Problemas de Campo Gravitatorio

1

**Calcular la velocidad media de la Tierra en su órbita alrededor del Sol y la de la luna en su órbita alrededor de la Tierra, sabiendo que el radio medio de la órbita lunar es 400 veces menor que el de la órbita terrestre y que el periodo de revolución lunar es 13,38 veces menor que el de la terrestre. ($r_T$= 149 · 10$^9$ m)**

Solución:
Sean $R_L$ y $T_L$ el radio y período de la Luna alrededor de la Tierra y $R_T$ y $T_T$ el radio y período de la Tierra alrededor del Sol; conocemos $r_T$ = 149 · 10$^9$ m y $T_T$ = 1 año = 3,15 · 10$^7$ s y sabemos que $R_L = \frac{R_T}{400}$ y $T_L = \frac{T_T}{13,38}$ .

Las respectivas velocidades lineales orbitales serán:

$$v_T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_T}{T_T} \quad ; \quad v_L = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_L}{T_L} = \frac{13,38 \cdot v_T}{400}$$

Sustituyendo los valores de $R_T$ y $T_T$:
$v_T$ = 2,97 · 10$^4$ m/s
$v_L$ = 9,92 · 10$^2$ m/s

3 **El radio de la órbita de la Luna en torno a la Tierra es de 400.000 km; el período de revolución es de 28 días. El radio de la órbita del cuarto satélite de Saturno, es el mismo, pero su período de revolución es de 2,8 días. ¿Cuál es la masa de Saturno en relación a la de la Tierra suponiendo órbitas circulares?**

Solución:

Calculamos la velocidad de giro de la Luna en torno a la Tierra: $v_L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10^8 m}{28 \cdot 86\ 400\ s} = 1\ 038,9\ m/s$ .

La velocidad del satélite será: $v_D = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10^8 m}{2,8 \cdot 86\ 400\ s} = 10388,9\ m/s$ .

Conocidas estas velocidades y sabiendo que: $\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{r}}$ .

En el caso de la Tierra: $v_L = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_L}}$ y $v_D = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r_D}}$

$$\frac{v_L}{v_D} = \frac{\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_L}}}{\sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r_D}}} = \sqrt{\frac{M_T \cdot r_D}{M_S \cdot r_L}} = \frac{1038,9}{10388,9} = 0,1 = \sqrt{\frac{M_T}{M_S}} \cdot \sqrt{\frac{r_D}{r_L}} \Rightarrow \frac{M_T}{M_S} = 0,1^2 = 0,01$$

$$M_S = 10^2 \cdot M_T$$

4 **Los cometas Halley y Kohoutek tienen períodos de 76 años y unos 106 años respectivamente, Suponiendo, para simplificar, que sus órbitas sean circulares, calcúlense sus distancias medias al Sol, así como sus velocidades medias.**
**Datos: distancia Tierra - Sol = 1,5 · 10$^8$ km.**

Solución:
Conocido el período de la Tierra en su giro en torno al Sol $T_T$ = 3,15 · 10$^7$ s y la distancia Tierra - Sol podemos calcular la constante de Keppler: $\frac{T_T^2}{r_T^3} = K = \frac{(3,15 \cdot 10^7 s)^2}{(1,5 \cdot 10^{11} m)^3} = 2,94 \cdot 10^{-19}\ \frac{s^2}{m^3}$

Los períodos de los cometas serán:
$T_H$ = 76 · 365 · 24 · 60 · 60 = 239,7 · 10$^7$ s

$T_K = 106 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 334{,}3 \cdot 10^7$ s

Sustituyendo estos datos: $r_H = \left(\frac{T_H^2}{k}\right)^{1/3} = 2{,}7 \cdot 10^{12}\, m \;\; ; \;\; r_K = \left(\frac{T_K^2}{k}\right)^{1/3} = 3{,}4 \cdot 10^{12}\, m$ .

Conocidos los radios, las velocidades vienen dadas por:

$$v_H = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_H}{T_H} = 7\ 077{,}4\ m/s \;\; ; \;\; v_K = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_K}{T_K} = 6\ 390{,}3\ m/s$$

**5. Dados dos cuerpos con masa m y m´ situados a una distancia *R*, ¿en qué relación se atraerán dos cuerpos con masas** $m_1 = \frac{m}{2}\ y\ m_2 = \frac{m'}{2}$ **situados a una distancia** $\frac{R}{2}$ **?**

Solución:

Utilizando la ley de gravitación universal, tenemos que la atracción entre *m* y *m´*es $F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$ . La fuerza de atracción entre $m_1$ y $m_2$ será: $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\left(\frac{R}{4}\right)^2} = G \cdot \frac{\frac{m}{2} \cdot \frac{m'}{2}}{\frac{R^2}{4}} = G \cdot \frac{m \cdot m'}{R^2}$ , luego la fuerza es idéntica a la que existe entre *m* y *m´*.

**6. ¿Cómo se relaciona la aceleración centrípeta de un planeta situado en la órbita de radio *R* con la velocidad angular de dicho planeta?**

$a)\ a = \omega^2 \cdot R$

$b)\ a = \omega \cdot R^2$

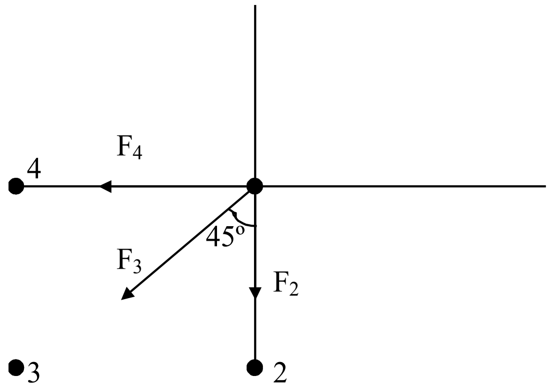
$c)\ a = \omega^2 \cdot R^2$

$d)\ a = \frac{\omega}{R}$

Solución:
La solución correcta es la a); esto puede verse además por argumentos dimensionales. Si la aceleración tiene dimensiones [a] = [L]·$[T^{-2}]$ , [R] = [L] y [w] = $[T^{-1}]$ y dado que las dimensiones han de ser las mismas a ambos lados de la igualdad, esto sólo es posible en el caso a), es decir, [a] = [L]·$[T^{-2}]$ = $\omega^2$·R = $[T^{-2}]$·[L]

**7. Una masa se encuentra situada en el vértice de un cuadrado de 3 m de lado, habiendo en los otros vértices masas iguales, de valor 10 kg cada una. Encontrar la aceleración de la masa debida a la interacción gravitatoria con las demás. Dato G=6,67*$10^{-11}$ SI**

Solución:




$$g_x = g_4 + g_3 \cos 45^o = -7,41 \cdot 10^{-11} - 2,62 \cdot 10^{-11} = -1 \cdot 10^{-10}\ \vec{i}\ N/Kg$$
$$g_y = g_2 + g_3\, sen\, 45^o = -7,41 \cdot 10^{-11} - 2,62 \cdot 10^{-11} = -1 \cdot 10^{-10}\ \vec{j}\ N/Kg$$

módulo

$$g = 1,41 \cdot 10^{-10}\ m/s^2 \quad .$$

**8. Los radios de la Tierra y de Marte son, respectivamente, 6.400 km y 3.400 km. La masa de la Tierra es 9,5 veces la de Marte. El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Marte en relación con la Tierra**

Solución:

Aplicando la ecuación $g = \frac{G \cdot m}{r^2}$ a la Tierra y Marte, se tiene: $g_T = \frac{G \cdot m_T}{r_T^2}$ $y$ $g_M = \frac{G \cdot m_M}{r_M^2}$ ,

donde $m_T$ y $r_T$ son la masa y el radio de la Tierra respectivamente, y $m_M$ y $r_M$ los de Marte.
Dividiendo miembro a miembro la segunda ecuación entre la primera, resulta:

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{m_M \cdot r_T^2}{m_T \cdot r_M^2} = \frac{1}{9,5} \cdot \left(\frac{64}{34}\right)^2 = 0,373$$

**9.Estudiar la densidad de la Tierra haciendo uso de la ley de gravitación de Newton.**
**Datos: $R_T$: 6 370 km; g superficie de la tierra=9,81 m/s$^2$.**

Solución:

La aceleración de la gravedad viene dada por $g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = 9,8\ \frac{m}{s^2}$ ; despejando $M_T$ se obtiene:

$$M_T = \frac{R_T^2 \cdot g}{G} = 6,0 \cdot 10^{24}\, kg \quad .$$

Si suponemos que la Tierra es una esfera perfecta cuyo volumen es $V_T = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_T^3 = 1,1 \cdot 10^{21}\, m^3$ , la

densidad por tanto será: $\rho = \frac{M_T}{V_T} = 5,5 \cdot 10^3\, \frac{kg}{m^3}$ .

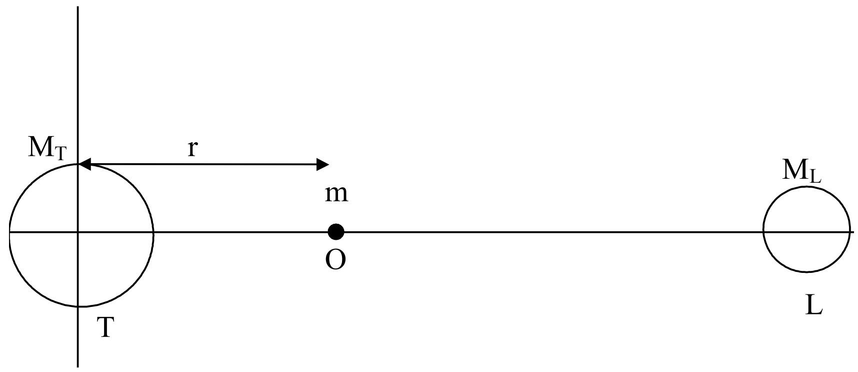
**10.La masa de la Tierra es 80 veces la de la Luna y su radio 4 veces mayor. Calcular el valor de la aceleración del campo gravitatorio en la superficie lunar en función de la Tierra.**

Solución:

La aceleración de la gravedad viene dada por $g=\frac{G\cdot M}{r^2}$ siendo *M* la masa del planeta y *r* su radio. La aceleración en la Luna será: $g_L=\frac{G\cdot M_L}{R_L{}^2}$ y la de la Tierra: $g_T=\frac{G\cdot M_T}{R_T{}^2}$ , la masa de la Luna se relaciona con la de la Tierra como $M_L=\frac{M_T}{80}$ y sus radios $R_L=\frac{R_T}{4}$ . La aceleración en la suma será así: $$g_L=\frac{\frac{G\cdot M_L}{80}}{\frac{R_T^2}{16}}=\frac{G\cdot M_T}{5\cdot R_T{}^2}=\frac{g_T}{5}$$

**11. ¿En que punto entre la Tierra y la Luna la fuerza gravitatoria neta sobre un objeto es cero?**

Solución:




El módulo de la fuerza gravitatoria sobre un objeto situado entre la Tierra y la Luna vendrá dado por:

$$F_g=-\frac{GM_T m}{r^2}+\frac{GM_L m}{(d-r)^2}$$

Siendo, d la distancia entre la Tierra y la Luna.
Igualando $F_g = 0$, tenemos:

$$-\frac{GM_T m}{r^2}+\frac{GM_L m}{(d-r)^2}=0\Rightarrow\frac{M_T}{r^2}=\frac{M_L}{(d-r)^2}\rightarrow r=\frac{d}{1+\left(\frac{M_L}{M_T}\right)^{1/2}}$$

**12 La densidad del oro es 19,3 · 10³ kg/m³. ¿Qué tamaño tiene una esfera de oro macizo para que la aceleración de la gravedad en su superficie sea igual a 9,81 m/s²?**
**Compruebe su respuesta comparándolo con el radio de la Tierra, cuya densidad es de 5,5 · 10³ kg/m³.**

Solución:
La aceleración de la gravedad viene dada por: $g = GM/r^2$ ; conocida $g = 9,81$ m/s² y sabiendo que la masa es $M=\rho\frac{4}{3}\pi r^3$ (suponiendo la Tierra una esfera perfecta), tenemos que

$$g=G\frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{r^2}=\frac{4}{3}\pi\rho Gr$$

Sustituyendo los datos del problema, obtenemos el radio de la esfera de oro:

$$9,81=\frac{4}{3}\pi\cdot 19,3\cdot 10^3\cdot G\cdot r \rightarrow r=1,8\cdot 19,27\simeq 1819\ km\ .$$

El radio de la Tierra es de 6 370 km, y dado que su densidad es menor, es coherente que su radio sea mayor.

**13 Si el diámetro del Sol es 100 veces el de la Tierra y la aceleración de la gravedad en la superficie solar es 27 veces la de la superficie terrestre, ¿cuántas veces mayor es la masa del Sol que la de la Tierra?**

Solución:
La fuerza que actúa sobre un cuerpo de masa m en la superficie de un planeta de masa *M* y radio *R* es, por una parte, igual a $\frac{G\cdot M\cdot m}{R^2}$ y, por otra igual al peso $m\cdot g$ siendo $g$ la aceleración de la gravedad en la superficie. Por tanto, $g=\frac{G\cdot M}{R^2}$ .

En el caso del Sol: $g_S=\frac{G\cdot M_S}{R_S{}^2}$ .

En el caso de la Tierra: $g_T=\frac{G\cdot M_T}{R_T{}^2}$

Por tanto: $\frac{g_S}{g_T}=\frac{M_S\cdot R_T{}^2}{M_T\cdot R_S{}^2} \Rightarrow \frac{M_S}{M_T}=\frac{g_S\cdot R_S{}^2}{g_T\cdot R_T{}^2}$

Como en este caso $g = 27\cdot g_T$ y $R_S = 100\cdot R_T$:

$$\frac{M_S}{M_T}=27\cdot 100^2 \Rightarrow M_S=2,7\cdot 10^5\cdot M_T$$

**14 ¿A qué velocidad debe ser puesta en órbita una nave espacial para que circunde la Tierra prácticamente a ras del suelo?**
**Datos: radio de la Tierra = $6,4\cdot 10^6$ m**
**masa de la Tierra = $6\cdot 10^{24}$ kg.**

**Solución:**
**Tenemos un objeto orbitando circularmente la Tierra prácticamente a ras de tierra, por tanto el radio de la órbita es aproximadamente el radio de la Tierra.**
**Dado que se trata de un movimiento circular bajo una fuerza gravitatoria tenemos:**

$$m\cdot\frac{v^2}{R_T}=G\cdot\frac{M_T\cdot m}{R_{T^2}} \Rightarrow v^2=\frac{G\cdot M_T}{R_T}\ .$$

**Sustituyendo los datos del problema:**

$$v=\left(\frac{6,67\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 6\cdot 10^{24}kg}{6,4\cdot 10^6 m}\right)=7,9\cdot 10^3\frac{m}{s}$$

**15 ¿Cuál será el período de un satélite cuya velocidad lineal es v = 7 127 m/s?**

**Datos:** $\mathrm{r}=\frac{5}{4}\cdot R_{TIERRA}$ **. radio de la Tierra = $6,4\cdot 10^6$ m**

**Solución:**

**Para hallar el período T, recordamos que** $v=\omega\cdot r=\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot r$ **.**

**Despejando T y teniendo en cuenta** $\mathrm{r}=\frac{5}{4}\cdot R_T$ **, tenemos:** $T=\frac{5\cdot\pi\cdot R_T}{2\cdot v}=6.997\ s=1,94\ h$ **.**

**16 Calcular la altura sobre la superficie terrestre a la que debemos colocar un satélite para que realice una órbita geoestacionaria;**
**Dato: $M_T$ = 6 · $10^{24}$ kg.**

Solución:
El período de la Tierra es de 24 h y el del satélite al ser geoestacionario, es por tanto el mismo. Sabiendo que la fuerza gravitatoria es igual a la centrífuga y que la velocidad será $v=\frac{2\cdot\pi\cdot r}{T}$ tenemos:

$$\frac{G\cdot M_T}{r^2}=\frac{\left(2\cdot\pi\cdot r/T\right)^2}{r}\ \Rightarrow\ r=\left(\frac{M_T\cdot T^2\cdot G}{4\cdot\pi^2}\right)^{1/3}=(7{,}544\cdot10^{22}\ m^3)^{1/3}=42,25\cdot10^6\ m$$

, donde *r* es el radio de la órbita. La altura del satélite será así: $h = r - R_T = 3{,}59\cdot10^7$ m.

**17. Un satélite describe una órbita plana de radio *R* y período *T* en torno a un planeta. Dar una expresión de la masa del planeta en términos de ambos datos observables.**

Solución:
Sea M la masa del planeta y m la del satélite; si éste gira alrededor del primero con velocidad angular ω, la fuerza centrípeta que produce el movimiento es:

$$F_C=\frac{m\cdot v^2}{R}=m\cdot\omega^2\cdot R=m\cdot\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\right)^2\cdot R=\frac{4\cdot\pi^2\cdot m\cdot R}{T^2}$$

Ahora bien, esta fuerza centrípeta no es otra que la fuerza gravitatoria, pues ésta corresponde al único campo real de fuerzas presente en el problema:

$$F_G=G\cdot\frac{M\cdot m}{R^2}$$

Como $F_G = F_C$ $\Rightarrow$ $\frac{G\cdot M\cdot m}{R^2}=\frac{4\cdot\pi^2\cdot m\cdot R}{T^2}\ \Rightarrow\ M=\frac{4\cdot\pi^2\cdot R^3}{G\cdot T^2}$ .