = P\left(\frac{25-25}{1{,}5} \le z \le \frac{30-25}{1{,}5}\right) =$

$= P(0 \le z \le 3{,}33) = P(z \le 3{,}33) - P(z \le 0) =$

$= 0{,}9996 - 0{,}5 = 0{,}4996$

90. En un estudio realizado por una empresa hotelera, la distribución del tiempo de estancia del viajero en el hotel fue normal, con una media de 3,7 días y una desviación típica de 1,1 días.

a) ¿Qué probabilidad habrá de que un viajero permanezca en el hotel entre 2 y 5 días?

b) De 500 viajeros, ¿cuántos habrán permanecido entre 4 y 7 días?

Solución:

- $x \equiv$ Días de estancia.
- $N(3{,}7; 1{,}1)$

a) $P(2 \le x \le 5) = P\left(\frac{2-3{,}7}{1{,}1} \le z \le \frac{5-3{,}7}{1{,}1}\right) =$

$= P(-1{,}55 \le z \le 1{,}18) =$

$= P(z \le 1{,}18) - P(z \le -1{,}55) =$

$= P(z \le 1{,}18) - 1 + P(z \le 1{,}55) = 0{,}8204$

b) $500 \cdot P(4 \le x \le 7) =$

$= P\left(\frac{4-3{,}7}{1{,}1} \le z \le \frac{7-3{,}7}{1{,}1}\right) =$

$= 500 \cdot P(0{,}27 \le z \le 3) =$

$= 500 \cdot [P(z \le 3) - P(z \le 0{,}27)] =$

$= 500 \cdot 0{,}3923 = 196{,}15 \approx 196$ personas.

91. La edad de una población se ajusta a una normal de media 27 años y una desviación estándar de 1,8 años. Si se toman aleatoriamente 230 personas, ¿cuántas estarán comprendidas entre los 25 y los 30 años?

Solución:

a) $x \equiv$ Años de edad.

b) $N(27; 1{,}8)$

c) $230 \cdot P(25 \le x \le 30) =$

$230 \cdot P\left(\frac{25-27}{1{,}8} \le z \le \frac{30-27}{1{,}8}\right) =$

$= 230 \cdot P(-1{,}11 \le z \le 1{,}67) =$

$= 230\,[P(z \le 1{,}67) - P(z \le -1{,}11)] =$

$= 230\,[P(z \le 1{,}67) - 1 + P(z \le 1{,}11)] =$

$= 230 \cdot 0{,}819 = 188{,}37 \approx 188$ personas.

Para profundizar

92. El estudio de un cuestionario sobre el grado de satisfacción de los usuarios de servicios públicos revela que la satisfacción sigue una distribución normal, con una nota media de 5,7 puntos y con una desviación típica de 0,5 puntos.

a) Calcula la probabilidad de que la calificación de un usuario esté entre 6 y 7 puntos.

b) De 1 000 usuarios, ¿cuántos habrán otorgado una nota entre 4 y 6 puntos?

Solución:

- $x \equiv$ Nota de satisfacción.
- $N(5{,}7; 0{,}5)$

a) $P(6 \le x \le 7) = P\left(\frac{6-5{,}7}{0{,}5} \le z \le \frac{7-5{,}7}{0{,}5}\right) =$

$= P(0{,}6 \le z \le 2{,}6) = P(z \le 2{,}6) - P(z \le 0{,}6) = 0{,}2696$

b) $1\,000 \cdot P(4 \le x \le 6) =$

$= 1\,000 \cdot P\left(\frac{4-5{,}7}{0{,}5} \le z \le \frac{6-5{,}7}{0{,}5}\right) =$

$= 1\,000 \cdot P(-3{,}4 \le z \le 0{,}6) =$

$= 1\,000\,[P(z \le 0{,}6) - P(z \le -3{,}4)] =$

$= 1\,000\,[P(z \le 0{,}6) - 1 + P(z \le 3{,}4)] =$

$= 1\,000 \cdot 0{,}7254 = 725{,}4 \approx 725$ personas.

93. El tiempo T requerido para completar una solicitud de asistencia económica tiene una distribución normal de media 45 minutos y desviación estándar de 5 minutos. Encuentra la probabilidad de que una persona rellene la instancia:

a) en menos de 40 minutos.

b) en 35 a 55 minutos.

Solución:

- x ≡ Tiempo en minutos.
- N(45; 5)

a) $P(x \leq 40) = P\left(z \leq \frac{40-45}{5}\right) = P(z \leq -1) =$

$= 1 - P(z \leq 1) = 0,1587$

b) $P(35 \leq x \leq 55) = P\left(\frac{35-45}{5} \leq z \leq \frac{55-45}{5}\right) =$

$= P(-2 \leq z \leq 2) = P(z \leq 2) - P(z \leq -2) =$

$= P(z \leq 2) - 1 + P(z \leq 2) = 2P(z \leq 2) - 1 = 0,9544$

94. Un atleta de tiro con arco da en el centro de la diana el 60% de los lanzamientos. Se supone que todos los tiros son en las mismas condiciones. Calcula la probabilidad de que en 50 lanzamientos acierte al menos en 30 ocasiones.

Solución:

a) x ≡ Número de dianas.

b) B(50; 0,6)

c) $P(x \geq 30)$

Se decide si se puede normalizar:

$np = 50 \cdot 0,6 = 30 > 5$

$nq = 50 \cdot 0,4 = 20 > 5$

Se puede ajustar a una normal.

Se normaliza:

$\mu = np = 50 \cdot 0,6 = 30$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 3,46$

$B(50; 0,6) \Rightarrow N(30; 3,46)$

Se corrige la continuidad y se tipifica:

$P(x \geq 30) \Rightarrow P(x \geq 29,5) = P\left(z \geq \frac{29,5-30}{3,46}\right) =$

$P(z \geq -0,14) = P(z \leq 0,14) = 0,5557$

95. Los paquetes recibidos en un almacén se ajustan a una distribución normal de media 300 kg y una desviación típica de 50 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que 25 de esos paquetes, elegidos al azar, excedan el límite de carga del montacargas donde se van a meter, que es de 8 200 kg?

Solución:

a) x ≡ Peso en kilos del paquete.

b) N(300; 50)

c) $8\,200 < 25 \cdot x \Rightarrow x > 328$ kg

$P(x \geq 328,5) = P\left(z \geq \frac{328,5-300}{50}\right) =$

$= P(z \geq 0,57) = 1 - P(z \leq 0,57) = 0,2843$

96. La frecuencia cardíaca de los varones fumadores es una variable aleatoria que se ajusta a una normal de media 70 lpm. Calcula:

a) la desviación típica, sabiendo que la probabilidad de que un varón fumador tenga más de 80 lpm es de 0,0228

b) Si se mide el ritmo cardíaco a 400 varones, ¿cuántos tendrán entre 60 y 70 lpm?

Solución:

- x ≡ Número de latidos por minuto.
- B(70; σ)

a) $P(x \geq 80) = 0,0228$

$P(x \geq 80) = 1 - P(x \leq 80) = 0,0228 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x \leq 80) = 0,9772$

Tipificando:

$P\left(z \leq \frac{80-70}{\sigma}\right) = 0,9772$

$\frac{80-70}{\sigma} = 2 \Rightarrow \sigma = 5$

b) $400 \cdot P(60 \leq x \leq 70) = 400 \cdot P(-2 \leq z \leq 0) =$

$= 400[P(z \leq 0) - 1 + P(z \leq 2)] = 400 \cdot 0,4772 =$

$= 190,88 \approx 191$ personas.

Paso a paso

97. La probabilidad de que al lanzar una chincheta quede con la punta hacia arriba es de 2/3. Se lanzan 10 chinchetas.

- Calcula la probabilidad de que queden exactamente 6 con la punta hacia arriba.
- Calcula los parámetros.
- Calcula la probabilidad de que queden a lo sumo 6 con la punta hacia arriba.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

98. Define un procedimiento para calcular la probabilidad en una distribución **N(0, 1).** Calcula:

a) $P(z \leq 1{,}21)$ b) $P(z \geq 1{,}21)$ c) $P(0{,}47 \leq z \leq 1{,}78)$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

99. Define un procedimiento para calcular la probabilidad en una distribución **N(μ, σ)**. Aplícalo al siguiente problema:

Se sabe que el peso de las personas mayores de 18 años de una ciudad se distribuye normalmente con una media de 72 kg y una desviación típica de 6 kg. Calcula la probabilidad de que una persona tomada al azar pese:

- menos de 80 kg
- más de 80 kg
- entre 70 y 80 kg

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

100. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es,** elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

101. Utilizando la hoja correspondiente, calcula las siguientes probabilidades y los parámetros correspondientes:

a) En una B(5; 0,4), $P(x = 3)$
b) En una B(7; 0,1), $P(x \leq 5)$
c) En una B(20; 0,3), $P(x = 10)$
d) En una B(15; 0,7), $P(x = 14)$
e) En una B(22; 0,6), $P(x \leq 9)$
f) En una B(50; 0,5), $P(x \leq 25)$

Solución:

a) $P(x = 3) = 0{,}2304$
$\mu = 2$
$\sigma = 1{,}1$

b) $P(x \leq 5) = 0{,}9999$
$\mu = 0{,}7$
$\sigma = 0{,}79$

c) $P(x = 10) = 0{,}0308$
$\mu = 6$
$\sigma = 2{,}05$

d) $P(x = 14) = 0{,}0305$
$\mu = 10{,}5$
$\sigma = 1{,}77$

e) $P(x \leq 9) = 0{,}0551$
$\mu = 13{,}2$
$\sigma = 2{,}3$

f) $P(x \leq 25) = 0{,}5561$
$\mu = 25$
$\sigma = 3{,}54$

102. Utilizando la hoja correspondiente, resuelve el siguiente problema:

Un test de inteligencia está compuesto de 80 preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro respuestas de las que solo una es correcta. Si se contesta aleatoriamente, halla la media, la varianza y la desviación típica del número de preguntas acertadas.

Solución:

a) $x \equiv$ Número de respuestas acertadas.

b) B(80; 0,25)

c) $\mu = 20$

$V = 15$

$\sigma = 3{,}87$

103. Utilizando la hoja correspondiente, calcula en una **N(0, 1)** las siguientes probabilidades:

a) $P(z \leq 0{,}5)$

b) $P(z \leq 1{,}72)$

c) $P(z \geq 2{,}4)$

d) $P(z \leq -3{,}56)$

Solución:

a) 0,6915 b) 0,9573

c) 0,0082 d) 0,0002

104. Utilizando la hoja correspondiente, calcula en una **N(0, 1)** las siguientes probabilidades:

a) $P(1{,}5 \leq z \leq 2)$

b) $P(-2{,}3 \leq z \leq 3{,}7)$

c) $P(-3{,}4 \leq z \leq -1{,}8)$

d) $P(-1{,}6 \leq z \leq 1{,}6)$

Solución:

a) 0,0441 b) 0,9892 c) 0,0356 d) 0,8904

105. Utilizando la hoja correspondiente, calcula en una N(20, 4) las siguientes probabilidades:

a) $P(x \leq 25)$

b) $P(x \geq 17)$

c) $P(23 \leq x \leq 27)$

d) $P(15 \leq x \leq 18)$

Solución:

a) 0,8944 b) 0,7734 c) 0,1866 d) 0,2029

106. El peso de los recién nacidos sigue una distribución normal de media 3,5 kg y una desviación típica de 0,6 kg. Calcula la probabilidad de que un recién nacido pese entre 2,7 kg y 4 kg

Solución:

a) $x \equiv$ Peso de un recién nacido.

b) N(3,5; 0,6)

c) $P(2{,}7 \leq x \leq 4) = 0{,}7065$

107. El número de libros prestados semanalmente en la biblioteca de un centro escolar sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 1,5. Calcula la probabilidad de que en una semana se presten entre 25 y 30 libros.

Solución:

a) $x \equiv$ Número de libros prestados semanalmente.

b) N(25; 1,5)

c) $P(25 \leq x \leq 30) = 0{,}4996$