EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2019
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (*3,25 puntos*) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

a) (*2 puntos*) ¿Para qué valores de x e y se tiene *AB* = *C*?
b) (*1,25 puntos*) Calcular, si existe, la matriz inversa de *C*.

SOLUCIÓN

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x-1-2y & x-4y \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

$$A\cdot B=C \iff \begin{pmatrix} -2x-1-2y & x-4y \\ -9 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y-1=2 \\ x-4y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=3 \\ 2x-8y=-6 \end{cases} \Rightarrow -10y=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{3}{10} \Rightarrow x=-3+4y=-3+\frac{12}{10}=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5} \quad \text{es decir: } x=-\frac{9}{5}\ ,\ y=\frac{3}{10}$$

b) $|C|=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{vmatrix}=8-27=-19\neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}$

$$C=c_{ij}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adjunta}} (C_{ij})=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Traspuesta}} (C_{ji})=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inversa}} C^{-1}=\frac{(C_{ji})}{|C|}=\begin{pmatrix} -4/19 & -3/19 \\ -9/19 & -2/19 \end{pmatrix}$$

2. (*3,25 puntos*) El precio (en euros) de una acción de una compañía entre las nueve y las diez de la mañana ha venido dado por la siguiente expresión

$$P(x)=12-\frac{2x-8}{x^2+4x+4}$$

donde $x\in[0,60]$ es el tiempo en minutos desde las nueve de la mañana. Calcular:
a) (*0,25 puntos*) El precio de la acción a las nueve y media.
b) (*1 punto*) Entre las nueve y las diez de la mañana, ¿durante cuánto tiempo la acción ha tenido un precio mayor que 12 euros?
c) (*2 puntos*) El máximo y mínimo precio que ha alcanzado la acción entre las nueve y las diez de la mañana.

SOLUCIÓN

a) En este caso $x=30 \Rightarrow P(30)=12-\frac{60-8}{900+120+4}=12-\frac{52}{1024}=11{,}95$ €

b) $12-\frac{2x-8}{x^2+4x+4}>12 \iff \frac{2(x-4)}{(x+2)^2}<0 \Rightarrow x-4<0 \Rightarrow x<4$ luego entre las 9:00 h y las 9:04 h.

c) $P'(x)=-\frac{2(x^2+4x+4)-(2x-8)(2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}=-\frac{2x^2+8x+8-4x^2-8x+16x+32}{(x^2+4x+4)^2}=\frac{2x^2-16x-40}{(x^2+4x+4)^2}=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x^2-16x-40=0 \Rightarrow x^2-8x-20=0 \Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64+80}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{8\pm 12}{2}= \begin{cases} x=-2\notin[0,60] \\ x=10 \end{cases}$$

$$P''(x)=\frac{(4x-16)(x^2+4x+4)^2-(2x^2-16x-40)2(x^2+4x+4)(2x+4)}{(x^2+4x+4)^4} \Rightarrow P''(10)>0 \Rightarrow x=10 \text{ es un mínimo}$$

El precio mínimo lo alcanza a las 9:10 horas con un valor de $P(10)=12-\dfrac{20-8}{100+40+4}=12-\dfrac{12}{144}=11{,}92$ €

El precio máximo lo alcanza en alguno de los extremos del intervalo $[0\,,60]$:

$$\left.\begin{array}{l} P(0)=12-\dfrac{-8}{4}=14 \text{ €} \\ P(60)=12-\dfrac{120-8}{3600+240+4}=11{,}97 \text{ €} \end{array}\right| \Rightarrow \text{ el valor máximo lo alcanza a las 9:00 horas con un valor de 14 euros.}$$

3. (*3,5 puntos*) Se va a realizar un estudio de mercado para estimar la proporción de consumidores que conoce una determinada marca de yogures. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple de consumidores, se va a preguntar a cada uno si conoce la marca y a partir de los resultados se construirá el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 91%.

a) (*2 puntos*) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,08 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?

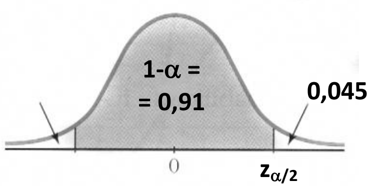
b) (*1,5 puntos*) Decidimos tomar una muestra de tamaño de 175 consumidores; les preguntamos y un total de 126 responden que conocen la marca. Calcular el intervalo de confianza al 91% para la proporción de consumidores que conocen la marca.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN

Calculemos el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 91%:



$$1-\alpha=0{,}91 \Rightarrow \alpha=0{,}09 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0{,}045 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=1-0{,}045=0{,}955$$

Buscamos en la tabla el valor más aproximado a 0,955 (0,9554) que se corresponde con un valor crítico $z_{\alpha/2}=1{,}70$.

a) Si el intervalo de confianza ha de tener una amplitud no mayor de 0,08, el error máximo admisible E debe ser de 0,04. Al no tener datos previos, consideramos que la proporción de conocedores y de no conocedores de la marca de yogures es del 50%. Tenemos:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} \Rightarrow 0{,}04 = 1{,}70 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{n}} \Rightarrow \left(\frac{0{,}04}{1{,}70}\right)^2 = \frac{0{,}25}{n} \Rightarrow n = \frac{0{,}25}{\frac{0{,}0016}{2{,}89}} = 451{,}56$$

Luego debemos escoger una muestra de 452 consumidores.

b) Ahora $n = 175$, $pr = \frac{126}{175} = 72\% = 0{,}72$.

El error máximo admisible es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} = 1{,}70 \cdot \sqrt{\frac{0{,}72 \cdot 0{,}28}{175}} = 0{,}0577$

y el intervalo de confianza: $(0{,}72 - 0{,}0577 \ ; \ 0{,}72 + 0{,}0577) = (0{,}6623 \ ; \ 0{,}7777)$

OPCIÓN B

1. (*3,25 puntos*) Un ebanista fabrica sillas y taburetes. Cada silla necesita 4 kilos de madera y 1 hora de trabajo, mientras que cada taburete necesita 2 kilos de madera y 3 horas de trabajo. El beneficio por cada silla es de 70 euros y por cada taburete es de 50 euros. Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes; dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo. ¿Cuántas sillas y taburetes debe fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el valor del beneficio en ese caso?

SOLUCIÓN

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

MUEBLES	NÚMERO	KILOS DE MADERA	HORAS DE TRABAJO	BENEFICIO
Sillas	x	$4x$	x	$70x$
Taburetes	y	$2y$	$3y$	$50y$
Condiciones:	$x \geq 6$, $y \geq 4$	$4x + 2y \leq 72$	$x + 3y \leq 48$	$F(x,y) = 70x + 50y$

La función objetivo es $F(x,y) = 70x + 50y$ (beneficio) que debe ser máxima.

El conjunto de restricciones a las que debe estar sometida la solución son:

$\{ x \geq 6 \ , \ y \geq 4 \ , \ 4x + 2y \leq 72 \ , \ x + 3y \leq 48 \}$

Obtengamos, gráficamente, la región factible (solución del conjunto de restricciones):

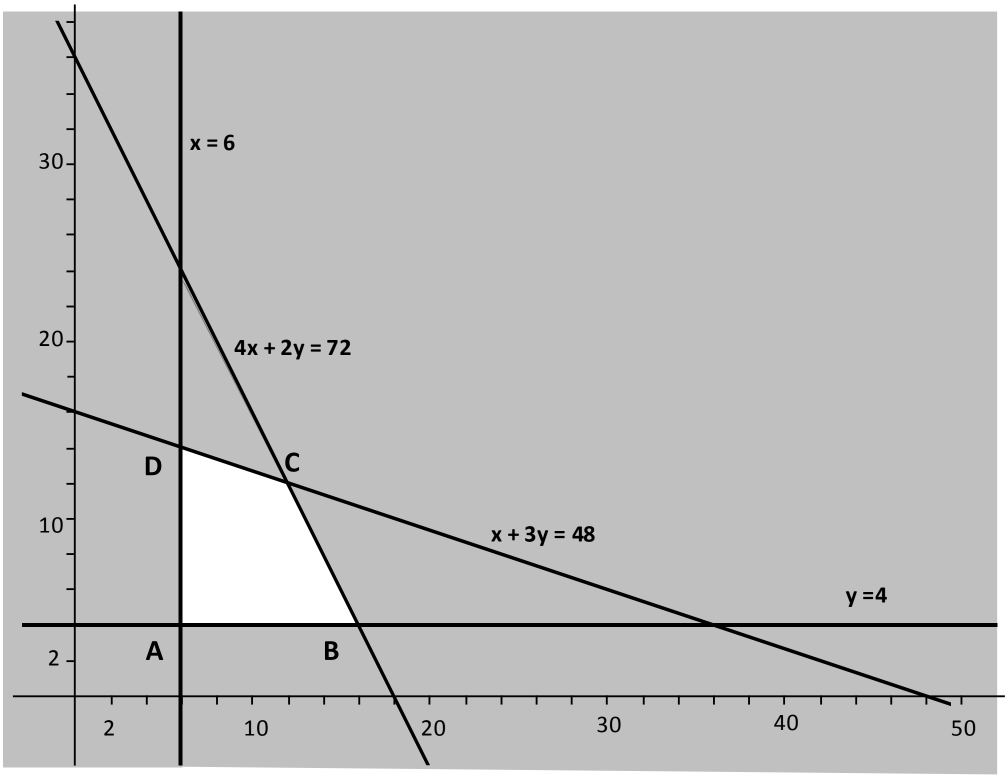
- La recta $x = 6$ es paralela al eje de ordenadas y la inecuación $x \geq 6$ tiene por solución el semiplano de su derecha (en blanco).

- La recta $y = 4$ es paralela al eje de abscisas y la solución de la inecuación $y \geq 4$ es el semiplano superior (en blanco).

- La recta $4x + 2y = 72$ pasa por los puntos $(18,0)$ y $(0,36)$. La solución de la inecuación $4x + 2y \leq 72$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

- La recta $x + 3y = 48$ pasa por $(48,0)$ y $(0,16)$. La inecuación $x + 3y \leq 48$ tiene por solución el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas (en blanco).

La región factible (en blanco) es el cuadrilátero de vértices A, B, C, y D. La función objetivo se optimiza en alguno de sus vértices. Obtengamos las coordenadas de los vértices y el valor de la función objetivo $F(x,y) = 70x + 50y$ en ellos:



Vértice A: $A(6,4) \Rightarrow F(6,4)=70\cdot 6+50\cdot 4=620$

Vértice B: $\begin{cases} y=4 \\ 4x+2y=72 \end{cases} \Rightarrow 4x+8=72 \Rightarrow x=16 \Rightarrow B(16,4) \Rightarrow F(16,4)=1320$

Vértice C: $\begin{cases} 4x+2y=72 \\ x+3y=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-y=-36 \\ 2x+6y=96 \end{cases} \Rightarrow 5y=60 \Rightarrow y=12 \Rightarrow x=48-3\cdot 12=12 \Rightarrow$

$\Rightarrow C(12,12) \Rightarrow F(12,12)=70\cdot 12+50\cdot 12=1440$

Vértice D: $\begin{cases} x=6 \\ x+3y=48 \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{48-6}{3}=14 \Rightarrow D(6,14) \Rightarrow F(6,14)=70\cdot 6+50\cdot 14=1120$

Por lo tanto, para maximizar el beneficio, que será de 1440 €, debe fabricar 12 sillas y 12 taburetes.

2. (*3,25 puntos*)

a) (*2 puntos*) Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+3x-6$, con $x\in\mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tales que f tenga un máximo relativo en $x=-2$ con valor $f(-2)=-6$.

b) (*1,25 puntos*) Calcular:

$$\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}}-3xe^{-4x^2}\right)dx$$

SOLUCIÓN

a) $f(x)=ax^3+bx^2+3x-6 \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+3$

$x=-2$ máximo relativo de la función $\Rightarrow f'(-2)=0 \Rightarrow 12a-4b+3=0 \Rightarrow 12a-4b=-3$ (*)

$f(-2)=-6 \Rightarrow -8a+4b-6-6=-6 \Rightarrow -8a+4b=6$ (*)

De las ecuaciones (*): $4a=3 \Rightarrow a=\dfrac{3}{4} \Rightarrow b=\dfrac{6+6}{4}=3$

b) Calculemos una primitiva de la función:

$$\int \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3x \cdot e^{-4x^2} \right) dx = \frac{5\cdot 2}{16} \int \frac{16x}{2\sqrt{8x^2+1}}\, dx - \frac{3}{-8} \int -8x \cdot e^{-4x^2} = \frac{5}{8}\cdot\sqrt{8x^2+1} + \frac{3}{8}\cdot e^{-4x^2}$$

Luego: $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3x \cdot e^{-4x^2} \right) dx = \left[\frac{5}{8}\cdot\sqrt{8x^2+1} + \frac{3}{8}\cdot e^{-4x^2} \right]_0^1 = \left(\frac{15}{8} + \frac{3}{8}\cdot e^{-4} \right) - \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \right) = \frac{7}{8} + \frac{3}{8\cdot e^4} \simeq 0{,}88$

3. (*3,5 puntos*) Según los datos del Instituto Nacional de Estadística, el 49,3% de la población aragonesa son hombres y el 50,7% son mujeres. Del total de hombres, un 80,9% tienen menos de 65 años; del total de mujeres, un 75,9% tienen menos de 65 años.

a) (*0,75 puntos*) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de menos de 65 años?

b) (*1 punto*) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 65 años?

c) (*1 punto*) Elegimos una persona de Aragón de entre las que tienen menos de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

d) (*0,75 puntos*) Si se eligen al azar (con reemplazamiento) tres personas de Aragón, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las tres sea mujer?

SOLUCIÓN

Sea H el suceso “la persona es un hombre”, M el suceso “la persona es una mujer”, A el suceso “la persona tiene menos de 65 años” y B el suceso “la persona tiene 65 años o más”

Organicemos los datos en una tabla de contingencia. Para un total de 100 personas, hay 49,3 hombres y 50,7 mujeres. Entre los hombres hay 49,3×0,809 = 39,8837 menores de 65 años y entre las mujeres hay 50,7×0,759 = 38,4813 menores de 65 años.

	A	**B**	**TOTAL**
HOMBRES (H)	39,8837	9,4163	49,3
MUJERES (M)	38,4813	12,2187	50,7
TOTAL	78,365	21,635	100

a) $P(M \cap A) = \dfrac{38{,}4813}{100} = 0{,}384813$

b) $P(A) = \dfrac{78{,}365}{100} = 0{,}78365$

c) $P(M/A) = \dfrac{38{,}4813}{78{,}365} = 0{,}49$

d) El suceso “al menos una de las tres personas sea mujer” es el suceso contrario al suceso “ninguna de las tres personas es mujer”. Como además hay reposición, los tres sucesos son independientes.

$$P\left(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}\right) = P\left(\overline{M_1}\right)\cdot P\left(\overline{M_2}\right)\cdot P\left(\overline{M_3}\right) = \frac{49{,}3}{100}\cdot\frac{49{,}3}{100}\cdot\frac{49{,}3}{100} = 0{,}1198 \quad\Rightarrow\quad P = 1 - 0{,}1198 = 0{,}8802$$