¿Para qué valores de x tiene sentido la siguiente función? ¿Es continua la función?

$$f(x)=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-2\sqrt{2}$$

**Solución**

- La función raíz cuadrada tiene sentido cuando lo de dentro de la raíz es mayor o igual que cero, por tanto:

$$f(x)=\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-2\sqrt{2}\begin{cases}\sqrt{4+x}\Rightarrow 4+x\geq 0\Rightarrow x\geq -4\\ \sqrt{4-x}\Rightarrow 4-x\geq 0\Rightarrow x\leq 4\end{cases}\Rightarrow \mathrm{Dom}(f)=[-4,4]$$

- La función f(x) es continua en su dominio, dado que es suma de tres funciones (una de ellas constante) continuas.

En los extremos del dominio, la continuidad se entiende en el sentido de la lateralidad del límite, es decir:

$$f(-4)=\lim_{x\to -4^+} f(-4) \quad \text{y} \quad f(4)=\lim_{x\to 4^-} f(4)$$

Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

**a)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ **b)** $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{si } x\leq 0\\ 2x-3 & \text{si } x>0\end{cases}$

**Solución**

a) La función:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-4}$$

Es continua en todos los puntos de su dominio: R-{-2,2}

En los puntos x = -2 y x = 2, la función no está definida.

b) La función:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{si } x\leq 0\\ 2x-3 & \text{si } x>0\end{cases}$$

está definida a trozos, mediante dos funciones continuas.

En el punto x = 0, se tiene:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x^2-1\right)=-1;\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2x-3\right)=-3$$

los límites laterales son distintos y la función presenta una discontinuidad inevitable.

Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

**a)** $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-1}$

**Solución**

a) Es continua en todos los puntos de su dominio: R-{2}. La función no estará definida cuando el denominador sea 0, en el punto x = 2.
b) Es continua en todos los puntos de su dominio: R-{-1,1}La función no estará definida cuando el denominador sea 0, en los puntos x = -1 y x = 1.

Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

**a)** $f(x)=\dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$ **b)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}}{x}$

**Solución**

c) Es continua en todos los puntos de su dominio: R-{0}-(-∞,-1) ˜ La función no estará definida cuando el denominador sea 0, en el punto x = 0, y cuando lo de dentro de la raíz sea negativo (-∞,-1).

d) Es continua en todos los puntos de su dominio: R-{0}-(-∞,-1)-(1,+∞) ˜ La función no estará definida cuando el denominador sea 0, en el punto x = 0, y cuando lo de dentro de la raíz sea negativo (-∞,-1) U (1,+∞)

Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

**a)** $f(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x \le 1 \\ -\dfrac{1}{x} \text{ si } 1 < x \le 3 \\ 1 \text{ si } x > 3 \end{cases}$

**b)** $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -8 \le x < -4 \\ x+2 & \text{si } -4 \le x < 2 \\ \dfrac{8}{x} & \text{si } 2 \le x \end{cases}$

**Solución**

a) Se trata de una función a trozos. Cada una de las funciones parciales que la definen son continuas en sus dominios.

En x = 1: $f(1) = -1;\ \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(-x) = -1;\ \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(-\frac{1}{x}\right) = -1$, la función es continua.

En x = 3: $f(3) = -\frac{1}{3};\ \lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{3};\ \lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+}(1) = 1$, la función presenta una discontinuidad de tipo inevitable

b) Se trata de una función a trozos. Cada una de las funciones parciales que la definen son continuas

en sus dominios.

En x = -8: $f(-8) = -1;\ \lim_{x\to8^+} f(x) = \lim_{x\to8^+}(-1) = -1$, la función es continua a la derecha del punto

En x = -4: $f(-4) = -2;\ \lim_{x\to-4^-} f(x) = \lim_{x\to-4^-}(-1) = -1;\ \lim_{x\to-4^+} f(x) = \lim_{x\to-4^+}(x+2) = -2$, la función presenta una discontinuidad de tipo inevitable.

En x = 2: $f(2) = 4;\ \lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}(x+2) = 4;\ \lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+}\left(\frac{8}{x}\right) = 4$, la función es continua.

Estudia los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

**a)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

**b)** $f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ si } x > 0 \\ x-1 \text{ si } x \le 0 \end{cases}$

**Solución**

a) La función:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

tiene como dominio R-{0}

Es continua para cada punto de su dominio.

En x = 0, no está definida y no puede decirse que sea continua o discontinua en dicho punto

Tampoco tiene límite en el origen, dado que:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

b) La función:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ si } x > 0 \\ x-1 \text{ si } x \le 0 \end{cases}$$ tiene como dominio R.

Es una función a trozos, tal que cada una de las funciones parciales que la definen son continuas.

En x = 0, carece de límite dado que sus límites laterales son distintos:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

En x = 0, presenta una discontinuidad inevitable.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-5x-6}$ ,hallar el valor que debería tener f(3) para que dicha función fuese continua en x = 3:

Calcula m, n, p y q para que la siguiente función sea continua en todo R:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x} & \text{si } x < -8 \\ 2m+3 & \text{si } -8 \le x < -4 \\ x - \dfrac{1}{n} & \text{si } -4 \le x < 2 \\ px & \text{si } 2 \le x < 4 \\ q & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

**Solución**

La función está definida por trozos. Cada una de las funciones parciales que la definen son funciones continuas en sus respectivos dominios. De modo que imponemos la condición de continuidad en cada uno de los puntos donde cambia la definición de la función.

- En x = -8: $f(-8) = \lim_{x\to -8^-} f(x) = \lim_{x\to -8^+} f(x) \Rightarrow 2m+3 = -\dfrac{3}{8} \Rightarrow m = -\dfrac{27}{16}$
- En x = -4: $f(-4) = \lim_{x\to -4^-} f(x) = \lim_{x\to -4^+} f(x) \Rightarrow 2m+3 = -4-\dfrac{1}{n} \Rightarrow n = -\dfrac{8}{29}$
- En x = 2: $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 2-\dfrac{1}{n} = 2p \Rightarrow p = \dfrac{45}{16}$
- En x = 4: $f(4) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) \Rightarrow 4p = q \Rightarrow q = \dfrac{45}{4}$

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |3-x| \text{ si } x < 7 \\ ax+4 \text{ si } x \ge 7 \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcula a, para que la función sea continua en su dominio.
b) Representa la función.
c) Deduce cuál es su recorrido.

**Solución**

a) Se trata de una función a trozos, cuyo dominio es R.

Cada una de las funciones parciales que definen la función, son continuas en sus dominios.

En x = 7, se verifica:

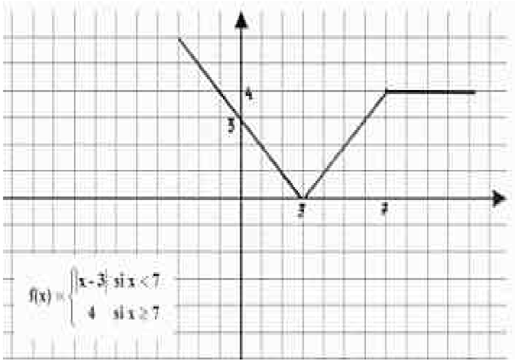
$$f(7) = 7a + 4; \Rightarrow \lim_{x \to 7^-} f(x) = \lim_{x \to 7^-} |3 - x| = 4; \quad \lim_{x \to 7^+} f(x) = \lim_{x \to 7^+} (ax + 4) = 7a + 4$$

Para que la función sea continua en x = 7, ha de cumplirse 7a + 4 = 4 => a = 0

b) Teniendo en cuenta que:

$$|3 - x| = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x \leq 3 \\ -3 + x & \text{si } x > 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x \leq 3 \\ -3 + x & \text{si } 3 < x < 7 \\ 4 & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

la gráfica de la función es:




A partir del dibujo adjunto, los valores que toma la función son:

$f(x) \geq 0$

por tanto su recorrido es el conjunto:

$R^+ \cup \{0\}$