EXAMEN MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

1.- Resuelve los siguientes apartados:

a) ¿Es posible que una matriz 3 x 4 tenga rango 4? Razona tu respuesta.

b) Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que $|M| = 2$. Calcula el rango de M^3.

c) Halla el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

2.- Estudia el rango de A según los valores del parámetro:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

3.- Resuelve los siguientes apartados:

a) Estudia el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$ según los valores de t.

b) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$ Determina, si existen, los valores de k para que rg A = 1.

c) Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿cuál es el valor de a?

4.- Usando el teorema de Rouché-Fröbenius, clasifica el sistema $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}$

- Usando el teorema de Rouché-Fröbenius, clasifica el sistema $\begin{cases} x + y = 1 + z \\ 2x + z = 2 + y \\ y = z \end{cases}$

- Usando el teorema de Rouché-Fröbenius, clasifica el sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 4x + 5y + z = 2 \end{cases}$

1.- Resuelve los siguientes apartados:

a) ¿Es posible que una matriz 3 x 4 tenga rango 4? Razona tu respuesta.

b) Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que |M| = 2. Calcula el rango de M^3.

c) Halla el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) NO. El rango de una matriz es el orden de la mayor submatriz <u>CUADRADA</u> no nula. En una matriz de 3 x 4 la mayor submatriz cuadrada sería de 3x3, por lo tanto el rango será menor o igual que 3, nunca 4.

b) Si $|M| = 2$, la matriz M es diagonalizable, es decir, se puede poner de la forma $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$. $|A| = a \cdot d \cdot f$. Si elevamos esta nueva matriz a 3, la nueva matriz será diagonal y su determinante será <u>NO NULO</u>, por lo tanto el rango de $A^3 = \underline{\underline{3}}$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{-2.1F+3F}{\overset{-3.1F+3F}{=}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{Ran(A) = 2}}$$

2.- Estudia el rango de A según los valores del parámetro:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -6 & 4 \\ -2 & & -4 & 8 & -4 \\ \hline & 2 & -4 & 2 & \boxed{0} \\ 1 & & 2 & -2 & \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

a)

$|A| = 0 \quad -2\lambda - 2\lambda - 2\lambda + 2\lambda^3 + 2 + 2 = 0 ; 2\lambda^3 - 6\lambda + 4 = 0$

$(\lambda+2)(\lambda-1)(2\lambda-2) = 0$

$\lambda = -2 ; \lambda = 1$

Si $\lambda = -2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Ran(A) = 2$

Si $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Ran(A) = 2$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = 0 \Rightarrow m + m - 1 - m(m-1) - m = 0$

$2m - 1 - m^2 + \cancel{m} - \cancel{m} = 0 \quad -m^2 + 2m - 1 = 0$

$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$

Si $m = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Ran}(A) = 2$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$

$|A| = 0 \quad (m+1)(m-1) + m + 1 = 0 \quad m^2 \cancel{-1} + m \cancel{+1} = 0$

$m^2 + m = 0 \quad m(m+1) = 0 \quad m = 0 \quad m = -1$

Si $m = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ran}(A) = 2$

Si $m = -1$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Ran}(A) = 2$

3.- Resuelve los siguientes apartados:

a) Estudia el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$ según los valores de t.

b) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$ Determina, si existen, los valores de k para que rg A = 1.

c) Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿cuál es el valor de a?

a) $|A| = 0 \quad (t+1)(t+3) + (t-1)(-2t-1) - 2(t+3) = 0$

$t^2 + 3t + \cancel{t} + 3 - 2t^2 - \cancel{t} + 2\cancel{t} + 1 - \cancel{2t} - 6 = 0 \quad -t^2 + 3t - 2 = 0$

$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

Si $t = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Ran}(A) = 2$

Si $t = 2$ $\quad -2 \cdot 1F + 2F \qquad 5 \cdot 1F + 3F$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Ran}(A) = 2$$

b) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$ Determina, si existen, los valores de k para que rg A = 1.

Para que el rango sea 1 $\Rightarrow |A| = 0$

$$|A| = (1-k)(1+k) = 0 \begin{cases} \boxed{\begin{matrix} k = 1 \\ k = -1 \end{matrix}} \end{cases}$$

Si $K = 1$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Ran}(A) = 1$

Si $K = -1$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Ran}(A) = 1$

c) Si $\text{Ran}(A) < 3$ es porque $|A| = 0$

$$|A| = -12a - 4 + a - 1 - 4 + 2a + 6a - 6 = 0 \qquad -3a - 15 = 0 \qquad \boxed{a = -5}$$

Comprobación $\qquad -3 \cdot 1F + 2F$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 10 & 7 \\ 0 & -10 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.- Usando el teorema de Rouché-Fröbenius, clasifica el sistema $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 13 \neq 0$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{array}\right)$$

$\left.\begin{array}{l} \text{Ran}(A) = 3 \\ \text{Ran}(A^*) = 3 \end{array}\right\}$ Sistema compatible determinado

3.- Usando el teorema de Rouché-Fröbenius, clasifica el sistema $\begin{cases} x+y=1+z \\ 2x+z=2+y \\ y=z \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ y-z=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=0 \qquad Ran(A)=2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$-2.1F+2F$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$A^{*}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Ran(A^{*})=2$$

Como $Ran(A) = Ran(A^{*}) = 2 \Rightarrow$ Sistema Compatible INDETERMINADO

4.- Usando el teorema de Rouché-Fröbenius, clasifica el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y-z=1 \\ 4x+5y+z=2 \end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{*}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|A|=0 \Rightarrow Ran(A)=2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$-2.1F+2F \qquad -4.1F+3F$

$$A^{*}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad Ran(A^{*})=3$$

Como $Ran(A) \neq Ran(A^{*}) \Rightarrow$ Sistema incompatible