

UNIDAD 11: Representación gráfica de funciones

ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 276

1. En las siguientes funciones, estudia sus características: dominio, los puntos de corte con los ejes, las simetrías, la periodicidad, las asíntotas y ramas parabólicas, la monotonía, los extremos relativos, el tipo de concavidad y la existencia de puntos de inflexión:

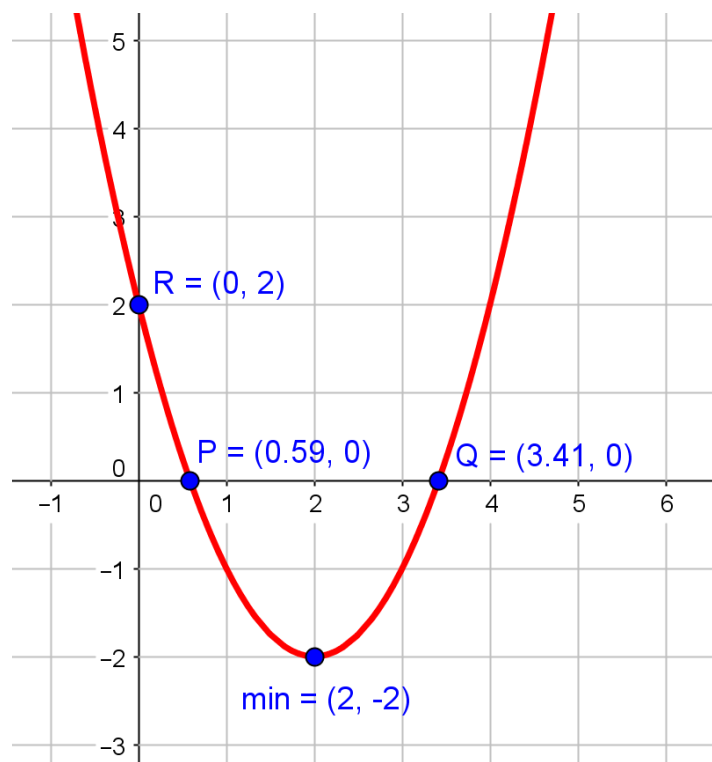
a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

a) Las características de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
- Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} OX : P(2 + \sqrt{2}, 0) \text{ y } Q(2 - \sqrt{2}, 0) \\ OY : R(0, 2) \end{cases}$
- No es simétrica respecto del eje OY ni respecto del origen de coordenadas.
- Asíntotas: no tiene.
- Ramas parabólicas: tiene dos, ya que se cumple:

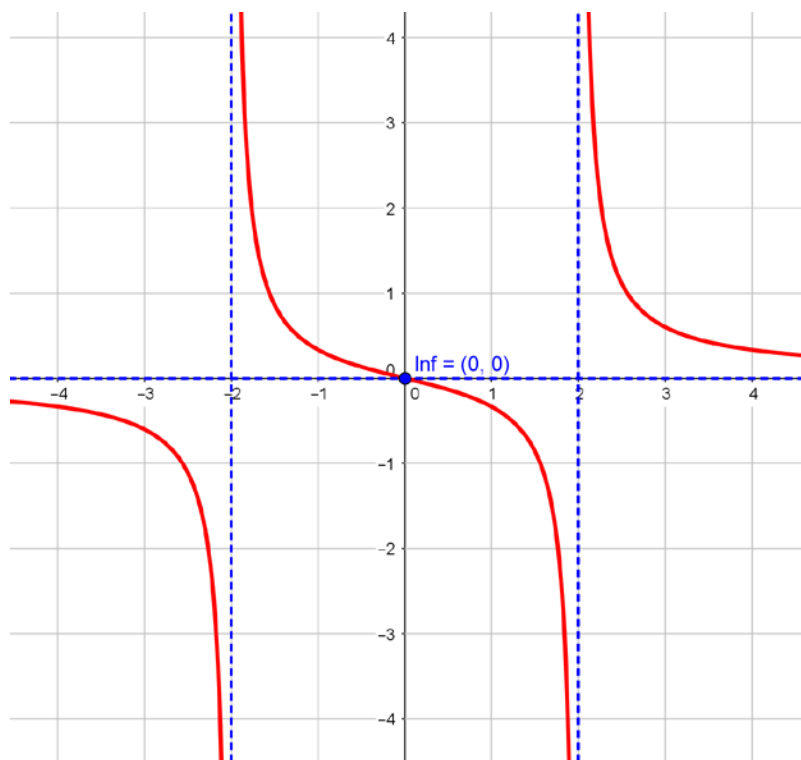
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4x + 2) = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x + 2) = +\infty$$
- Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, 2)$ y estrictamente creciente en $(2, +\infty)$
- Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en $(2, -2)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en todo $\mathbb{R}$.
- Puntos de inflexión: no tiene.



b) Las características de la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} \text{ son:}$$

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} OX : O(0, 0) \\ OY : O(0, 0) \end{cases}$
- Simetría: es simétrica respecto del origen de coordenadas.
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = -2$ y $x = 2$, al cumplirse: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x^2 - 4} = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 4} = \infty$
 - Horizontales: $y = 0$, al cumplirse: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0$
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente decreciente en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
- Extremos relativos: no tiene.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: el punto $(0, 0)$ es de inflexión.

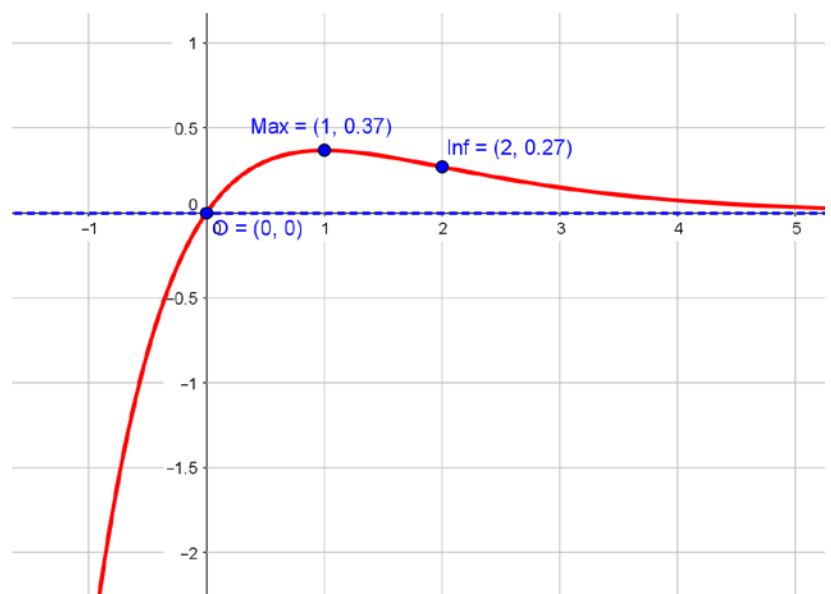


2. Estudia las características (dominio, recorrido, simetrías, asíntotas, monotonía, extremos relativos y curvatura) de la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$, representada en la gráfica.



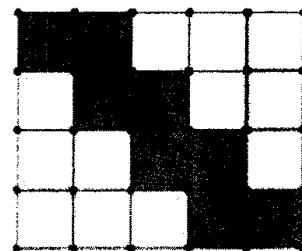
Las características de la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- Recorrido: $(-\infty, 1/e)$
- Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} OX : O(0, 0) \\ OY : O(0, 0) \end{cases}$
- Simetría; no tiene.
- Asíntotas: $y = 0$, al cumplirse $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$
- Ramas parabólicas: tiene una, al cumplirse $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$ y estrictamente decreciente en $(1, +\infty)$.
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en el punto $(1, 1/e)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia las y positivas en $(2, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: el punto $(2, 2/e^2)$ es de inflexión.



ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 291

1. Diagonal y cuadrados. En el rectángulo del dibujo, de orden 5 x 4, la diagonal corta en 8 cuadrados pequeños. ¿Podrías enunciar una ley que determine el número de cuadrados que cortará la diagonal en un rectángulo de orden $a \times b$?



Experimentamos con los casos particulares más sencillos y ordenamos los resultados. Llamando a (altura) y b (base) a las dimensiones del rectángulo, podemos construir la tabla.

$a \times b$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	4	4	6	6
3	3	4	3	6	7	6
4	4	4	6	4	8	8
5	5	6	7	8	5	10
6	6	6	6	8	10	6

En el elemento en el que se cruzan la fila a con la columna b aparece el número de cuadrados pequeños atravesados por la diagonal, para un rectángulo de dimensiones $a \times b$, por ejemplo, la fila 4 y la columna 3 se cruzan en el número 6, luego, en un rectángulo de orden 4×3 la diagonal atraviesa 6 cuadrados.

Si analizamos los valores de la tabla anterior podemos plantear la siguiente conjetura:

- El número de cuadrados pequeños que atraviesa la diagonal de un rectángulo de orden $a \times b$ es igual a: $a + b - 1$, si a y b son primos entre sí.
- Si los números a y b no son primos entre sí, entonces el número es: $a + b - d$, siendo d el máximo común divisor de a y b .

2. Producto de tres números. Demuestra que el producto de tres números naturales consecutivos no puede ser el cubo de un número natural.

El producto de tres números naturales consecutivos no puede ser un cubo perfecto ya que si lo fuese se tendría: $k^3 = n(n+1)(n+2)$.

Por otra parte son válidas las siguientes desigualdades:

$$n^3 < n(n+1)(n+2) < (n+1)^3$$

La desigualdad primera $n^3 < n(n+1)(n+2)$, es decir $n^3 < n^3 + 3n^2 + 2n$, es inmediata.

Para probar la segunda $n(n+1)(n+2) < (n+1)^3$, basta comprobar que: $n(n+2) < (n+1)^2$.

Pero esto también es inmediato por que: $n(n+2) = n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Luego el número $n(n+1)(n+2)$ no puede ser un cubo perfecto ya que se encuentra comprendido entre dos cubos perfectos consecutivos.

ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 293

1. Representa gráficamente las funciones que siguen, explorando sus gráficas y modificando su aspecto.

a) $f(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2$

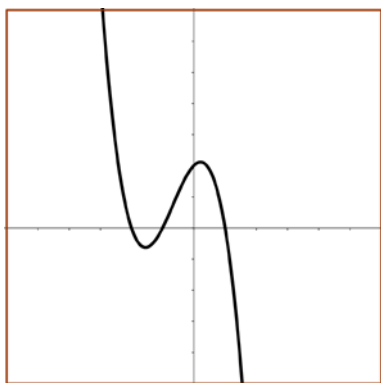
b) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

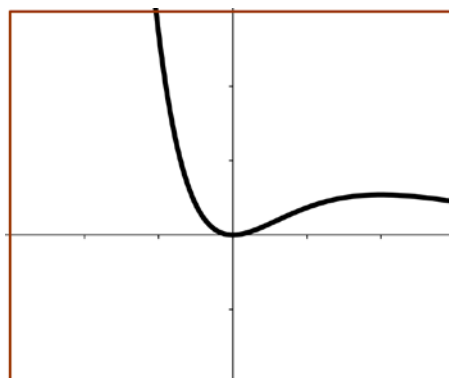
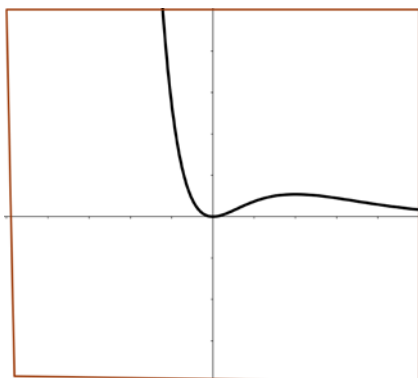
Seguimos los pasos descritos en el epígrafe OPCIONES PARA UNA GRÁFICA:

- Editamos la función en la tecla **Y=**.
- Pulsamos **GRAPH** y visualizamos la gráfica.
- Activando la tecla **WINDOW** podemos mejorar el aspecto de la gráfica.
- Pulsando de nuevo **GRAPH** obtenemos una nueva imagen de la gráfica.
- Activando **TRACE** nos movemos con el cursor por la gráfica y en la pantalla aparece la posición del cursor así como sus coordenadas.
- Con la tecla **ZOOM** modificamos el aspecto de la gráfica.

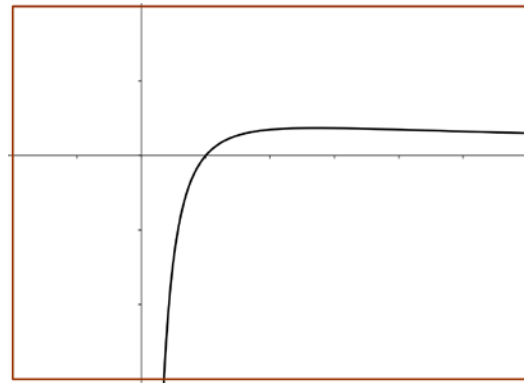
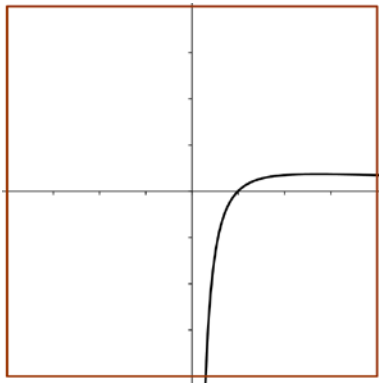
a) Para la función $f(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2$ podemos obtener imágenes como las que siguen.



b) La gráfica de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ puede presentar los siguientes aspectos:



c) La gráfica de la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ presenta el siguiente aspecto:

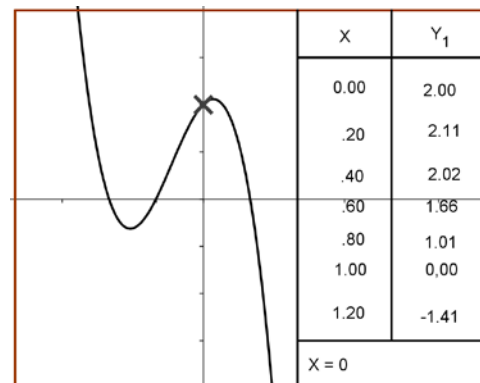


2. Para las funciones de la actividad anterior visualiza simultáneamente su gráfica y su tabla de valores.

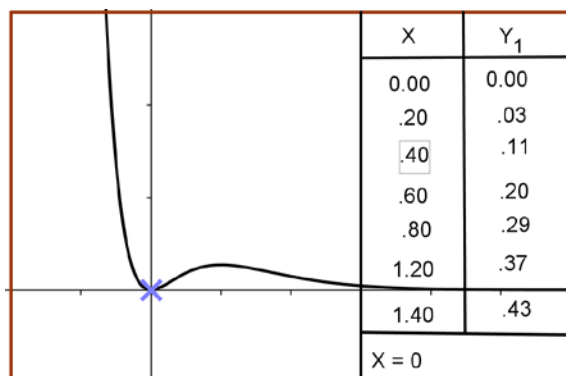
Procedemos como se explica en el epígrafe GRÁFICA Y TABLA DE VALORES DE UNA FUNCIÓN:

- Pulsamos la tecla **Y =** y en Y_1 introducimos la expresión de la función.
- En el menú de la tecla **MODE** elegimos **FLOT 2**, para obtener resultados con dos cifras decimales y en la línea COMPL (Full) **HORIZ G-T** elegimos la opción **G-T** (gráfico-tabla) que muestra la pantalla dividida verticalmente.
- Pulsando **GRAPH** visualizamos la gráfica de la función y parte de su tabla de valores. Con las teclas **WINDOWS** y **ZOOM** podemos modificar el aspecto de la gráfica.
- Con la tecla **TRACE** nos movemos sobre la gráfica y la posición del cursor queda reflejada en la tabla y en la pantalla gráfica, como puede verse en las imágenes.

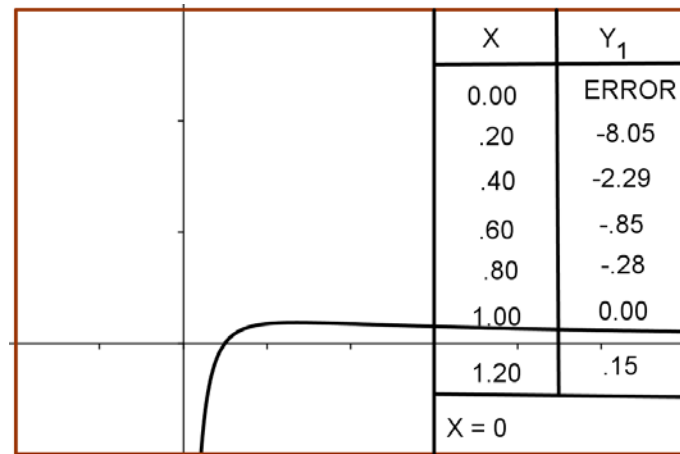
a) Para la función $f(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2$ obtenemos:



b) Para la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ obtenemos:

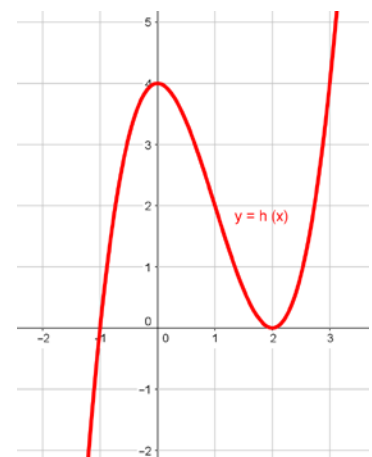
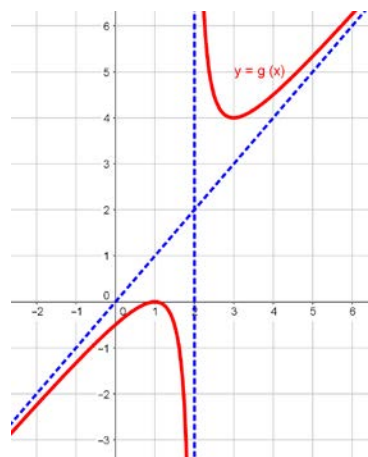
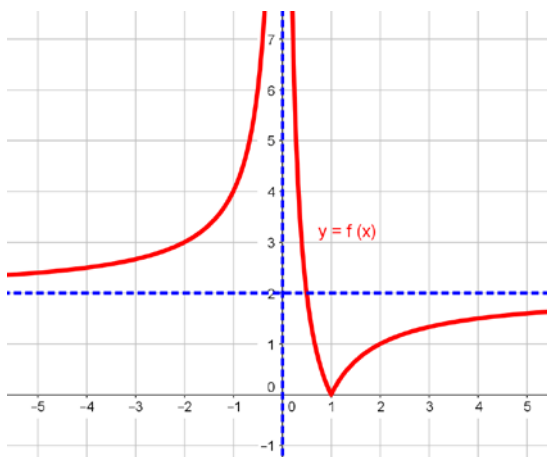


c) Para la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ obtenemos:



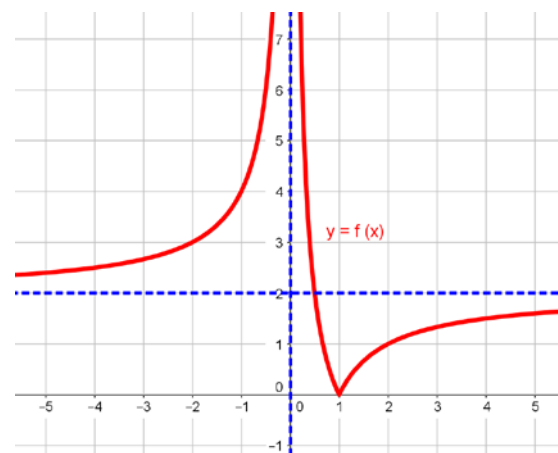
ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 296

1. Describe las siguientes funciones indicando sus dominios, recorridos, puntos de corte con los ejes, asíntotas, ramas infinitas, intervalos de monotonía y curvatura y sus puntos singulares.



a) Las características de la gráfica de $f(x)$ son:

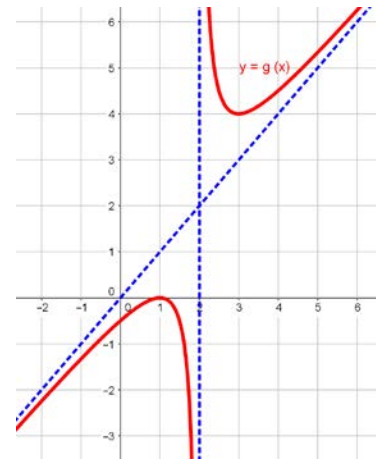
- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Recorrido: $\text{Im } f = [0, +\infty)$.
- Puntos de corte con los ejes: $(1, 0)$.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: las rectas $x = 0$ e $y = 2$.
- Ramas parabólicas: no tiene.



- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0, 1)$.
- Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en $(1, 0)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(1, +\infty)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 1)$.
- Puntos de inflexión: no tiene.

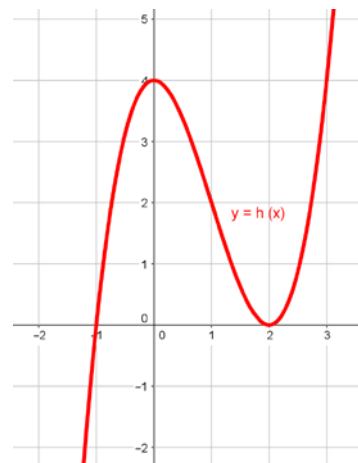
b) Las características de la gráfica de $g(x)$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$.
- Recorrido: $\text{Im } f = (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.
- Puntos de corte con los ejes: $(1, 0)$.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: las rectas $x = 2$ e $y = x$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$.
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(1, 0)$ y un mínimo relativo en $(3, 4)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia las y positivas en $(2, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: no tiene.



c) Las características de la gráfica de $h(x)$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- Recorrido: $\text{Im } f = \mathbb{R}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(-1, 0)$ y $(2, 0)$.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: no tiene.
- Ramas parabólicas: tiene dos, una a menos infinito y otra a más infinito.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0, 2)$.
- Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en $(2, 0)$ y un máximo relativo en $(0, 4)$.



- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(1, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: el punto $(1, 2)$ es de inflexión.

2. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x - 2| + x$

c) $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$

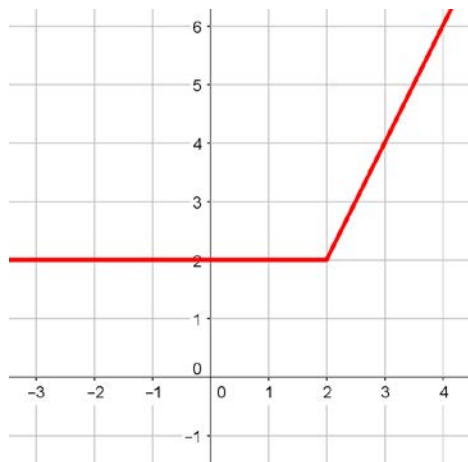
e) $f(x) = x^3 - 3|x|$

b) $f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}$

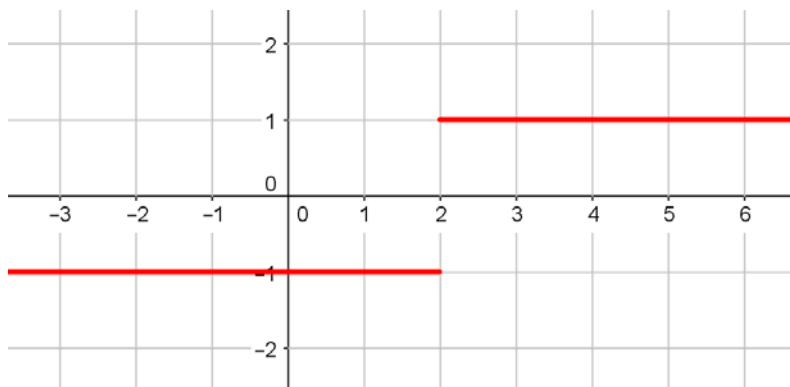
d) $f(x) = |x - 2| - |x + 2|$

f) $f(x) = \frac{x + |x|}{2}$

a) La función $f(x) = |x - 2| + x$ puede expresarse en la forma: $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y su gráfica puede verse en el dibujo.



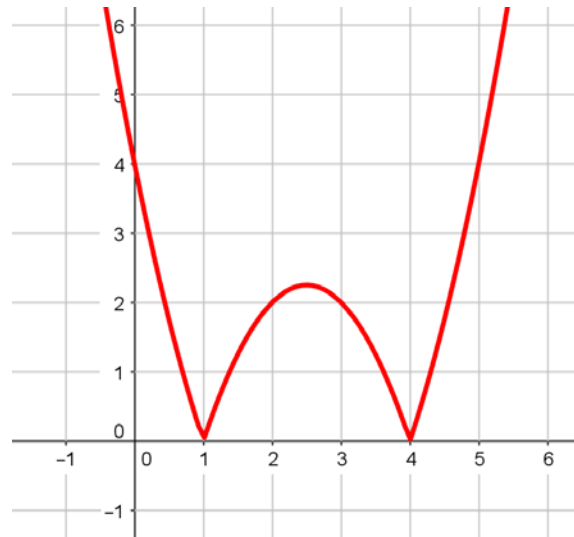
b) La función $f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}$ puede expresarse en la forma $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y su gráfica puede verse en el dibujo.



c) La función $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$ puede expresarse en la forma:

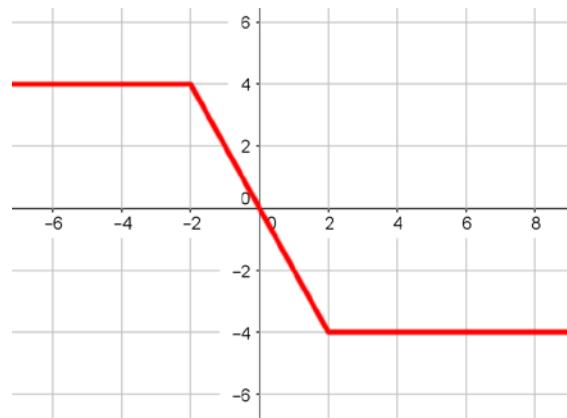
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x - 4 & \text{si } x \in [1, 4] \\ x^2 - 5x + 4 & \text{si } x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty) \end{cases}$$

Su gráfica puede verse a continuación.



d) La función $f(x) = |x - 2| - |x + 2|$ puede expresarse en la forma $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \leq -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ -4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ y su

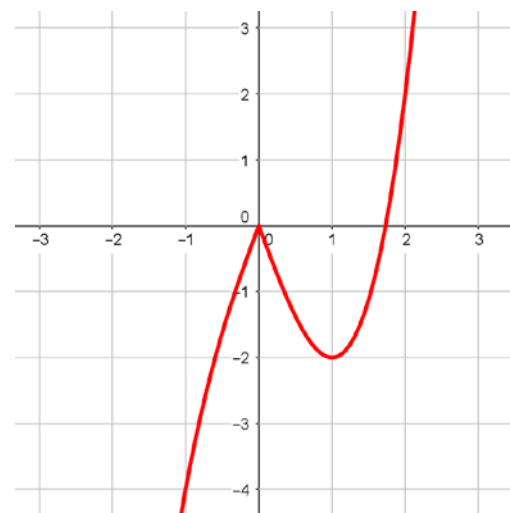
gráfica puede verse en el dibujo.



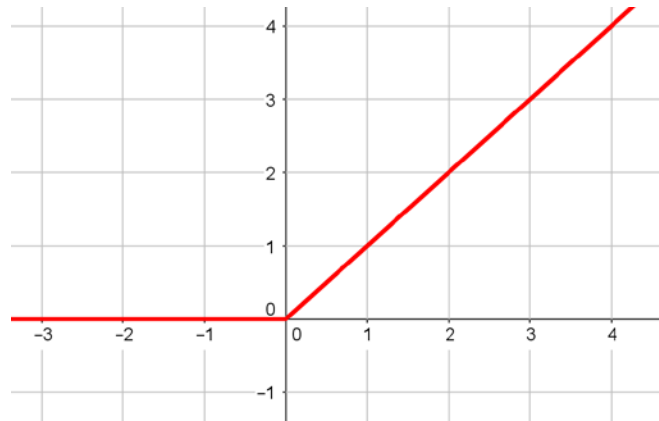
e) La función $f(x) = x^3 - 3|x|$ puede expresarse en la forma

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 - 3x & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{y su gráfica aparece a}$$

continuación:



f) La gráfica de la función $f(x) = \frac{x + |x|}{2}$ puede expresarse en la forma $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y su gráfica puede verse en la imagen.



3. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)$

d) $f(x) = x^4 - x^3$

g) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

b) $f(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$

e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$

h) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$

c) $f(x) = -3x^3 + 3x$

f) $f(x) = 2x^2 - x^4 - 1$

i) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$

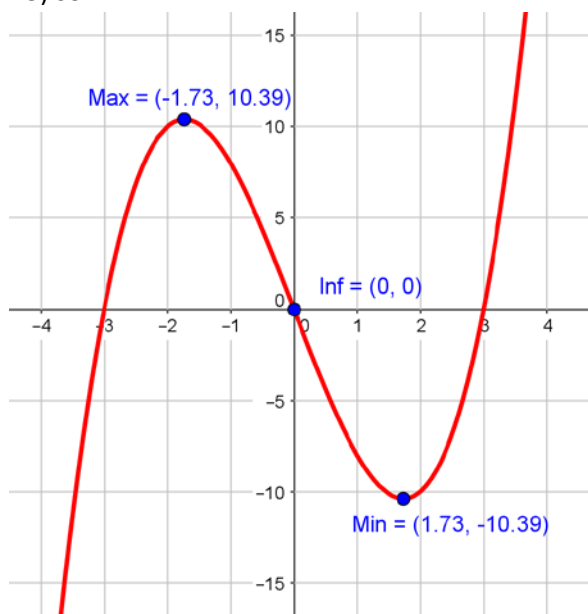
a) Las características de la función $f(x) = x \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX : (-3, 0), (0, 0) \text{ y } (3, 0) \\ OY : (0, 0) \end{cases}$$
- Simetría: respecto al origen de coordenadas.
- Asíntotas: no tiene.
- Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot (x - 3) \cdot (x + 3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (x - 3) \cdot (x + 3) = +\infty$$
- Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-1,73; 1,73)$ y estrictamente creciente en $(-\infty, -1,73) \cup (1,73, +\infty)$.
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(-1,73; 10,39)$ y un mínimo relativo en $(1,73; -10,39)$.



- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia las y positivas en $(0, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: el punto $(0, 0)$ es de inflexión.

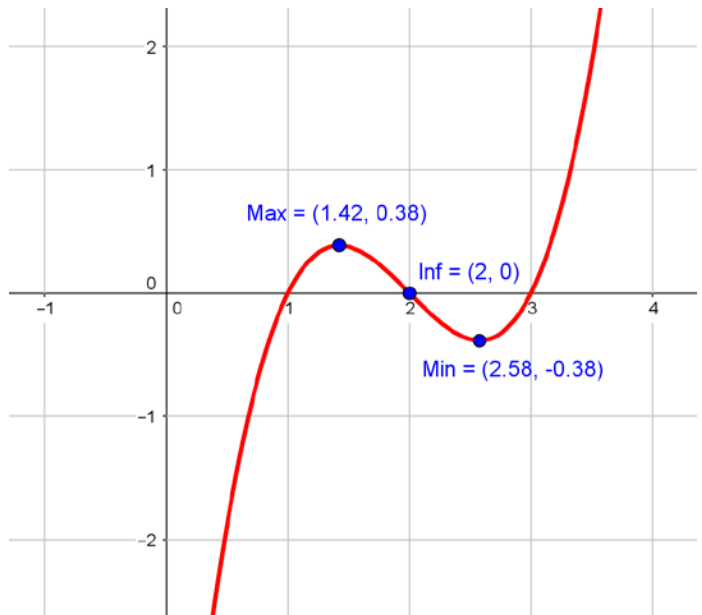
b) Las características de la función $f(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX : (1, 0), (2, 0) \text{ y } (3, 0) \\ OY : (0, -6) \end{cases}$$
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: no tiene.
- Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) = +\infty$$
- Monotonía: es estrictamente decreciente en $(1,42; 2,58)$ y estrictamente creciente en $(-\infty, 1,42) \cup (2,58, +\infty)$.



- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(1,42; 0,38)$ y un mínimo relativo en $(2,58; -0,38)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia las y positivas en $(2, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: el punto $(2, 0)$ es de inflexión.

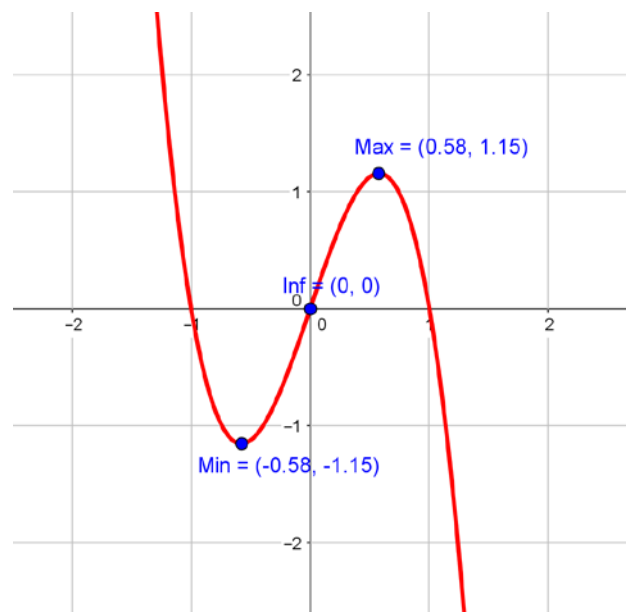
c) Las características de la función $f(x) = -3x^3 + 3x$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX : (-1, 0), (0, 0) \text{ y } (1, 0) \\ OY : (0, 0) \end{cases}$$
- Simetría: es simétrica respecto del eje de ordenadas OY.
- Asíntotas: no tiene.
- Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 3x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^3 + 3x) = -\infty$$



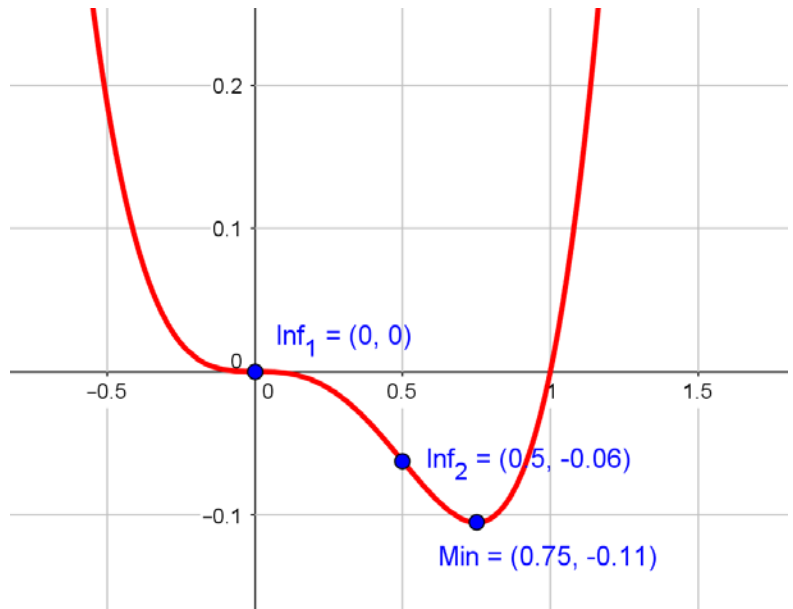
- Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, -0,58) \cup (0,58, +\infty)$ estrictamente creciente en $(-0,58; 0,58)$.
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(0,58; 1,15)$ y un mínimo relativo en $(-0,58; -1,15)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia las y negativas en $(0, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: el punto $(0, 0)$ es de inflexión.

d) Las características de $f(x) = x^4 - x^3$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX : (0, 0) \text{ y } (1, 0) \\ OY : (0, 0) \end{cases}$$
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: no tiene.
- Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow \mp \infty} (x^4 - x^3) = +\infty$$

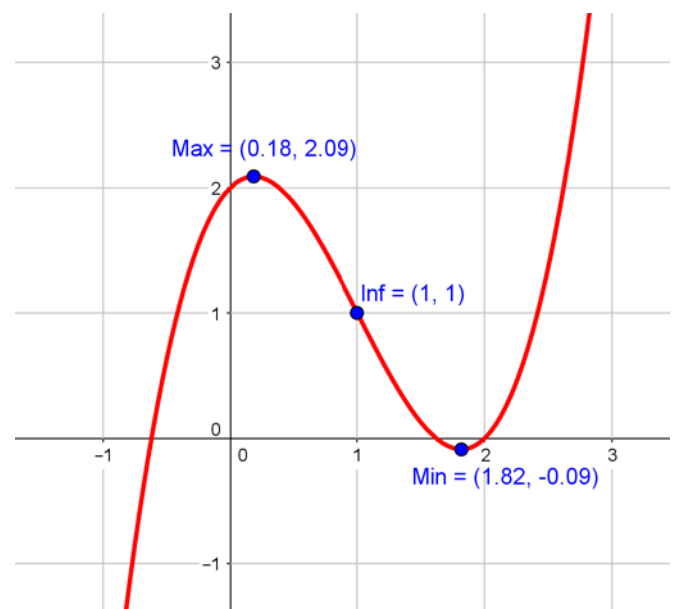


- Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0,75)$ estrictamente creciente en $(0,75; +\infty)$.
- Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en $(0,75; -0,11)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 0) \cup (0,5; +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(0, 0,5)$.
- Puntos de inflexión: los puntos $(0, 0)$ y $(0,5; -0,06)$ son de inflexión.

e) Las características de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX : (-0,62, 0), (1,62, 0) \text{ y } (2, 0) \\ OY : (0, 2) \end{cases}$$
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: no tiene.



- Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + x + 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + x + 2) = +\infty$$

- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0,18) \cup (1,82, +\infty)$ estrictamente decreciente en $(0,18; 1,82)$.
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(0,18; 2,09)$ y un mínimo relativo en $(1,28; -0,09)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(1, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: el punto $(1, 1)$ es de inflexión.

f) Las características de $f(x) = 2x^2 - x^4 - 1$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

- Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX : (-1, 0) \text{ y } (1, 0) \\ OY : (0, -1) \end{cases}$$

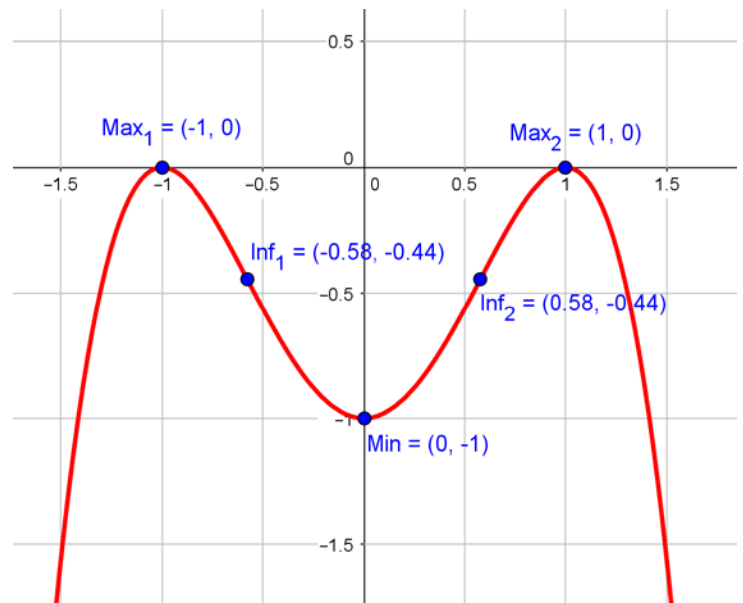
- Simetría: es simétrica respecto de OY.

- Asíntotas: no tiene.

- Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow \mp \infty} (2x^2 - x^4 - 1) = -\infty$$

- Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ estrictamente creciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.



- Extremos relativos: tiene máximos relativos en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ y un mínimo relativo en $(0, -1)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(-0,58; 0,58)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -0,58) \cup (0,58; +\infty)$.
- Puntos de inflexión: los puntos $(-0,58; -0,44)$ y $(0,58; -0,44)$ son de inflexión.

g) Las características de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

- Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX : (0, 0) \text{ y } (2, 0) \\ OY : (0, 0) \end{cases}$$

- Simetría: no tiene.

- Asíntotas: no tiene.

- Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) = -\infty$$

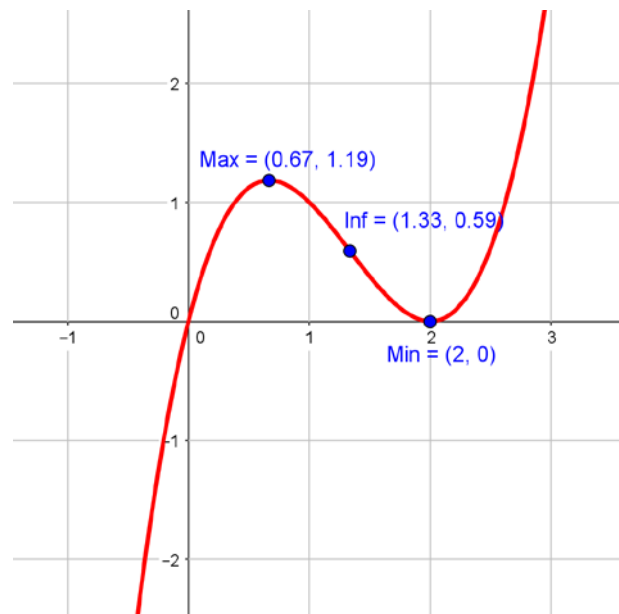
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) = +\infty$$

- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0,67) \cup (2, +\infty)$ estrictamente decreciente en $(0,67; 2)$.

- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(0,67; 1,19)$ y un mínimo relativo en $(2, 0)$.

- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1,33)$ y cóncava hacia las y positivas en $(1,33, +\infty)$.

- Puntos de inflexión: el punto $(1,33; 0,59)$ es de inflexión.



h) Las características de $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

- Puntos de corte con los ejes:

$$\begin{cases} OX : (-2, 0) \text{ y } (2, 0) \\ OY : (0, 8) \end{cases}$$

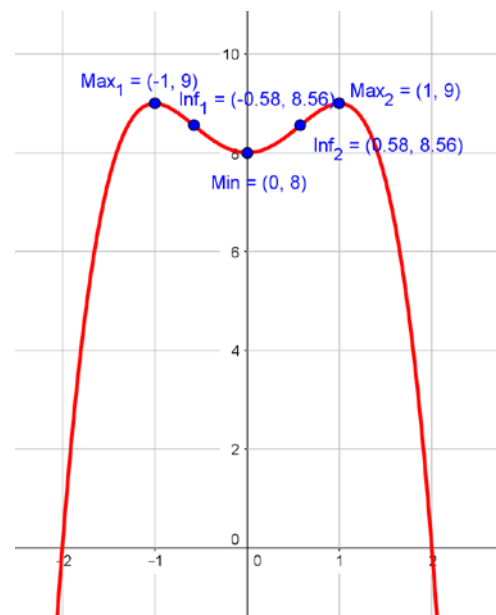
- Simetría: es simétrica respecto de OY.

- Asíntotas: no tiene.

- Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow \mp \infty} (-x^4 + 2x^2 + 8) = -\infty$$

- Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ estrictamente creciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.



- Extremos relativos: tiene máximos relativos en $(-1, 9)$ y $(1, 9)$ y un mínimo relativo en $(0, 8)$.

- Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(-0,58; 0,58)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -0,58) \cup (0,58; +\infty)$.

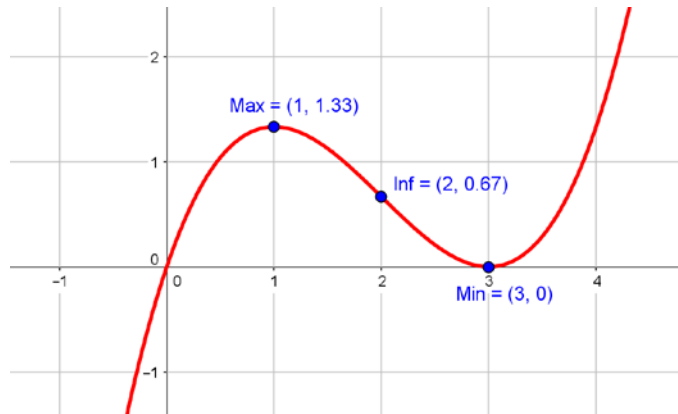
- Puntos de inflexión: los puntos $(-0,58; 8,56)$ y $(0,58; 8,56)$ son de inflexión.

i) Las características de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$ y $(3, 0)$.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: no tiene.
- Ramas parabólicas: tiene dos, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \right) = -\infty \quad y$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \right) = +\infty$$



- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ estrictamente decreciente en $(1, 3)$.
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(1, 1.33)$ y un mínimo relativo en $(3, 0)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia las y positivas en $(2, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: el punto $(2, 0.67)$ es de inflexión.

4. Dada la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Halla b , c y d para que tenga un punto de inflexión en $(1, -3)$ y la recta tangente en el punto de abscisa 0 tenga por pendiente 3. Representa gráficamente la función que resulta.

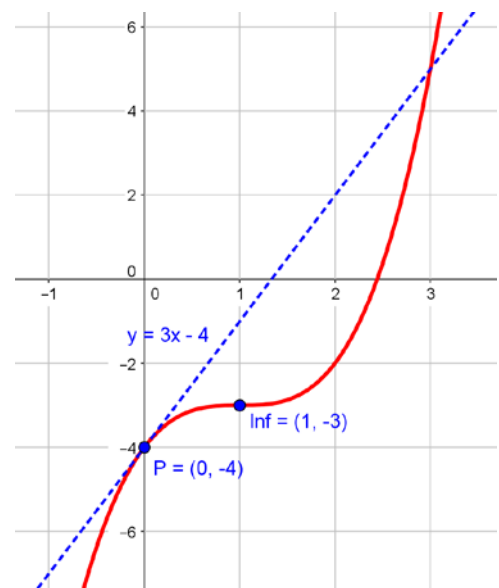
Las derivadas primera y segunda son:

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c \quad y \quad f''(x) = 6x + 2b$$

Imponemos las condiciones $f(1) = 3$, $f''(1) = 0$ y $f'(0) = 3$ y obtenemos:

$$\begin{cases} b + c + d = -4 \\ 2b = -6 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = 3 \\ d = -4 \end{cases}$$

La función es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ y su representación gráfica puede verse en el dibujo.



5. Representa gráficamente las siguientes funciones racionales:

a) $f(x) = \frac{2}{x^2 + x - 2}$

b) $f(x) = \frac{3x}{1 - x^2}$

c) $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = \frac{x + 1}{x \cdot (x + 2) \cdot (x - 1)}$

e) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$

f) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2x + 3}$

g) $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$

h) $f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$

i) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

j) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

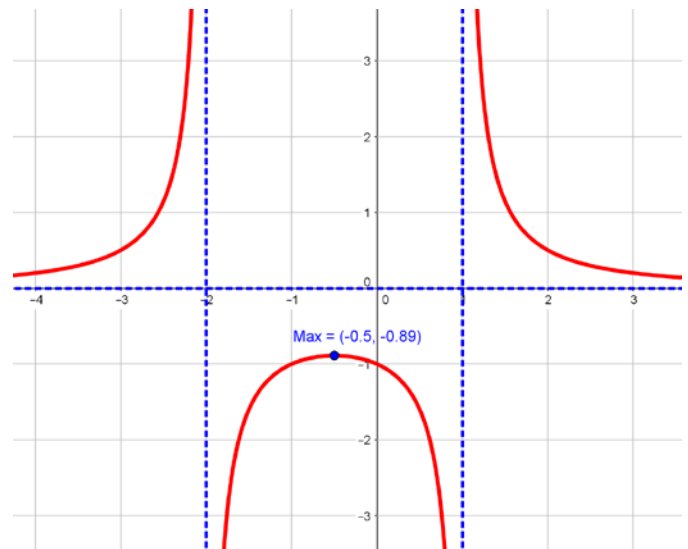
k) $f(x) = \frac{x^3}{(x - 2)^2}$

l) $f(x) = \frac{x^3}{3x + 3}$

Las características más importantes de cada una de las funciones y su gráfica aparecen a continuación.

a) Las características de $f(x) = \frac{2}{x^2 + x - 2}$ son:

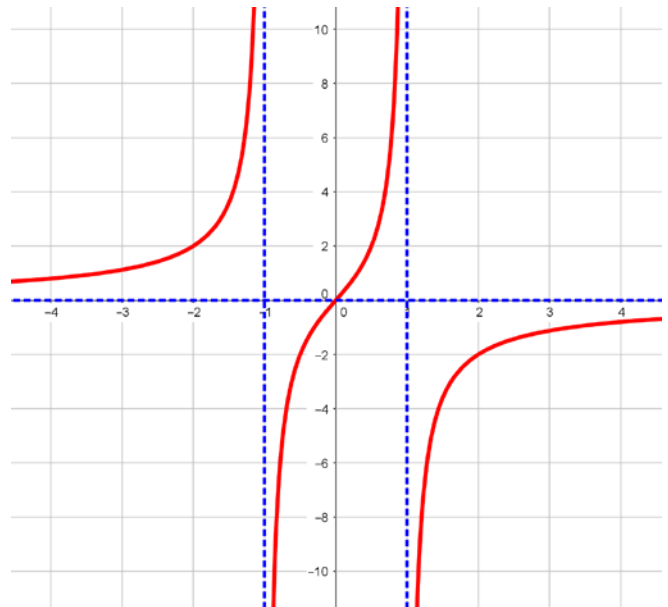
- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$.
- Puntos de corte con los ejes:
 $\{OY: (0, -1)\}$
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: las rectas $x = -2$, $x = 1$ e $y = 0$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, -0,5)$ estrictamente decreciente en $(-0,5; 1) \cup (1, +\infty)$.
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(-0,5; -0,89)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-2, 1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: no tiene.



b) Las características de $f(x) = \frac{3x}{1 - x^2}$ son:

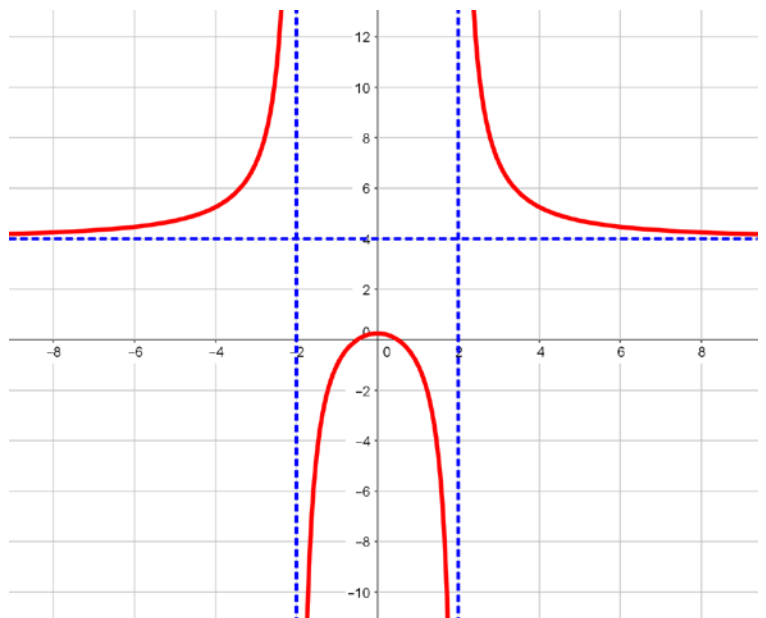
- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$
- Simetría: respecto del origen de coordenadas.

- Asíntotas: las rectas $x = -1$, $x = 1$ e $y = 0$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- Extremos relativos: no tiene.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
- Puntos de inflexión: el $(0, 0)$ es un punto de inflexión.



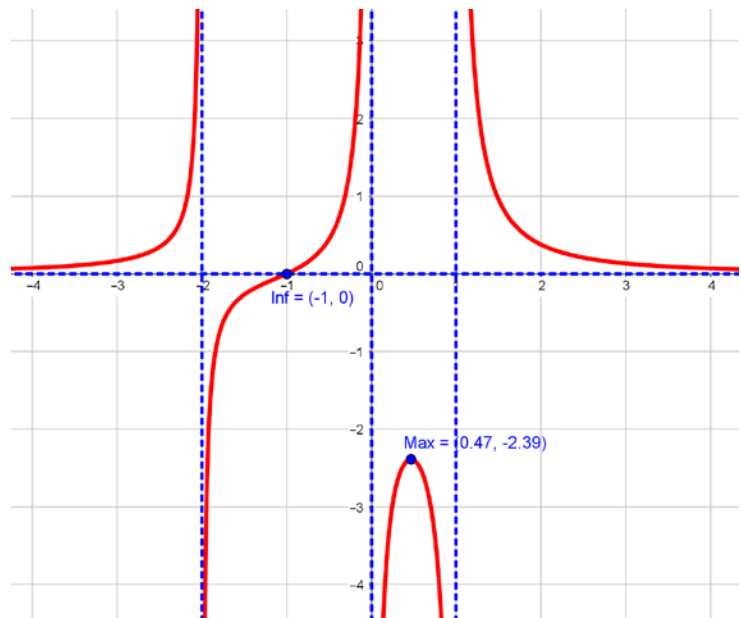
c) Las características de $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4}$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(0; 0,25)$; $(-0,5; 0)$ y $(0,5; 0)$
- Simetría: respecto del eje de ordenadas.
- Asíntotas: las rectas $x = -2$, $x = 2$ e $y = 4$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y estrictamente decreciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(0; 0,25)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-2, 2)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: no tiene.



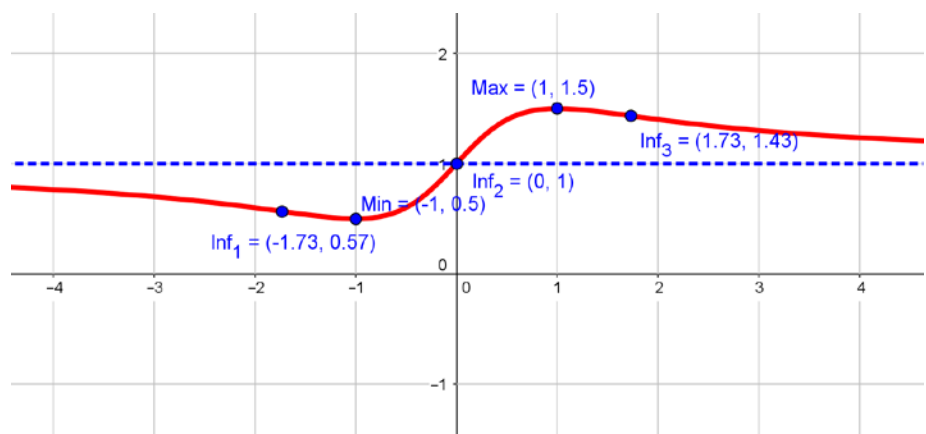
d) Las características de $f(x) = \frac{x+1}{x \cdot (x+2) \cdot (x-1)}$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 0, 1\}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(-1, 0)$
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: las rectas $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, 0) \cup (0, 0,47)$ y estrictamente decreciente en $(0,47; 1) \cup (1, +\infty)$
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(0,47; -2,39)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-2, -1) \cup (0, 1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: el punto $(-1, 0)$ es de inflexión.



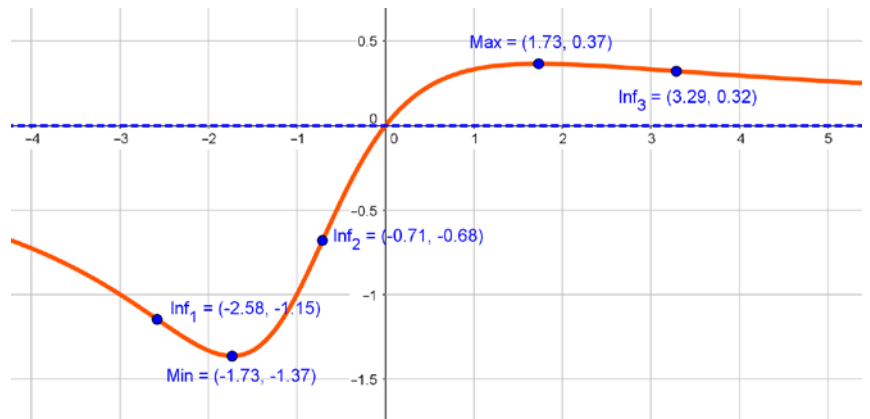
e) Las características de $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 1)$
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: la recta $y = 1$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-1, 1)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(1, 1,5)$ y un mínimo relativo en $(-1, 0,5)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -1,73) \cup (0, 1,73)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-1,73, 0) \cup (1,73; +\infty)$.
- Puntos de inflexión: los puntos $(-1,73; 0,57)$, $(0, 1)$ y $(1,73; 1,43)$.



f) Las características de $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2x + 3}$ son:

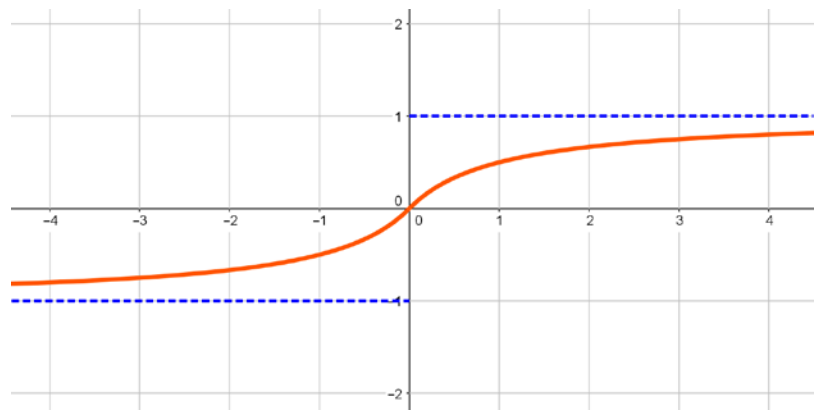
- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: la recta $y = 0$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-1,73; 1,73)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, -1,73) \cup (1,73; +\infty)$



- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(1,73; 0,37)$ y un mínimo relativo en $(-1,73; -1,37)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -2,58) \cup (-0,71; 3,29)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-2,58; -0,71) \cup (3,29; +\infty)$.
- Puntos de inflexión: los puntos $(-2,58; -1,15)$; $(-0,71; -0,68)$ y $(3,29; 0,32)$ son de inflexión.

g) Las características de $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$
- Simetría: respecto del origen de coordenadas.
- Asíntotas: las rectas $y = 1$ e $y = -1$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$
- Extremos relativos: no tiene.

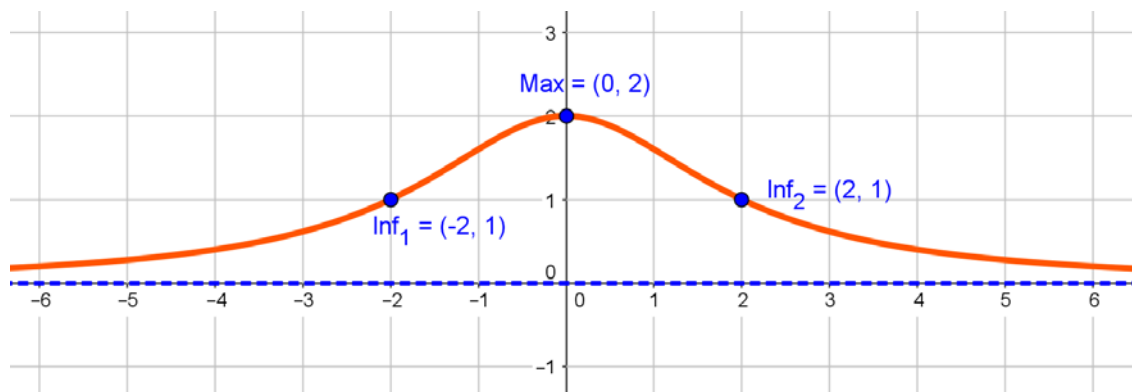


- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(0, +\infty)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 0)$.
- Puntos de inflexión: el punto $(0, 0)$ es de inflexión.

h) Las características de $f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$ son:

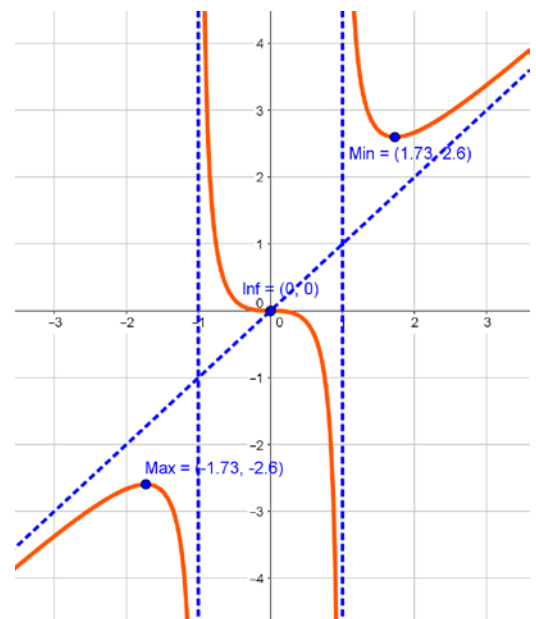
- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

- Puntos de corte con los ejes: $(0, 2)$
- Simetría: respecto del eje de ordenadas.
- Asíntotas: la recta $y = 0$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$ y estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(0, 2)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $\mathbb{R}$.
- Puntos de inflexión: los puntos $(-2, 1)$ y $(2, 1)$ son de inflexión.



i) Las características de $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$
- Simetría: respecto del origen de coordenadas.
- Asíntotas: las rectas $x = -1$, $x = 1$ e $y = x$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, -1,73) \cup (1,73; +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-1,73; -1) \cup (-1,1) \cup (1; 1,73)$
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(-1,73; -2,6)$ y un mínimo relativo en $(1,73; 2,6)$.

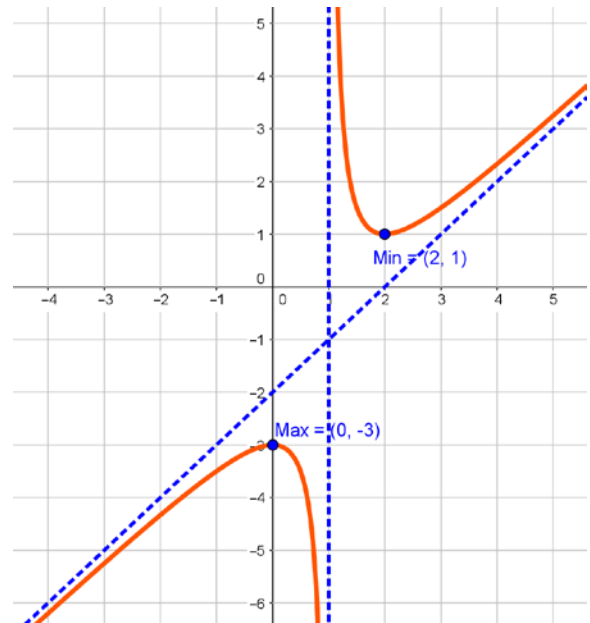


- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-1, 0) \cup (1; +\infty)$.

- Puntos de inflexión: el punto $(0, 0)$ es de inflexión.

j) Las características de $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ son:

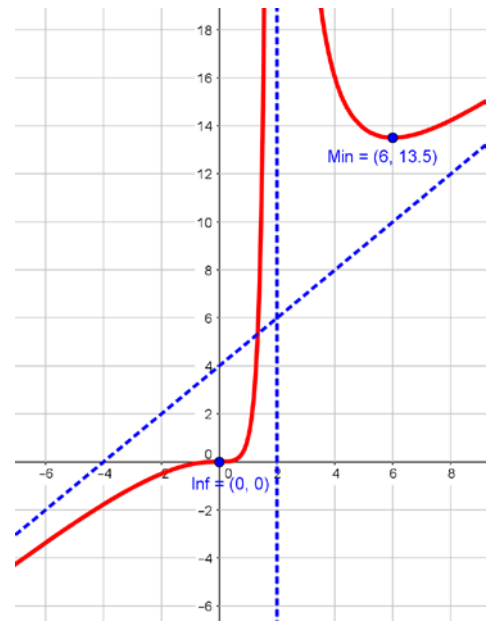
- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, -3)$
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: las rectas $x = 1$ e $y = x - 2$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (2; +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(0, -3)$ y un mínimo relativo en $(2, 1)$.



- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$ y cóncava hacia las y positivas en $(1; +\infty)$.
- Puntos de inflexión: no tiene.

k) Las características de $f(x) = \frac{x^3}{(x - 2)^2}$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: las rectas $x = 2$ e $y = x + 4$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 2) \cup (6; +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(2, 6)$
- Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en $(6; 13,5)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia las y positivas en $(0, 1) \cup (1; +\infty)$.



- Puntos de inflexión: el punto $(0, 0)$ es de inflexión.

l) Las características de $f(x) = \frac{x^3}{3x+3}$ son:

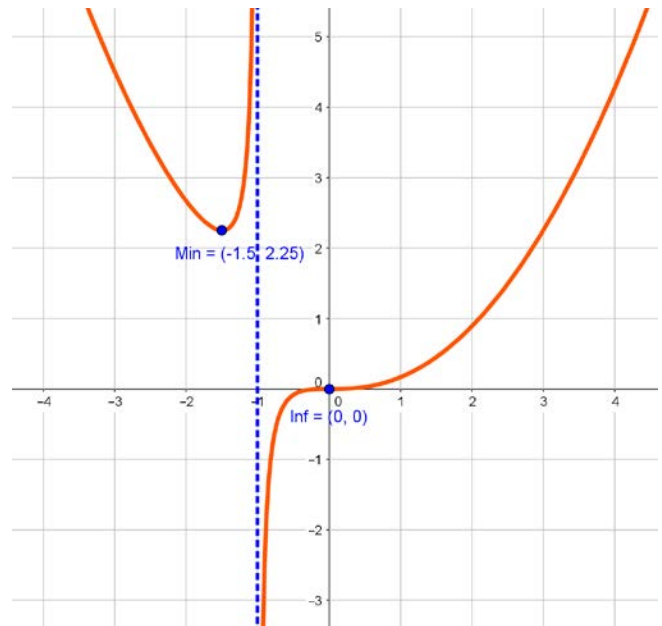
- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: la recta $x = -1$.
- Ramas parabólicas: tiene dos hacia más infinito.

• Monotonía: es estrictamente creciente en $(-1,5; -1) \cup (-1, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, -1)$.

• Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en $(-1,5; 2,25)$.

• Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-1, 0)$.

- Puntos de inflexión: el punto $(0, 0)$ es de inflexión.



6. Encuentra el valor del parámetro k para que la recta $y = x + 2$ sea la asíntota oblicua de la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3}{(x+k)^2}$. Representa la función obtenida y encuentra el punto de corte de la gráfica con la asíntota.

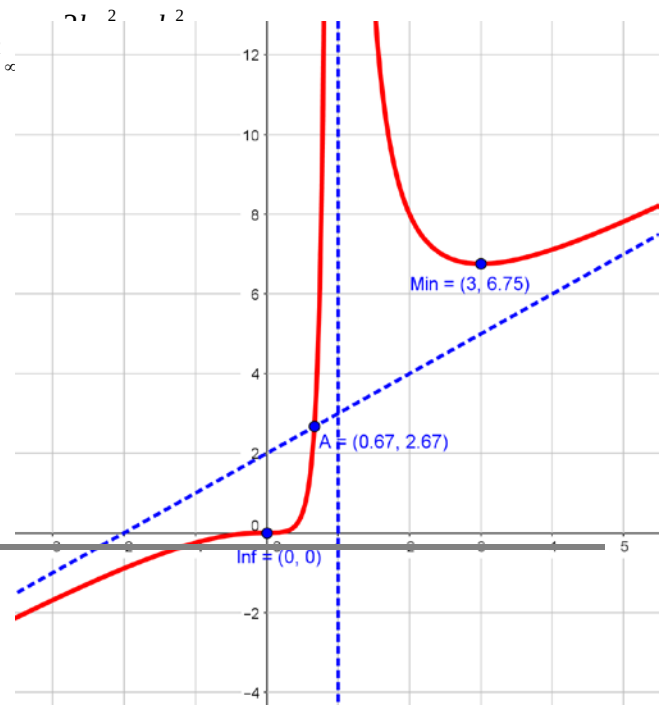
6. Determinamos el valor del parámetro k calculando el límite:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\frac{x^3}{x^2 + 2kx + k^2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3 - x(x^2 + 2kx + k^2)}{x^2 + 2kx + k^2}$$

Como $-2k = 2$, entonces $k = -1$.

La función es $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$, y sus características son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$.



- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: las rectas $x = 1$ e $y = x + 2$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, 1) \cup (3; +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(1, 3)$.
- Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en $(3, 6,75)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia las y positivas en $(0, 1) \cup (1; +\infty)$.
- Puntos de inflexión: el punto $(0, 0)$ es de inflexión

El punto de corte de la gráfica con la asíntota es la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} = 0,67 \\ y = \frac{8}{3} = 2,67 \end{cases} \Rightarrow A(0,67; 2,67)$$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 297

7. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

e) $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$

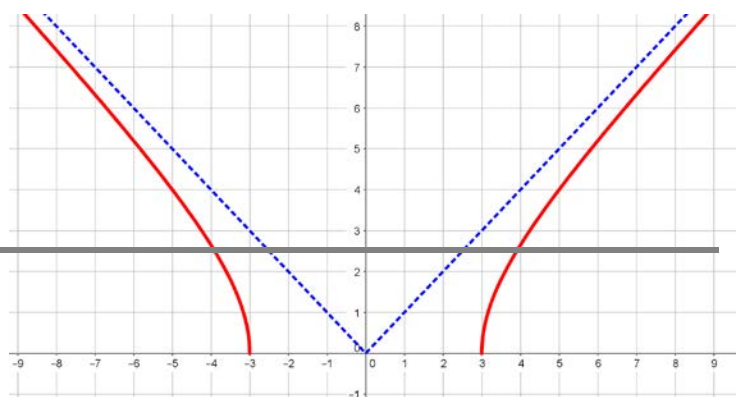
b) $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 1}$

f) $f(x) = \sqrt{\frac{2 - x}{2 + x}}$

a) Las características de la función a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
- Puntos de corte con los ejes: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.
- Simetría: respecto del eje de ordenadas.
- Asíntotas: las rectas $y = -x$ e $y = x$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(3; +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, -3)$
- Extremos relativos: no tiene.



- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

- Puntos de inflexión: no tiene

b) Las características de la función $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = [-2, 2]$

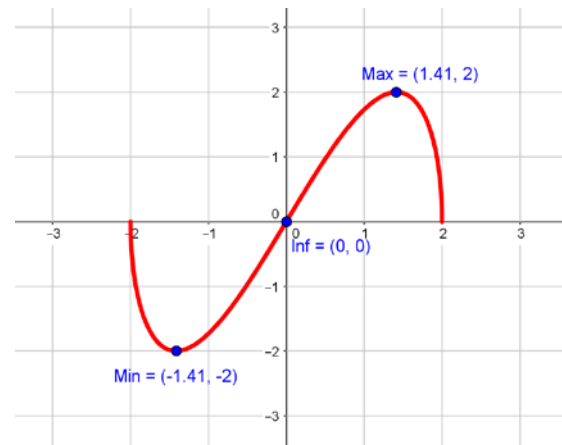
- Puntos de corte con los ejes: $(-2, 0)$; $(0, 0)$ y $(2, 0)$.

- Simetría: respecto del origen de coordenadas.

- Asíntotas: no tiene.

- Ramas parabólicas: no tiene.

- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-1,41; 1,41)$ y estrictamente decreciente en $(-2, -1,41) \cup (1,41; 2)$



- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(1,41; 2)$ y un mínimo relativo en $(-1,41; -2)$.

- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(0, 2]$ y cóncava hacia las y positivas en $(-2, 0]$.

- Puntos de inflexión: el punto $(0, 0)$ es de inflexión.

c) Las características de $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

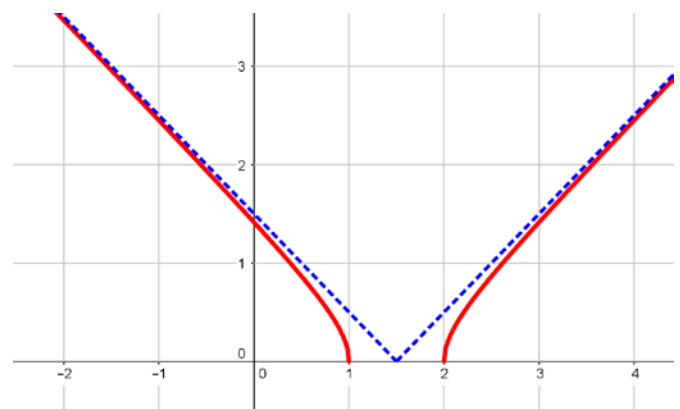
- Puntos de corte con los ejes: $(1, 0)$; $(2, 0)$ y $(0, \sqrt{2})$.

- Simetría: no tiene.

- Asíntotas: las rectas $y = x - 3/2$ e $y = -x + 3/2$.

- Ramas parabólicas: no tiene.

- Monotonía: es estrictamente creciente en $(2, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, 1)$



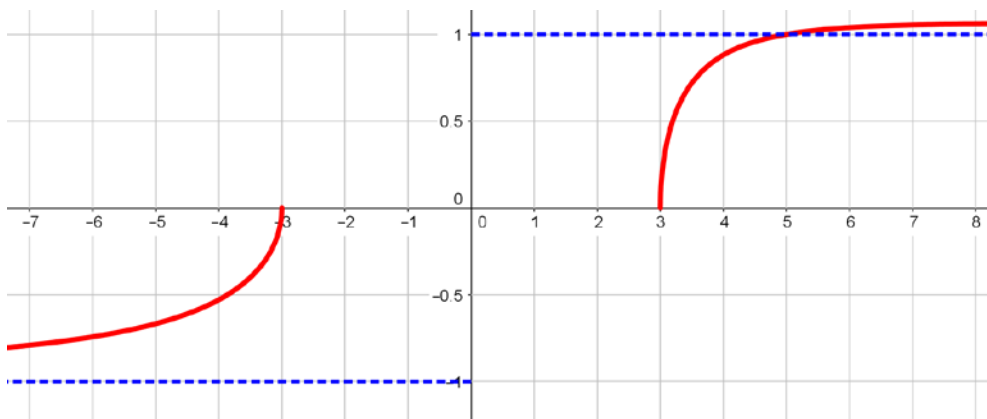
- Extremos relativos: no tiene.

- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

- Puntos de inflexión: no tiene.

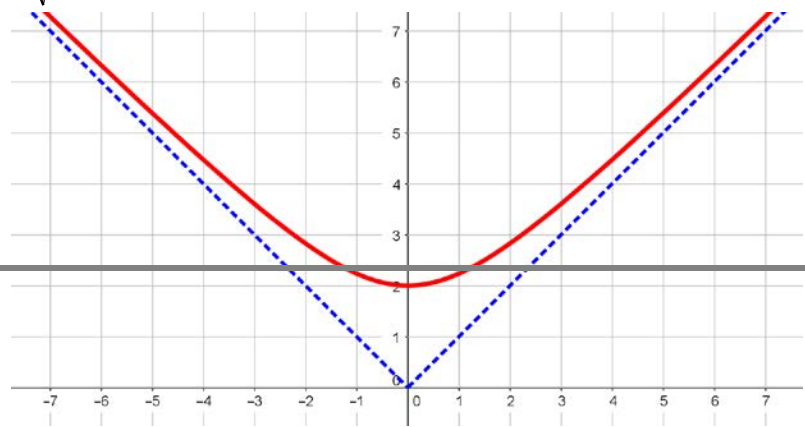
d) Las características de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 1}$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
- Puntos de corte con los ejes: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: las rectas $y = -1$ e $y = 1$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(3, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, -3)$
- Extremos relativos: no tiene.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(3, +\infty)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -3)$.
- Puntos de inflexión: no tiene.



e) Las características de la función $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$ son:

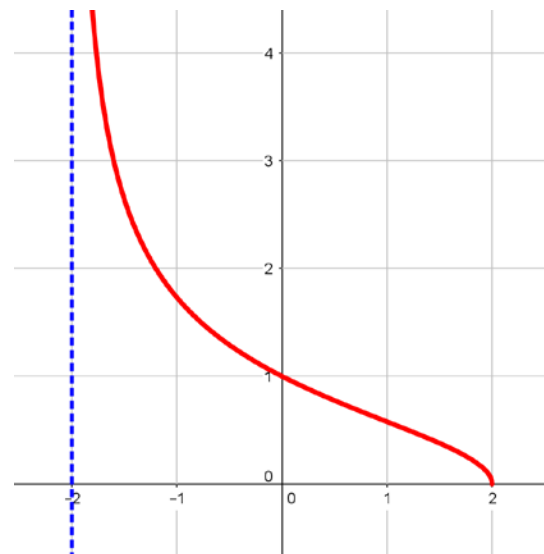
- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 2)$.
- Simetría: respecto del eje de ordenadas.



- Asíntotas: las rectas $y = -x$ e $y = x$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$
- Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en $(0, 2)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $\mathbb{R}$.
- Puntos de inflexión: no tiene.

f) Las características de la función $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = (-2, 2]$
- Puntos de corte con los ejes: $(2, 0)$ y $(0, 1)$.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: la recta $x = -2$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-2, 2]$.
- Extremos relativos: no tiene.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(0, 2)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-2, 0)$.
- Puntos de inflexión: el punto $(0, 1)$ es de inflexión.



8. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(x+2)$

e) $f(x) = (x-2) \cdot e^x$

i) $f(x) = x \cdot \ln x - 2x$

b) $f(x) = \ln|x+2|$

f) $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$

j) $f(x) = x \cdot \ln x$

c) $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$

g) $f(x) = (x+1) \cdot e^{-x}$

k) $f(x) = e^x + \ln x$

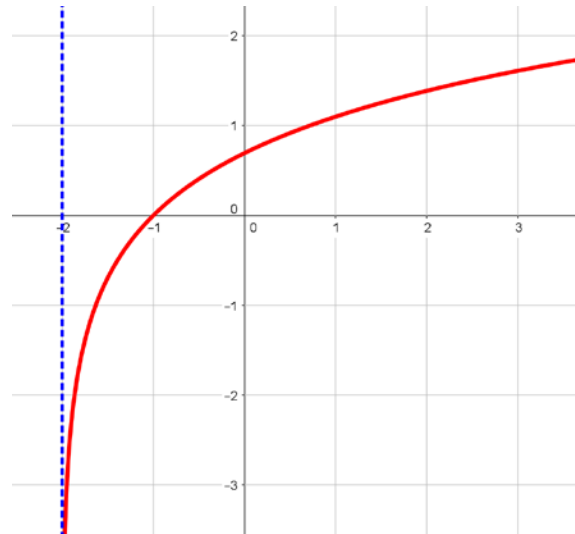
d) $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

h) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

l) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

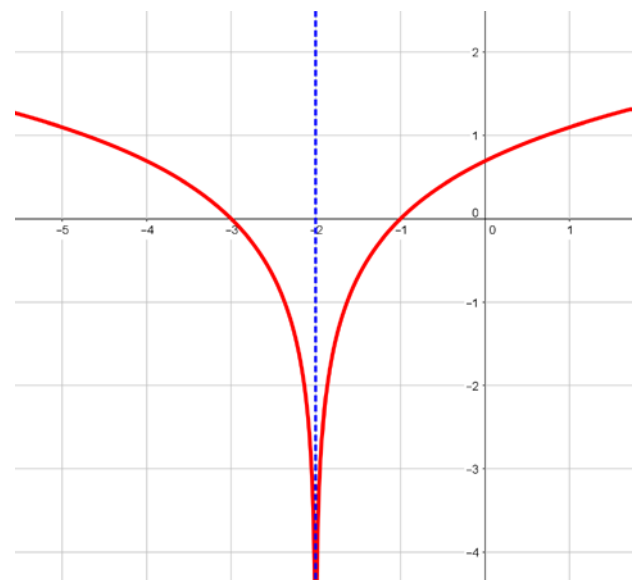
a) Las características de la función $f(x) = \ln(x+2)$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = (-2, +\infty]$
- Puntos de corte con los ejes: $(-1, 0)$ y $(0, \ln 2)$.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: la recta $x = -2$.
- Ramas parabólicas: tiene una a más infinito.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-2, +\infty)$.
- Extremos relativos: no tiene.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-2, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: no tiene.



b) Las características de la función $f(x) = \ln|x+2|$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(-3, 0)$; $(-1, 0)$ y $(0, \ln 2)$.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: la recta $x = -2$.
- Ramas parabólicas: tiene una a más infinito.
- Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, -2)$ y estrictamente creciente en $(-2, +\infty)$.
- Extremos relativos: no tiene.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $\mathbb{R} - \{-2\}$.
- Puntos de inflexión: no tiene.



c) Las características de la función $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = (-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$.

• Puntos de corte con los ejes: $(-5, 16, 0)$ y $(1, 16, 0)$.

• Simetría: no tiene.

• Asíntotas: las rectas $x = -5$ y $x = 1$.

• Ramas parabólicas: tiene dos hacia más infinito.

• Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, -5)$ y estrictamente creciente en $(1, +\infty)$.

• Extremos relativos: no tiene.

• Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$.

• Puntos de inflexión: no tiene.

d) Las características de la función $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ son:

• Dominio: $\text{Dom } f = (-1, 1)$.

• Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$.

• Simetría: respecto del origen de coordenadas.

• Asíntotas: las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

• Ramas parabólicas: no tiene.

• Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-1, 1)$.

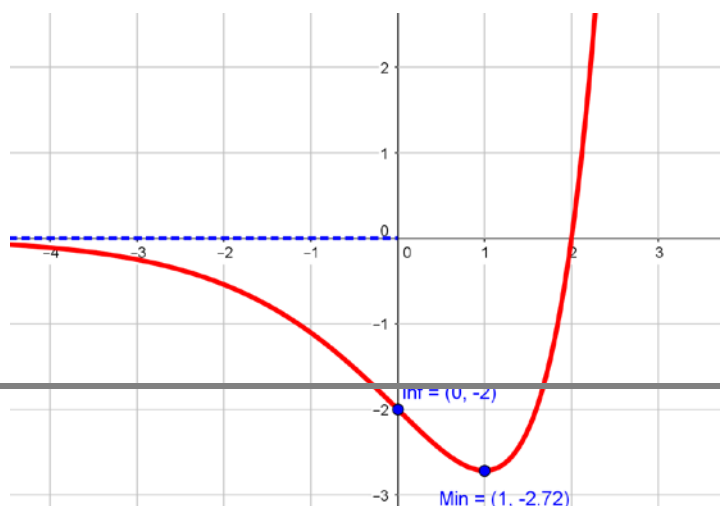
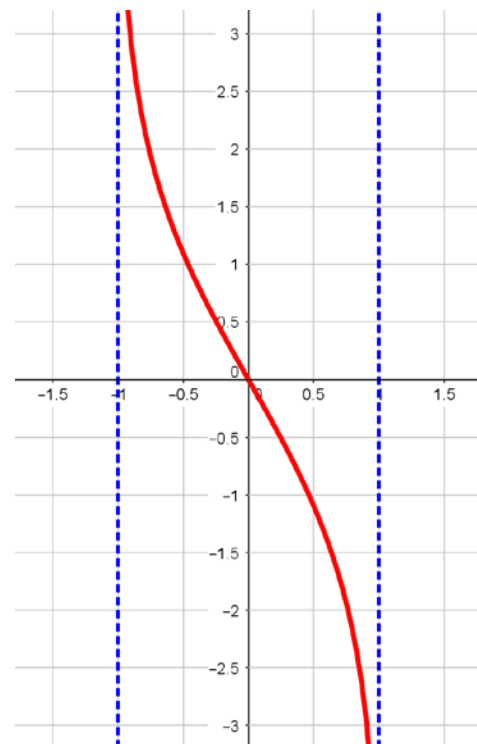
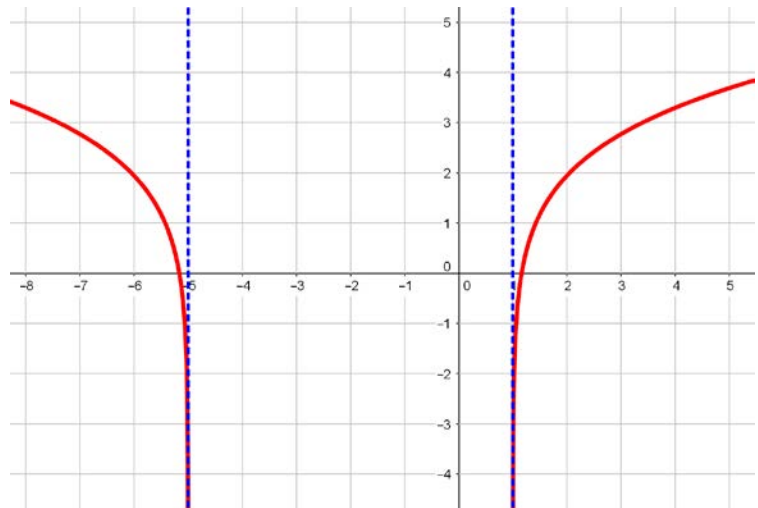
• Extremos relativos: no tiene.

• Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(-1, 0)$ y hacia las y negativas en $(0, 1)$.

• Puntos de inflexión: el punto $(0, 0)$ es de inflexión.

e) Las características de la función $f(x) = (x-2) \cdot e^x$ son:

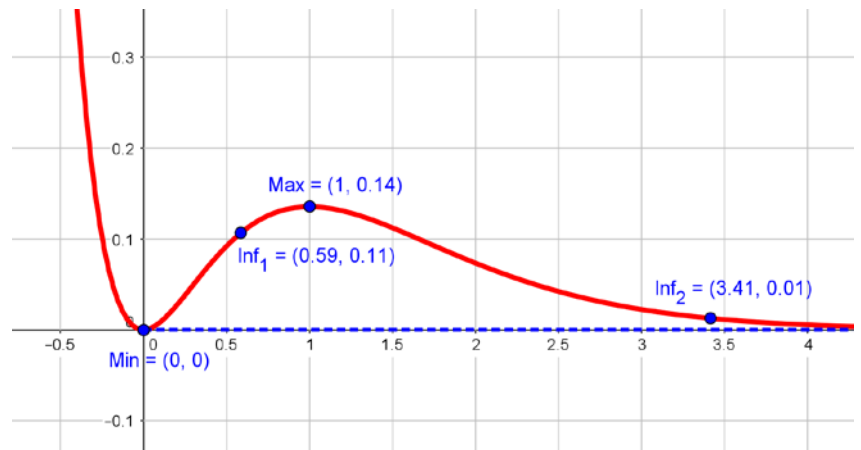
• Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.



- Puntos de corte con los ejes: $(2, 0)$ y $(0, -2)$.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: la recta $y = 0$.
- Ramas parabólicas: tiene una a más infinito.
- Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, 1)$ y estrictamente creciente en $(1, +\infty)$.
- Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en $(1, -2,72)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(0, +\infty)$ y hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$.
- Puntos de inflexión: el punto $(0, -2)$ es de inflexión.

f) Las características de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$ son:

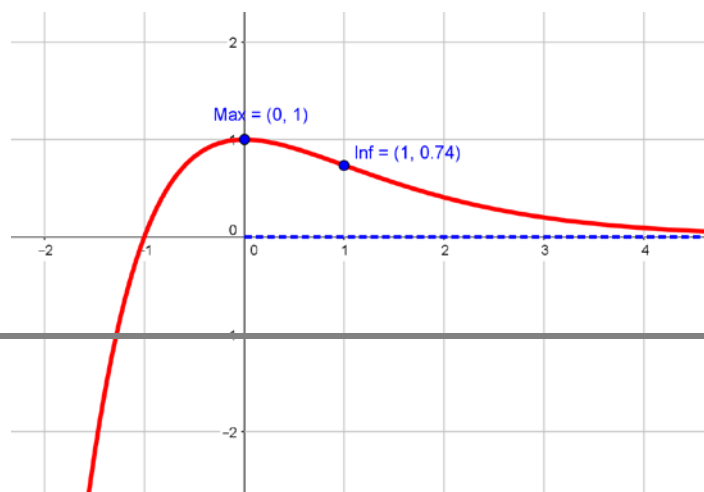
- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: la recta $y = 0$.
- Ramas parabólicas: tiene una a más infinito.
- Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y estrictamente creciente en $(0, 1)$.
- Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ y un máximo relativo en $(1, 0,14)$.



- Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 0,59) \cup (3,41; +\infty)$ y hacia las y negativas en $(0,59; 3,41)$.
- Puntos de inflexión: los puntos $(0,59; 0,11)$ y $(3,41; 0,01)$ son de inflexión.

g) Las características de la función $f(x) = (x + 1) \cdot e^{-x}$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(-1, 0)$ y $(0,1)$.
- Simetría: no tiene.



- Asíntotas: la recta $y = 0$.
- Ramas parabólicas: tiene una a menos infinito.
- Monotonía: es estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$ y estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$.
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(0, 1)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$ y hacia las y positivas en $(1, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: el punto $(1; 0,74)$ es de inflexión.

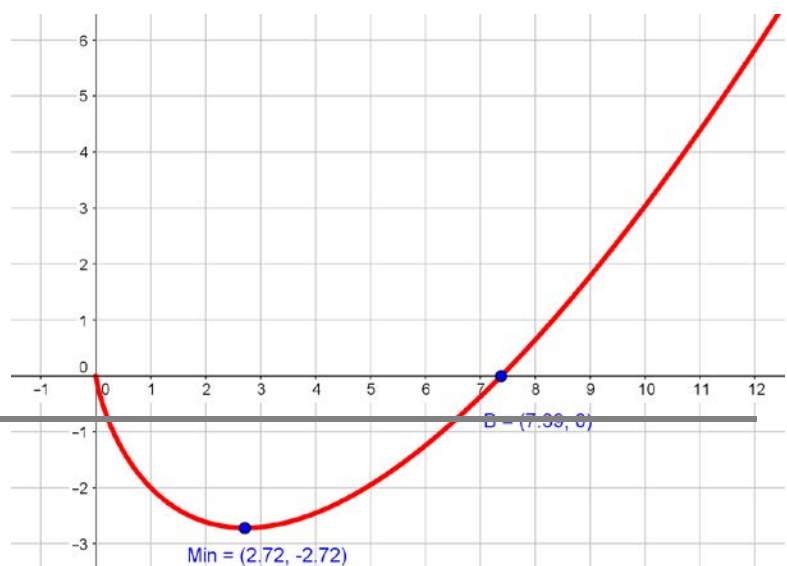
h) Las características de la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Puntos de corte con los ejes: no tiene.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: las recta $x = 0$ e $y = 0$.
- Ramas parabólicas: tiene una a más infinito.
- Monotonía: es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ y estrictamente creciente en $(1, +\infty)$.
- Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en $(1; 2,72)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$ y hacia las y positivas en $(0, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: no tiene.



i) Las características de la función $f(x) = x \cdot \ln x - 2x$ son:

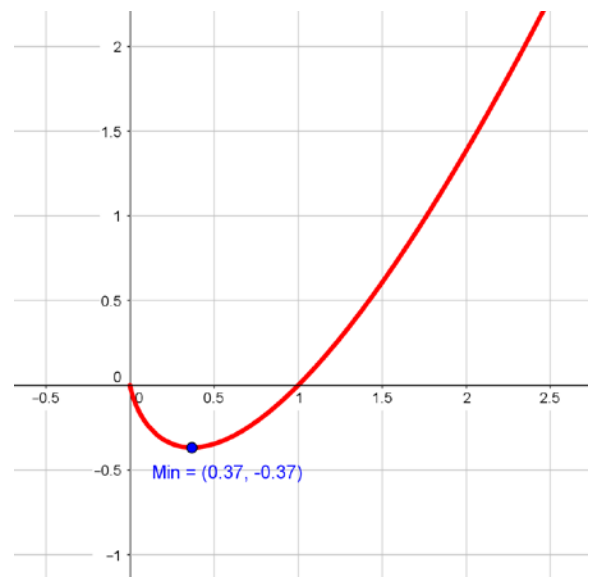
- Dominio: $\text{Dom } f = (0, +\infty)$.
- Puntos de corte con los ejes: $(7,39; 0)$.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: no tiene.



- Ramas parabólicas: tiene una a más infinito.
- Monotonía: es estrictamente decreciente en $(0, e)$ y estrictamente creciente en $(e, +\infty)$.
- Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en $(e, -e) = (2,72; -2,72)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(0, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: no tiene.

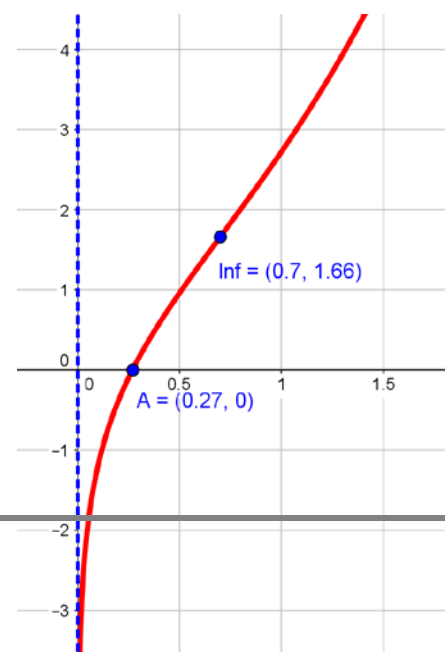
j) Las características de la función $f(x) = x \cdot \ln x$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = (0, +\infty)$.
- Puntos de corte con los ejes: $(1, 0)$.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: no tiene.
- Ramas parabólicas: tiene una a más infinito.
- Monotonía: es estrictamente decreciente en $(0; 0,37)$ y estrictamente creciente en $(0,37; +\infty)$.
- Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en $(0,37; -0,37)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(0, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: no tiene.



k) Las características de la función $f(x) = e^x + \ln x$ son:

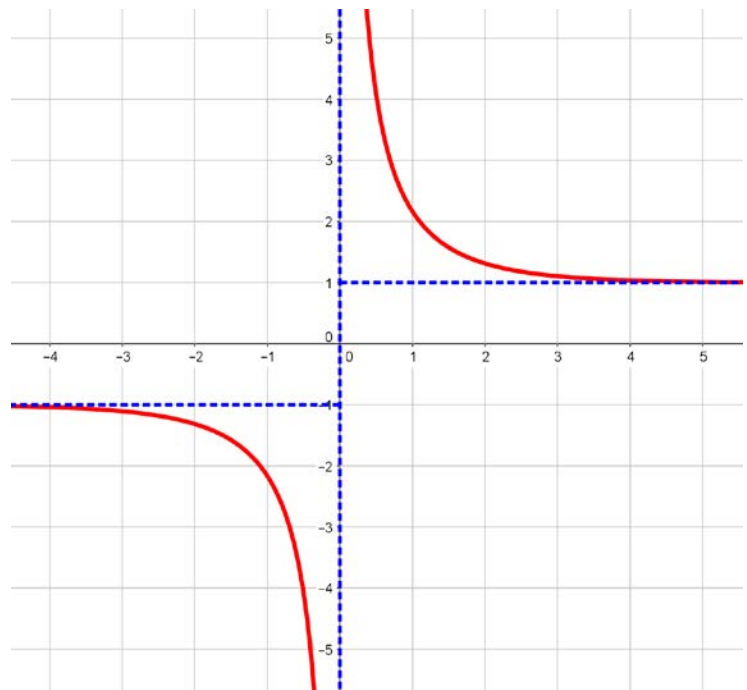
- Dominio: $\text{Dom } f = (0, +\infty)$.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,27; 0)$.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: la recta $x = 0$.
- Ramas parabólicas: tiene una a más infinito.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$.



- Extremos relativos: no tiene.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(0; 0,7)$ y hacia las y positivas en $(0,7; +\infty)$.
- Puntos de inflexión: el punto $(0,7; 0,66)$ es de inflexión.

l) Las características de la función $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Puntos de corte con los ejes: no tiene.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: las rectas $x = 0$, $y = -1$ e $y = 1$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente decreciente en $\mathbb{R} - \{0\}$.
- Extremos relativos: no tiene.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$ y hacia las y positivas en $(0, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: no tiene.



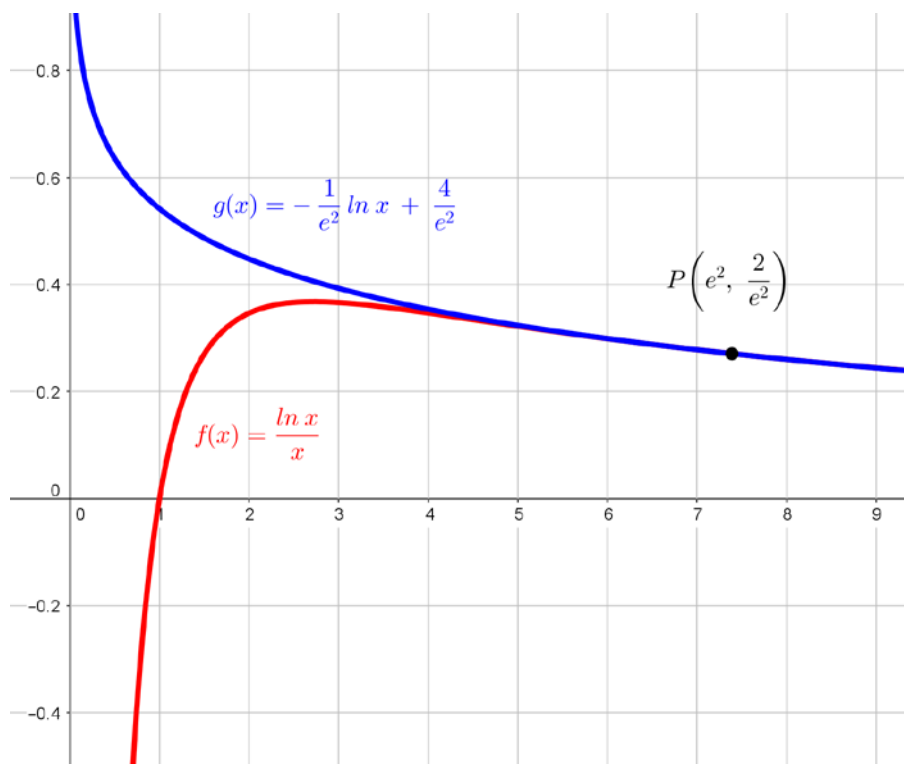
9. Calcula las constantes a y b para que las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ y $g(x) = a \ln x + b$ se corten en el punto $(e^2, 2e^{-2})$ y tengan en él la misma recta tangente. Realiza la representación de las funciones resultantes.

Tiene que cumplirse $g(e^2) = \frac{2}{e^2}$ y $g'(e^2) = -\frac{1}{e^4}$.

Las condiciones anteriores nos llevan al sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = \frac{2}{e^2} \\ \frac{a}{e^2} = -\frac{1}{e^4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{e^2} \\ b = \frac{4}{e^2} \end{cases}$$

Las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ y $g(x) = -\frac{1}{e^2} \ln x + \frac{4}{e^2}$ pueden verse a continuación.



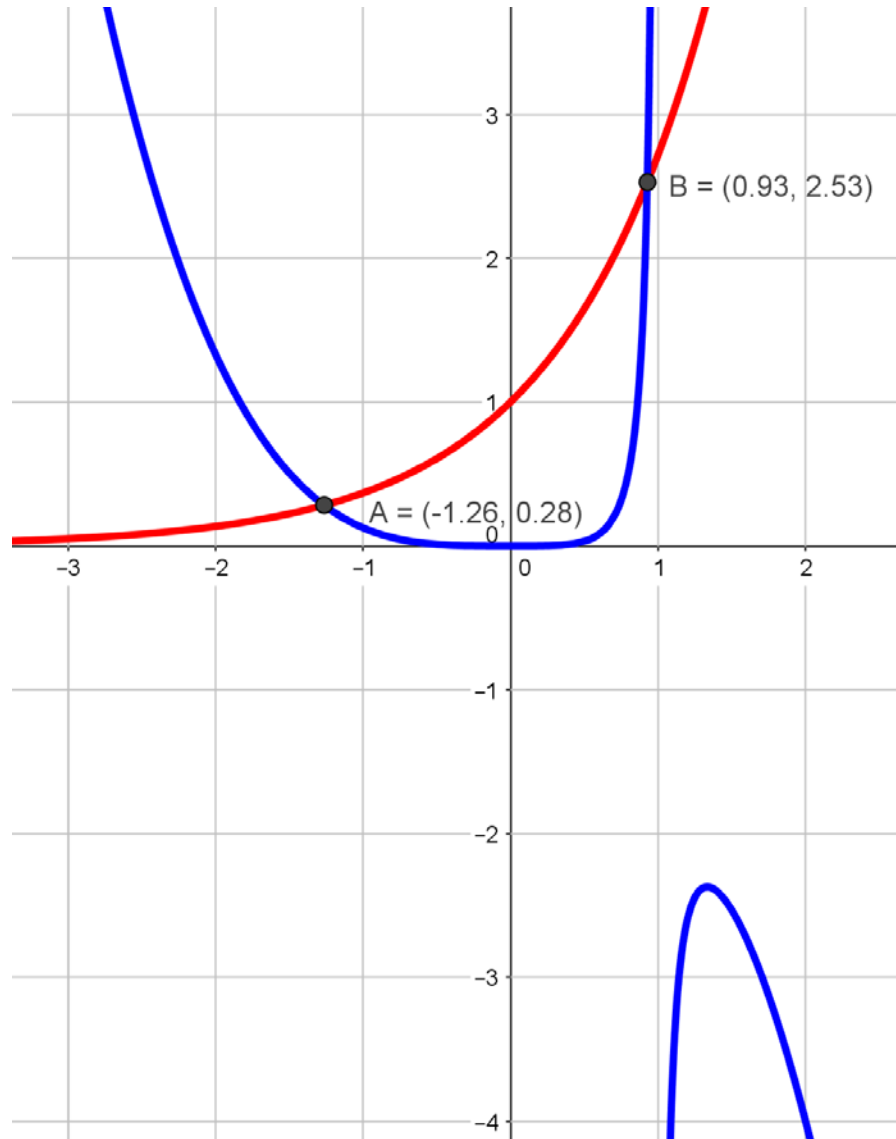
10. Demuestra que la ecuación $x^4 + 4e^x \cdot (x - 1)$ tiene únicamente dos soluciones. ¿Podrías decir entre qué dos números consecutivos está cada una de las soluciones? Utiliza para ello las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \frac{-x^4}{4(x-1)}$.

$$f(x) = e^x \text{ y } g(x) = \frac{-x^4}{4(x-1)}.$$

La ecuación $x^4 + 4e^x \cdot (x - 1) = 0$ se puede transformar en: $e^x = \frac{-x^4}{4(x-1)}$.

Por tanto, las soluciones de la ecuación serán los valores de las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \frac{-x^4}{4(x-1)}$.

La representación gráfica de ambas funciones puede verse a continuación:



A partir de la representación gráfica observamos que las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se cortan en dos puntos: uno de ellos en el intervalo $(-2, -1)$ [punto A = $(-1.26; 0.28)$] y otro en el intervalo $(0, 1)$ [punto B = $(0.93; 2.53)$].

11. En la figura siguiente se muestran las gráficas de dos funciones, la de la función $f(x) = x e^x$ y la de sus derivada $f'(x)$.

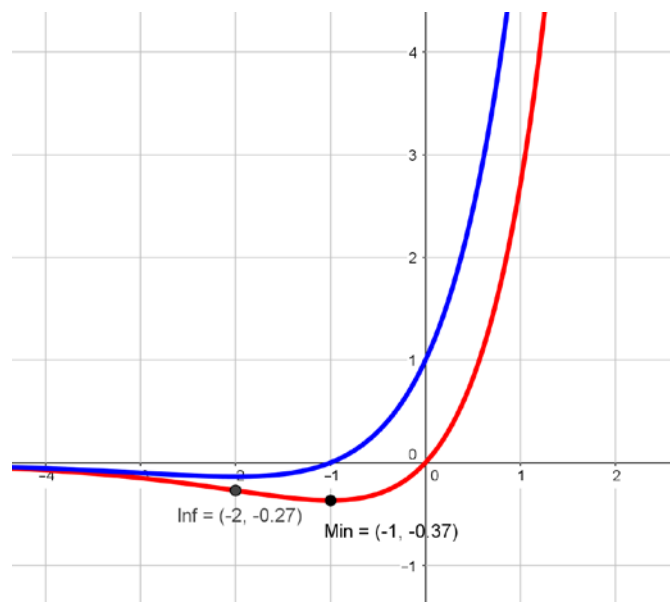
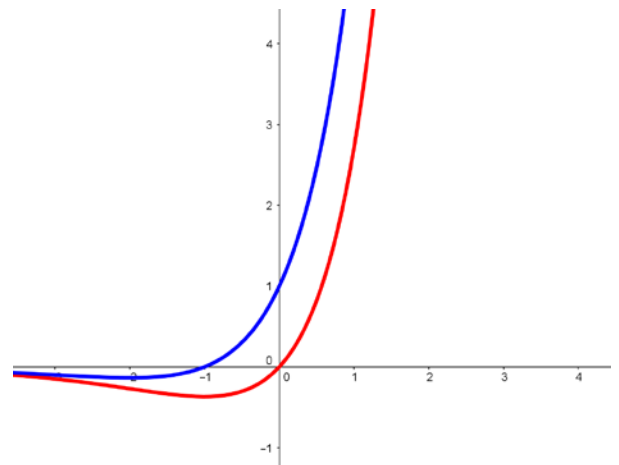
Distingue una de la otra, justificando razonadamente el por qué, y halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, así como los puntos donde hay máximos, mínimos e inflexiones de $y = f(x)$.

La función y su función derivada son $f(x) = x \cdot e^x$ y $f'(x) = (x + 1) \cdot e^x$.

La gráfica de $y = f(x)$ es la que pasa por el origen.

Las características pedidas para la función $y = f(x)$ en el enunciado son:

- La función es estrictamente creciente en $(-1, +\infty)$.
- La función es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1)$.
- La función tiene un mínimo en $\left(-1, -\frac{1}{e}\right) = (-1, -0,37)$.
- La función es cóncava hacia las y positivas en $(-2, +\infty)$.
- La función es cóncava hacia las y negativas $(-\infty, -2)$.
- La función tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right) = (-2; -0,27)$.

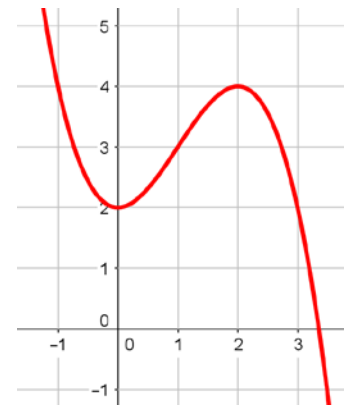


12. Determina los coeficientes a, b, c y d de una función polinómica de tercer grado cuya representación gráfica es la que muestra el dibujo.

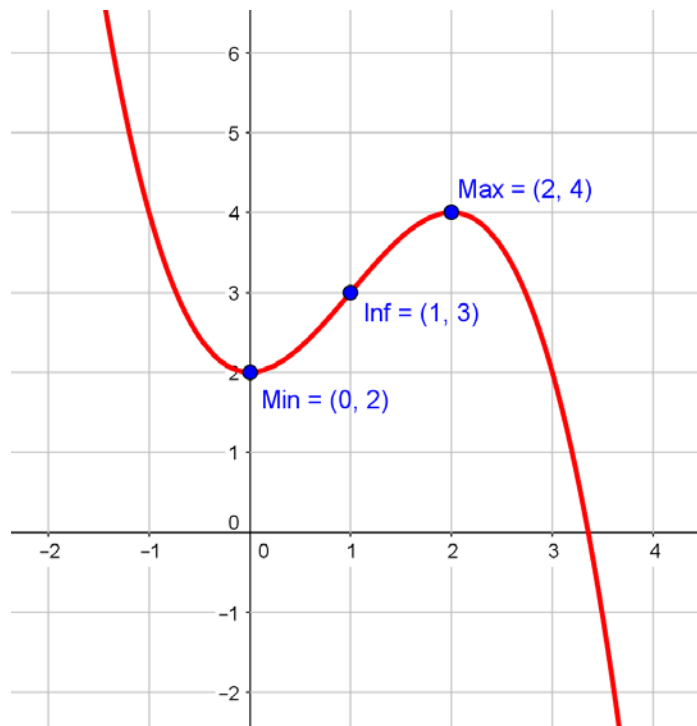
La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un mínimo en el punto (0, 2) y un máximo en el punto (2, 4). La derivada primera es $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Imponemos las condiciones $f(0) = 2$; $f'(0) = 0$; $f(2) = 4$ y $f'(2) = 0$ y obtenemos:

$$\begin{cases} d = 2 \\ c = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 3/2 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}$$



La función es $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$ y su gráfica podemos verla en el dibujo.



13. La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo $t \in [0, +\infty]$ medido en segundo, por la función:

$$N(t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$$

a) Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para qué $t \in [0, +\infty)$ la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es la concentración?

b) ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito?

a) Para estudiar el crecimiento, utilizamos la derivada primera:

$$N'(t) = \frac{-60 \cdot (-2e^{-t})}{(1+2e^{-t})^2} = \frac{120e^{-t}}{(1+2e^{-t})^2} > 0 \text{ para todo } t \text{ pues } e^{-t} > 0.$$

Por tanto, la concentración de nitrógeno crece con el tiempo.

Como $N(t)$ es creciente, la concentración será mínima para $t = 0$:

$$N(0) = \frac{60}{1+2e^0} = \frac{60}{1+2} = 20.$$

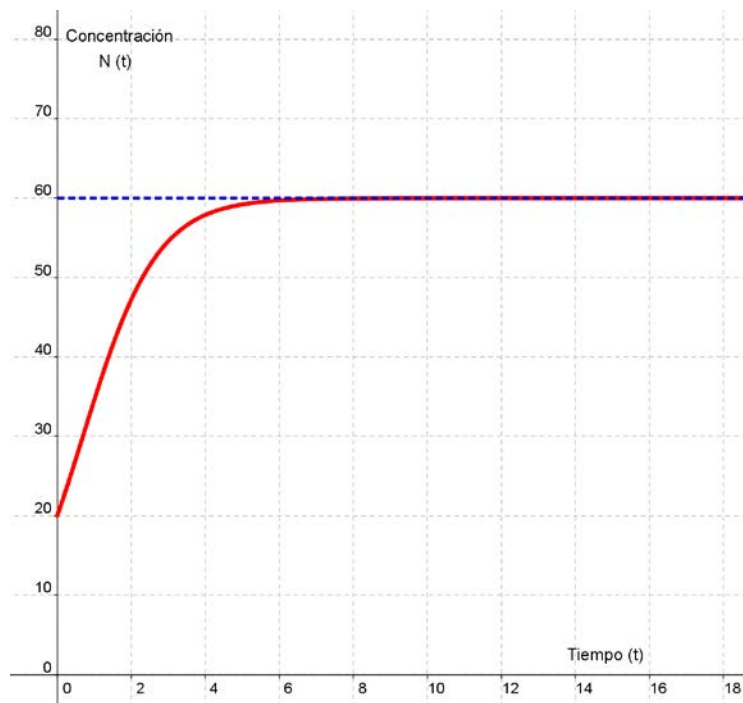
La concentración mínima será del 20%.

b) Hallamos el límite:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{60}{1+2e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{60}{1+\frac{2}{e^t}} = 60$$

Cuando el tiempo tiende a infinito la concentración tiende al 60%.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica que sigue.



ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 298

1. Dadas las funciones polinómicas $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

a) Halla aquellas cuya derivada segunda sea $x - 1$.

b) ¿Cuál o cuales de ellas tienen un mínimo relativo en el punto $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$?

c) Realiza su representación gráfica.

a) Las dos primeras derivadas de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ son:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ y } f''(x) = 6ax + 2b$$

Si identificamos los polinomios $6ax + 2b$ con $x^2 - 1$, obtenemos: $a = \frac{1}{6}$ y $b = -\frac{1}{2}$.

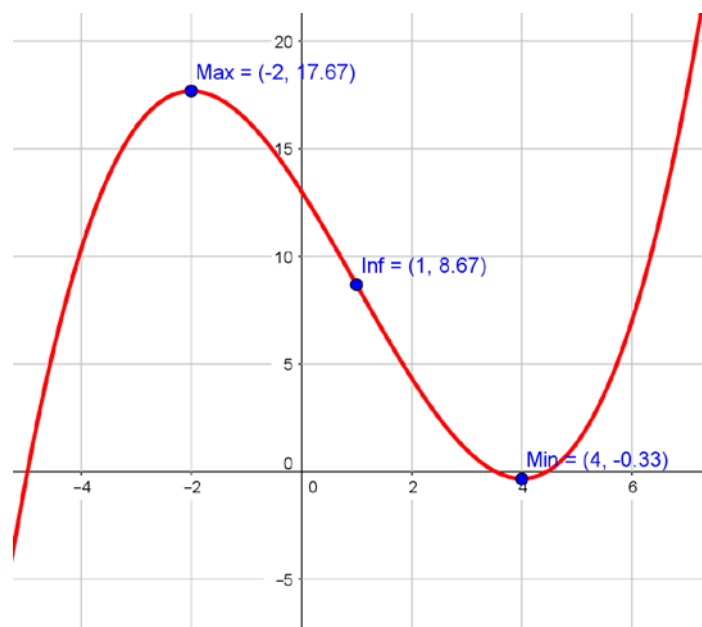
b) La función queda en la forma $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + cx + d$ y sus dos primeras derivadas son:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + c \text{ y } f''(x) = x - 1$$

Si imponemos que tiene un mínimo relativo en el punto $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$, obtenemos:

$$\begin{cases} f(4) = -\frac{1}{3} \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{6} \cdot 4^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 + 4c + d = -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 4 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -4 \\ d = 13 \end{cases}$$

c) La función buscada es $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 13$ y su representación gráfica puede verse en el dibujo.



2. Se considera la

función definida por

$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}.$$

a) Calcula a y b para que la gráfica pase por el punto $(-2, -6)$ y admita en dicho punto una tangente horizontal.

b) Realiza la representación gráfica de la función resultante.

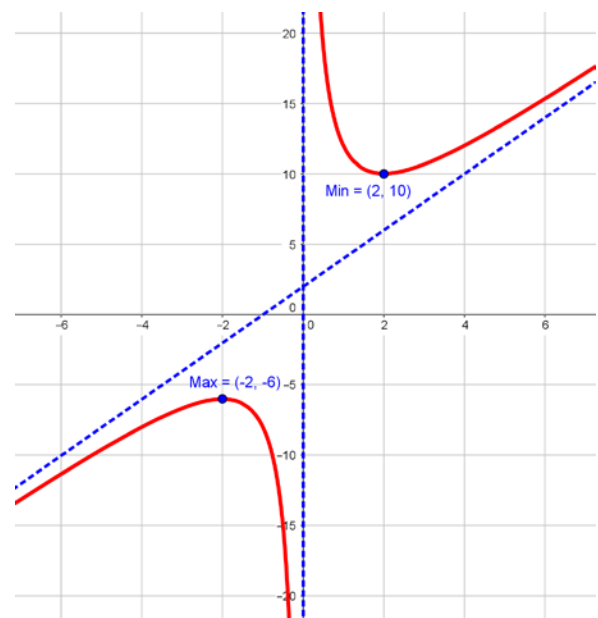
a) Imponiendo las condiciones $f(-2) = -6$ y $f'(-2) = 0$ obtenemos:

$$\begin{cases} -2a + b - 4 = -6 \\ a - \frac{8}{(-2)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

b) La función resultante es $f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x} = \frac{2x^2 + 2x + 8}{x}$ y sus características son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Puntos de corte con los ejes: no tiene.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: las rectas $x = 0$ e $y = 2x + 2$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-\infty, -2) \cup (2; +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-2, 2)$.
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(-2, -6)$ y un mínimo relativo en $(2, 10)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia las y positivas en $(0; +\infty)$.
- Puntos de inflexión: no tiene.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica que sigue.



3. Representa gráficamente las siguientes funciones:

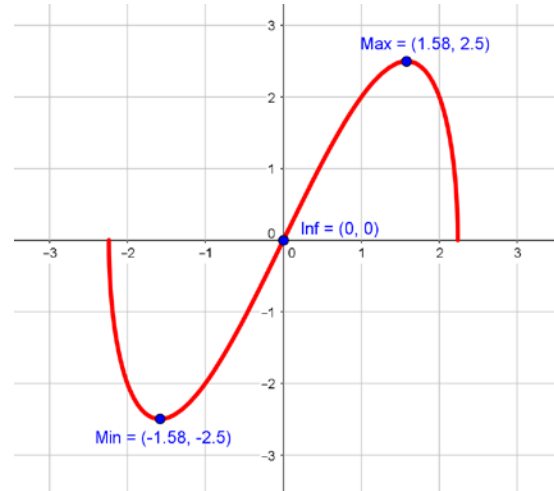
a) $f(x) = x \cdot \sqrt{5 - x^2}$

b) $f(x) = x - \ln x$

c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

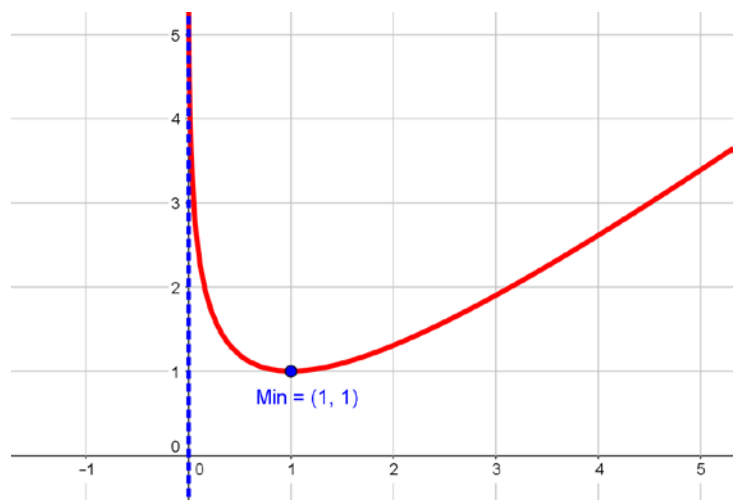
a) Las características de la función $f(x) = x \cdot \sqrt{5 - x^2}$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$
- Puntos de corte con los ejes: $(-\sqrt{5}, 0)$; $(0, 0)$ y $(\sqrt{5}, 0)$.
- Simetría: respecto del origen de coordenadas.
- Asíntotas: no tiene.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(-1,58; 1,58)$ y estrictamente decreciente en $(-\sqrt{5}, -1,58) \cup (1,58, \sqrt{5})$
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en $(1,58; 2,5)$ y un mínimo relativo en $(-1,58; -2,5)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\sqrt{5}, 0)$ y cóncava hacia las y positivas en $(\sqrt{5}, 0)$.
- Puntos de inflexión: el punto $(0, 0)$ es de inflexión.



b) Las características de la función $f(x) = x - \ln x$ son:

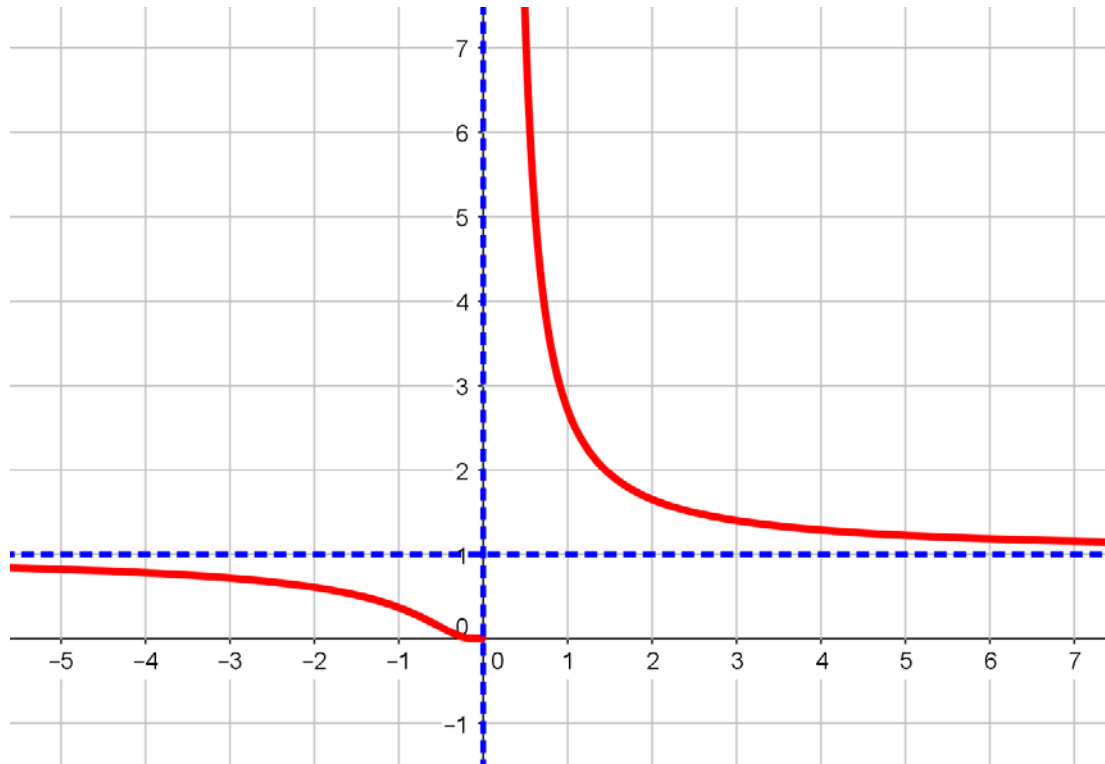
- Dominio: $\text{Dom } f = (0, +\infty)$.
- Puntos de corte con los ejes: no tiene.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: la recta $x = 0$.
- Ramas parabólicas: tiene una hacia más infinito.
- Monotonía: es estrictamente creciente en $(1, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(0, 1)$.
- Extremos relativos: tiene un mínimo relativo en $(1, 1)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y positivas en $(0, +\infty)$.



- Puntos de inflexión: no tiene.

c) Las características de la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ son:

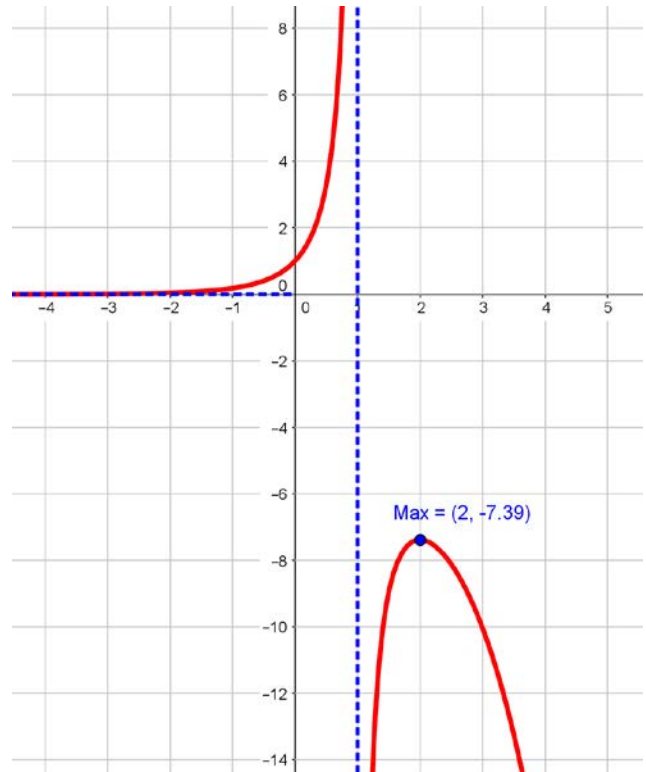
- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$.
- Puntos de corte con los ejes: no tiene.
- Simetría: no tiene.
- Asíntotas: las rectas $x = 0$ e $y = 1$.
- Ramas parabólicas: no tiene.
- Monotonía: es estrictamente decreciente en $\mathbb{R} - \{0\}$.
- Extremos relativos: no tiene.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia las y positivas en $(0, +\infty)$.
- Puntos de inflexión: no tiene.



4. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$, calculando, en su caso, el dominio de definición, máximos, mínimos, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de corte con los ejes.

Las características pedidas en el enunciado de la función $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ son:

- Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 1)$.
- Asíntotas: las rectas $x = 1$ e $y = 0$.
- Ramas parabólicas: tiene una a menos infinito.
- Monotonía: es estrictamente decreciente en $(2, +\infty)$ y estrictamente creciente en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$.
- Extremos relativos: tiene un máximo relativo en el punto $(2; -7,39)$.
- Concavidad: es cóncava hacia las y negativas en $(1, +\infty)$ y cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, 1)$.
- Puntos de inflexión: no tiene.

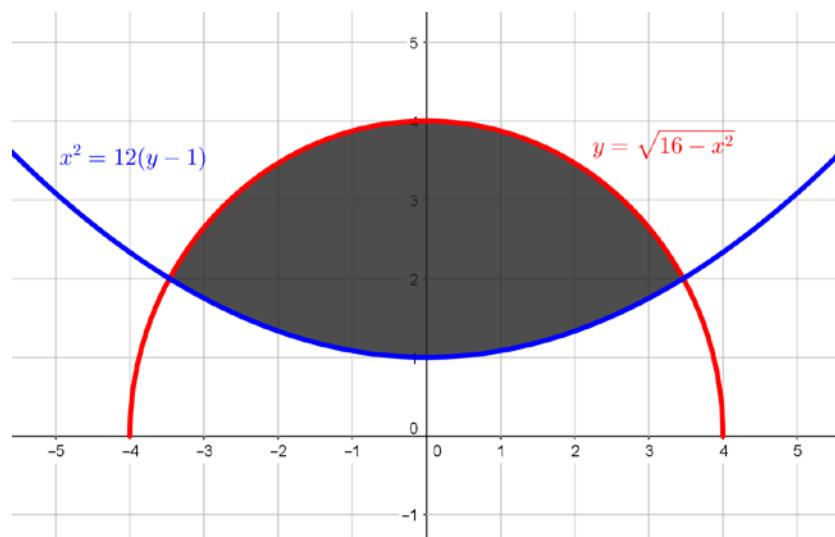


5. Dibuja la región del plano comprendida entre las curvas:

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$x^2 = 12(y - 1)$$

La región sombreada, comprendida entre una semicircunferencia (en rojo) y una parábola (en azul), puede verse en el dibujo.



6. Una partícula se

mueva a lo

largo de la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ para $x > 1$. En el punto $P\left(2, -\frac{4}{3}\right)$ deja a la curva y se desliza a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

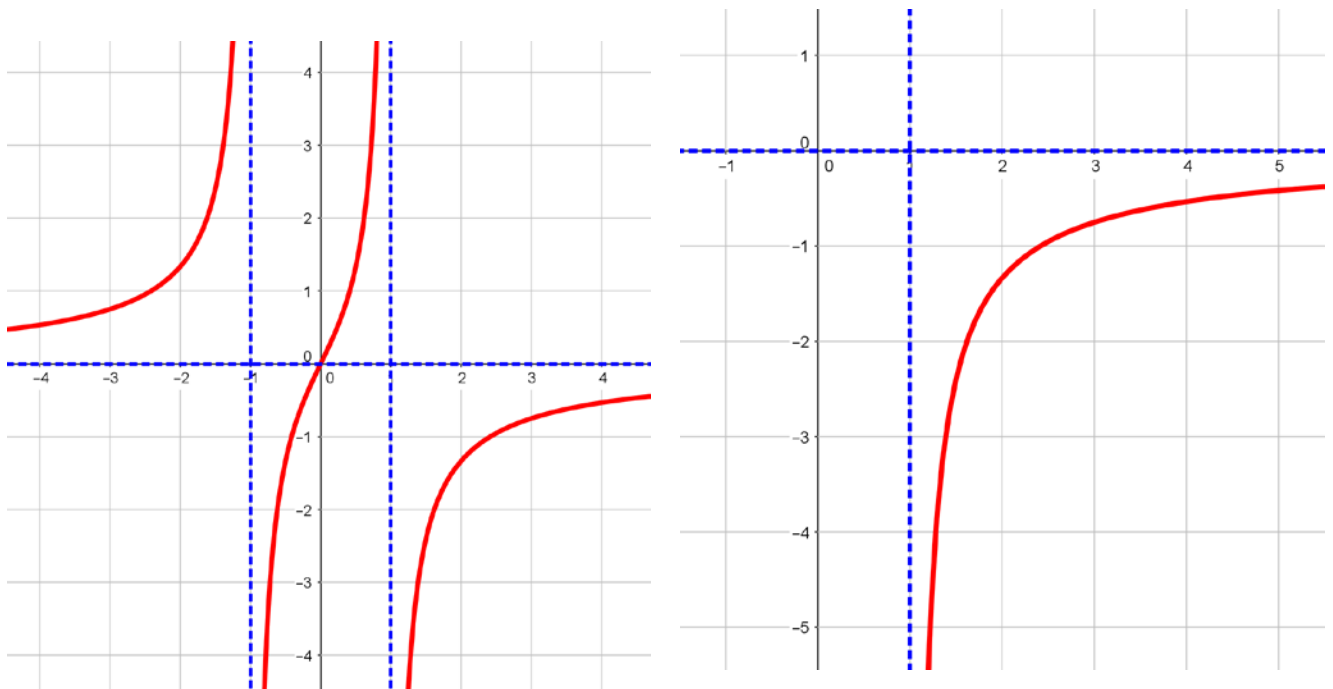
a) Determina la ecuación de la tangente.

b) Si se desliza de derecha a izquierda, halla el punto en el que la partícula se encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P.

c) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, encuentra las coordenadas del punto en el que la partícula encuentra al eje OX.

Las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ en todo su dominio de definición y de la función

$f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ con $x > 1$ pueden verse a continuación.



a) La derivada de la función es $f'(x) = \frac{2 + 2x^2}{(1-x^2)^2}$ y su valor para $x = 2$ es $f'(2) = \frac{10}{9}$.

La ecuación de la recta tangente en el punto $P\left(2, -\frac{4}{3}\right)$ es:

$$y + \frac{4}{3} = \frac{10}{9} \cdot (x - 2) \Rightarrow 10x - 9y = 32 \Rightarrow y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$$

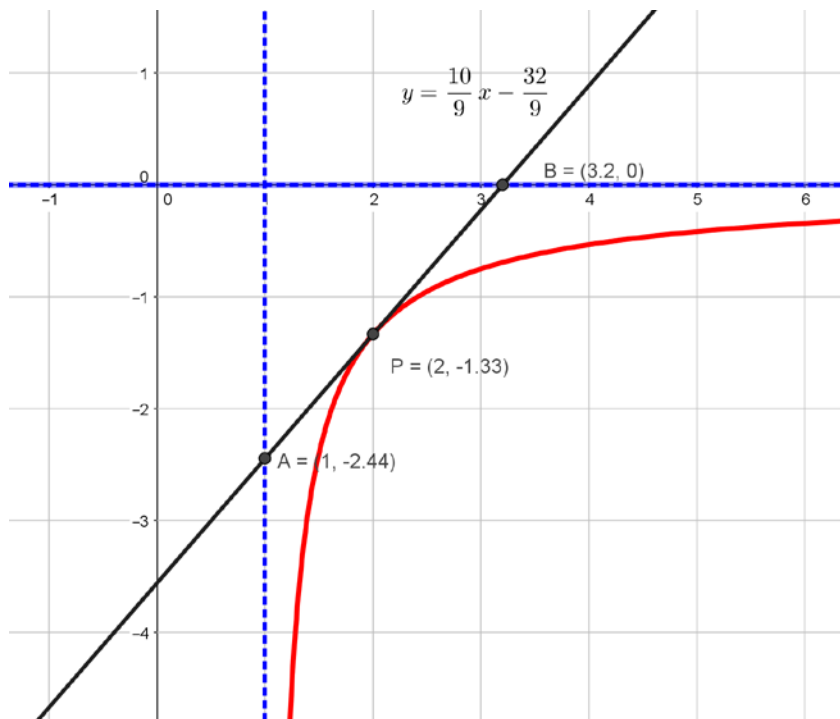
b) El punto, A, de corte entre la tangente y la asíntota $x = 1$ es:

$$\begin{cases} y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9} \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{22}{9} = -2,44 \end{cases} \Rightarrow A(1; -2,44)$$

b) El punto, B, de corte entre la tangente y el eje OX es:

$$\begin{cases} y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{32}{10} = 3,2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(3,2; 0)$$

Todo lo anterior puede verse en el dibujo que sigue.



7. Dada la función $f(x) = x^2 \cdot |x - 3|$, halla:

a) Los puntos en los que $f(x)$ no es derivable.

b) Sus máximos y mínimos relativos.

c) Su representación gráfica.

a) La función $f(x) = x^2 \cdot |x - 3|$ puede expresarse de la forma siguiente:

$$f(x) = x^2 \cdot |x - 3| = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Las expresiones anteriores son funciones polinómicas y, por tanto, son continuas y derivable para cualquier valor de la variable. Veamos qué ocurre en $x = 3$, donde cambia la definición de la función. Hallamos las derivadas laterales para ese valor:

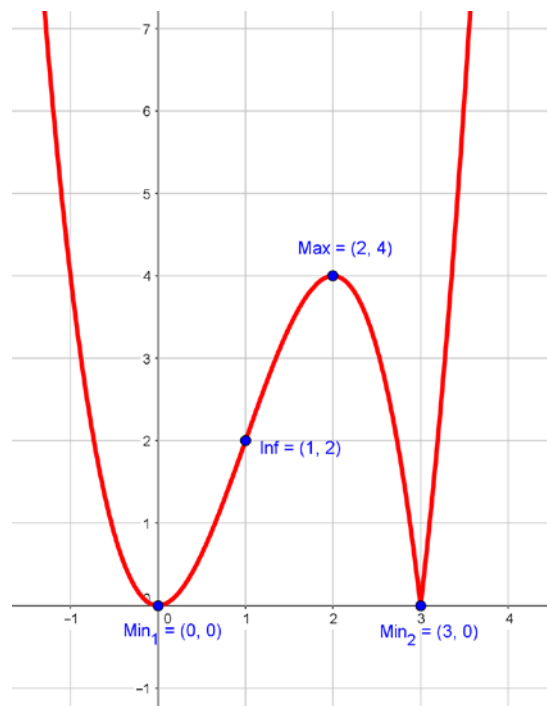
$$f'(3^-) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^3 + 3x^2 - 0}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^2(x - 3)}{(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x^2) = -9$$

$$f'(3^+) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 - 3x^2 - 0}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2(x - 3)}{(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2) = 9$$

La función $y = f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

b) La función presenta un máximo relativo en el punto $(2, 4)$ y dos mínimos relativos en los puntos $(0, 0)$ y $(3, 0)$.

c) La representación gráfica puede verse en el dibujo.



8. Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$, se pide:

a) Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto a estas.

b) Máximos y mínimos relativos, e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Dibuja la gráfica de $y = f(x)$.

a) La función $y = f(x)$ está definida para cualquier número real.

Las asíntotas de la gráfica de la función son las rectas $y = -1$ e $y = 1$, al cumplirse:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

Para hallar la posición de la curva respecto de las asíntotas evaluamos la diferencia de las ordenadas de la asíntota (y_A) con las ordenadas de la función (y_F).

Para $x > 0$, hallamos el signo de la diferencia de ordenadas:

$$y_A - y_F = 1 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1)}{\sqrt{x^2+1}} < 0$$

Por ejemplo, para $x = 100$, $y_A - y_F = -0,009 < 0$. Por tanto, para $x > 0$ la asíntota va por debajo de la curva.

Para $x < 0$, hallamos el signo de la diferencia de ordenadas:

$$y_A - y_F = -1 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{\sqrt{x^2+1} + (x+1)}{\sqrt{x^2+1}} < 0$$

Por ejemplo, para $x = -100$, $y_A - y_F = -0,010 < 0$. Por tanto, para $x < 0$ la asíntota va por debajo de la curva.

b) La primera derivada de la función $y = f(x)$ es $f'(x) = \frac{1-x}{(x^2+1) \cdot \sqrt{x^2+1}}$.

Estudiando su signo obtenemos:

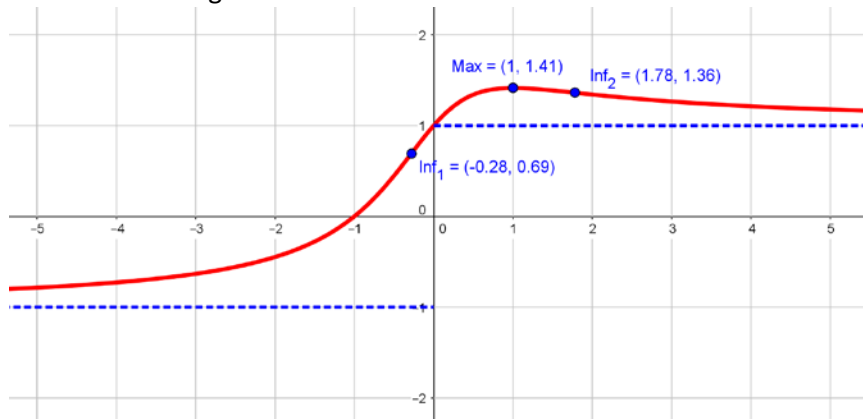
- La función es estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$.
- La función es estrictamente decreciente en $(1, +\infty)$.
- La función tiene un máximo en el punto $(1, \sqrt{2}) = (1; 1,41)$.

c) La segunda derivada de la función $y = f(x)$ es $f''(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{(x^2+1)^5 \cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{2(x+0,28)(x-1,78)}{(x^2+1)^5 \sqrt{x^2+1}}$.

Estudiando su signo obtenemos:

- La función es cóncava hacia las y positivas en $(-\infty, -0,28) \cup (1,78; +\infty)$.
- La función es cóncava hacia las y negativas en $(-0,28; 1,78)$.
- La función tiene dos puntos de inflexión en $(-0,28; 0,69)$ y $(1,78; 1,36)$.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica.



Analizamos alguno de los modelos propuestos para el estudio del crecimiento de los seres vivos (humanos, animales, plantas, microorganismos...).

1. Modelo de Malthus.

Thomas R. Malthus (1766-1834) publicó en el *Ensayo sobre el principio de la población* (1798) el modelo que lleva su nombre y que se caracteriza por el crecimiento continuo o exponencial. La expresión matemática es:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{rt}$$



En la fórmula anterior, $y(t)$ es el número de individuos presentes en el tiempo t , y_0 el tamaño inicial de la población y r un parámetro que expresa el nacimiento o incorporación de nuevos individuos en cantidad constante, generación tras generación.

Comprueba que se cumple la relación $y'(t) = r \cdot y(t)$. Representa gráficamente las funciones dadas por el modelo anterior para distintos valores de y_0 y el parámetro r , y analiza las gráficas resultantes.

2. Modelo de Verhulst o ley logística.

Pierre F. Verhulst (1804-1849) modificó, en 1838, el modelo de maltusiano considerando el hecho de que debe haber un tamaño máximo de la población o valor k , ya que el espacio (o el agua o los alimentos o medio ambiente) es limitado. Obtuvo la siguiente expresión:

$$y(t) = \frac{k \cdot y_0}{y_0 + (k - y_0) \cdot e^{-rt}}$$

Comprueba que se cumple la relación $y'(t) = r \cdot y(t) \cdot (k - y(t))$. Representa gráficamente las funciones dadas por el modelo anterior para distintos valores de las variables k , r e y_0 , analiza las gráficas resultantes. Compara los resultados obtenidos con el modelo anterior.

3. Otros modelos.

Existen otros modelos que estudian el crecimiento en situaciones más restringidas. Son el modelo de Gompertz y el modelo de von Bertalanffy. Busca sus expresiones matemáticas, representa gráficamente las funciones resultantes y analiza las gráficas obtenidas.

Busca contextos distintos de la Biología donde se apliquen alguno de estos modelos.

A continuación damos referencias donde encontrar información sobre los modelos de crecimiento.

- AMELKIN, V. V. (2003). *Ecuaciones diferenciales en la práctica*. Editorial URSS. Moscú.
- LAHOZ-BELTRA, Rafael. (2010). *Las matemáticas de la vida*. RBA. Barcelona.
- MARTÍN, Miguel Ángel. (2013). *Matemáticas bioenriquecidas*. Edición propia. Madrid.
- STEWART, Ian. (2011). *Las matemáticas de la vida*. Crítica. Barcelona.
- <http://www.ecologia.info/leyes.htm>

- www.uam.es/personal_pdi/ciencias/.../08_BioCap6_Leyes_Escala.ppt