Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.
TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.
El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A. Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? (1.25 puntos)

b) Además, si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente un 50%, un 80% y un 75% de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio inicial de cada artículo. (1.25 puntos)

Bloque 1.B. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Discute el rango de A según los valores de $m \in \mathbb{R}$. (1 punto)

b) ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A \cdot X = B$? (0.5 puntos)

c) Calcula la matriz X del apartado anterior para $m=0$. (1 punto)

Bloque 2.A. Sea la función $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+9x$.

a) Halla los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y, si existen, los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión. (1 punto)

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Esboza una gráfica de la función. (1 punto)

c) Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$ (0.5 puntos)

Bloque 2.B. Sea la función $f(x)=4-x^2$

a) Su gráfica determina con el eje de abscisas un recinto limitado D. Calcula su área. (1 punto)

b) La gráfica de la función $g(x)=3x^2$ divide D en tres partes D_1, D_2 y D_3. Haz un dibujo de los tres recintos. (0.75 puntos)

c) Calcula el área del recinto D_2 que contiene el punto $P(0,1)$. (0.75 puntos)

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

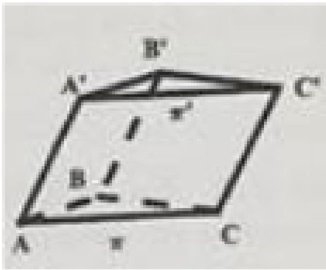
Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

Bloque 3.A. Dados el punto $A(2,1,1)$ y la recta $r:\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$

a) Calcula un vector director de la recta *r*. (0.75 puntos)
b) La ecuación del plano π que contiene al punto *A* y a la recta *r*. (0.75 puntos)
c) La ecuación de la recta *s* contenida en π que pasa por *A* y es perpendicular a *r*. (1 punto)

Bloque 3.B. Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(1,0,0); B'(-1,2,2); C(0,3,0); C'(0,4,2)$. Y los planos π, al que pertenecen los puntos *A, B, C* y π', al que pertenecen los puntos *A´, B´, C´*. Calcula:

a) Las coordenadas de los puntos restantes: *A´, B.* (0.75 puntos)
b) La distancia entre los planos π y π´. (0.75 puntos)
c) El volumen del prisma triangular. (1 punto)



Bloque 4.A. En un espacio muestral se tienen dos sucesos *A* y *B*. Se conocen las siguientes probabilidades:

$P(A\cap B)=0.3,\quad P(A/B)=P(B/A)\ \ y\ \ P(\overline{A})=0.2\quad (\overline{A}\text{ suceso contrario})$. Calcula:

a) $P(B/A)$. (1 punto)

b) $P(B)$. (1 punto)

c) ¿Son los sucesos independientes? (0.5 puntos)

Bloque 4.B. Los 5 defensas, 3 medios y 2 delanteros de un equipo de fútbol se entrenan lanzando penaltis a su portero. Los defensas marcan gol la mitad de las veces, los medios las 2/3 partes de las veces y los delanteros las 3/4 partes de las veces.

a) Se elige un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que meta el penalti? (1.25 puntos)
b) Se supone que la probabilidad del apartado anterior es del 60%. El equipo realiza en una semana 600 lanzamientos. En cada lanzamiento se elige un jugador al azar y regresa al grupo pudiendo ser elegido nuevamente. Calcula la probabilidad de que como mucho se metan 400 goles aproximando la distribución por una normal. (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: *F(3.25)=0.9994, F(3.2917) = 0.9995, F(3,3333) = 0.9996, F(3.375) = 0.9996, F(3.4167) = 0.9997*)

SOLUCIONES:

Bloque 1.A. Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.
a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? (1.25 puntos)
b) Además, si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente un 50%, un 80% y un 75% de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio inicial de cada artículo. (1.25 puntos)

a) Planteamos el sistema de ecuaciones relativo a la situación planteada.
Llamamos x = precio del libro, y = precio de la calculadora, z = precio del estuche.

"*Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche*" → $x+y+z=57$

"*El libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos*" → $x=2(y+z)$

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \end{array}\right\}$$

Intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x=2y+2z \end{array}\right\} \Rightarrow 2y+2z+y+z=57 \Rightarrow 3y+3z=57 \Rightarrow y+z=\frac{57}{3}=19$$

$$x=2(y+z)=2\cdot 19=38$$

La solución es $x=38$ € el precio del libro, pero el precio de la calculadora y del estuche queda uno en función del otro $y+z=19$. La calculadora vale 19 € menos el precio del estuche. No es posible determinar el valor exacto de la calculadora.

b) Añadimos la nueva información que supone una nueva ecuación:
"*Si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente un 50%, un 80% y un 75% de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros*" → $0,5x+0,8y+0,75z=34$

El nuevo sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \\ 0,5x+0,8y+0,75z=34 \end{array}\right\}$$

Como hemos resuelto el sistema con las dos primeras ecuaciones y hemos obtenido

$$\left.\begin{array}{l} x=38 \\ y+z=19 \end{array}\right\}$$

Lo sustituimos en el sistema anterior y vemos que solución obtenemos de la nueva situación.

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{x=38} \\ \left.\begin{array}{l} \\ y+z=19\end{array}\right\} \\ 0,5x+0,8y+0,75z=34\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}y=19-z \\ 0,5\cdot 38+0,8y+0,75z=34\end{array}\right\} \Rightarrow 19+0,8(19-z)+0,75z=34 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 19+15,2-0,8z+0,75z=34 \Rightarrow -0,05z=34-34,2 \Rightarrow \boxed{z=\frac{-0,2}{-0,05}=4\text{ €}}$$

$$\boxed{y=19-z=19-4=15}$$

Los precios son 38 € el libro, 15 la calculadora y 4 el estuche.

Bloque 1.B. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Discute el rango de A según los valores de $m\in\mathbb{R}$. (1 punto)
b) ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A\cdot X=B$? (0.5 puntos)
c) Calcula la matriz X del apartado anterior para $m=0$. (1 punto)

a) La matriz A es una matriz cuadrada de orden 3. El rango de la matriz A puede ser 3, 2 o 1. Para comprobar si es 3 calculamos su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix}=3m^2+2+3m-\left(3m+3+2m^2\right)=3m^2+2+3m-3m-3-2m^2=m^2-1$$

Igualamos a cero el determinante.

$$|A|=0 \Rightarrow m^2-1=0 \Rightarrow m=\sqrt{1}=\pm 1$$

Distinguimos tres casos distintos.

<u>CASO 1.</u> $m\neq\pm 1$.

En este caso el determinante de la matriz A es no nulo y el rango es 3.

<u>CASO 2.</u> $m=1$.

En este caso el determinante de la matriz A es 0 y su rango no es 3, por lo que puede ser 2. Para $m=1$ la matriz A queda:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 2 que resulta al quitar la fila y columna 1ª.

Calculamos su determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$.

El rango de A es 2.

<u>CASO 3.</u> $m=-1$.

En este caso el determinante de la matriz A es 0 y su rango no es 3, por lo que puede ser 2. Para $m=-1$ la matriz A queda:

$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 2 que resulta al quitar la fila y columna 1ª. Calculamos su determinante: $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-3+2=-1\neq 0$.

El rango de *A* es 2.

El rango de la matriz *A* es 3 si $m\neq\pm1$ y vale 2 si $m=-1$ o $m=1$.

b) Supongamos la matriz X de dimensión *m x n*. Sabemos que *A* es de dimensión *3 x 3* y *B* es de dimensión *3 x 2*.
Debe cumplirse:

$$A \cdot X = B$$

$$3\times\boxed{3 \cdot m}\times n \longrightarrow 3\times n$$

Para que sea posible el producto el valor de *m* debe ser 3.
Para que el resultado del producto sea 3 x 2 debe ser *n* igual a 2.

La matriz *X* debe ser de dimensión *3 x 2*.

c) Para $m=0$ la matriz A queda:

$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ y tiene determinante no nulo, pues estaríamos en el caso 1 anterior.

$|A|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}=2-3=-1$. Existe la inversa y la calculamos para poder resolver la ecuación.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & -3 & 2\\ -1 & -3 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\ 1 & 3 & -3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Despejamos en la ecuación

$$A\cdot X=B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

$$X=\begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\ 1 & 3 & -3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3+2 & 0+0-4\\ 2+3+3 & 2+0-6\\ 0-1-1 & 0+0+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 8 & -4\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$3\times3 \cdot 3\times2\longrightarrow 3\times2$$

Bloque 2. A. Sea la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad f(x)=x^3-6x^2+9x$.
a) Halla los puntos de corte de la función con el eje de abscisas y, si existen, los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión. (1 punto)
b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad. Esboza una gráfica de la función. (1 punto)
c) Calcula la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$ (0.5 puntos)

a) Igualamos a cero la función para obtener los puntos de corte con el eje de abscisas (OX).

$$f(x)=0\Rightarrow x^3-6x^2+9x=0\Rightarrow x\left(x^2-6x+9\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ o \\ x^2-6x+9=0\Rightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=3\end{cases}$$

Los puntos de corte son P(3,0) y Q(0,0).

Para determinar los máximos y mínimos igualo a cero la derivada de la función.

$$f(x)=x^3-6x^2+9x\Rightarrow f'(x)=3x^2-12x+9$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-12x+9=0\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\begin{cases} x=\dfrac{4+2}{2}=3 \\ x=\dfrac{4-2}{2}=1\end{cases}$$

Estos son los puntos críticos de la función, obtenemos la derivada segunda y vemos si son máximos o mínimos.

$$f'(x)=3x^2-12x+9\Rightarrow f''(x)=6x-12$$

$x=3\to f''(3)=18-12=6>0$ Es un punto mínimo

$x=1\to f''(1)=6-12=-6<0$ Es un punto máximo

Para obtener los puntos de inflexión igualamos la derivada segunda a cero.

$$f''(x)=0\Rightarrow 6x-12=0\Rightarrow x=2$$

El posible punto de inflexión es $x=2$, pero falta ver que la derivada tercera no se anula en dicho punto.

$$f''(x)=6x-12\Rightarrow f'''(x)=6$$
$$x=2\to f'''(2)=6\neq 0$$

Luego x = 2 es punto de inflexión de la función.

Resumiendo: En $x=1$ hay un punto máximo relativo, en $x=2$ hay un punto de inflexión y en $x=3$ hay un mínimo relativo.

b) Los puntos críticos $x=1$ y $x=3$ dividen la recta real en tres partes veamos que signo toma la derivada en cada una de ellas y, por tanto, si es creciente o decreciente en cada trozo.

- En $\left(-\infty,1\right)$ tomamos $x=0$ y la derivada toma el valor $f'(0)=0-0+9=9>0$. La función crece en $\left(-\infty,1\right)$.
- En $\left(1,3\right)$ tomamos $x=2$ y la derivada toma el valor $f'(2)=3\cdot2^2-12\cdot2+9=12-24+9=-3<0$. La función decrece en $\left(1,3\right)$.

- En $(3,+\infty)$ tomamos $x=4$ y la derivada toma el valor
  $f'(4)=3\cdot4^2-12\cdot4+9=48-48+9=9>0$. La función crece en $(3,+\infty)$.

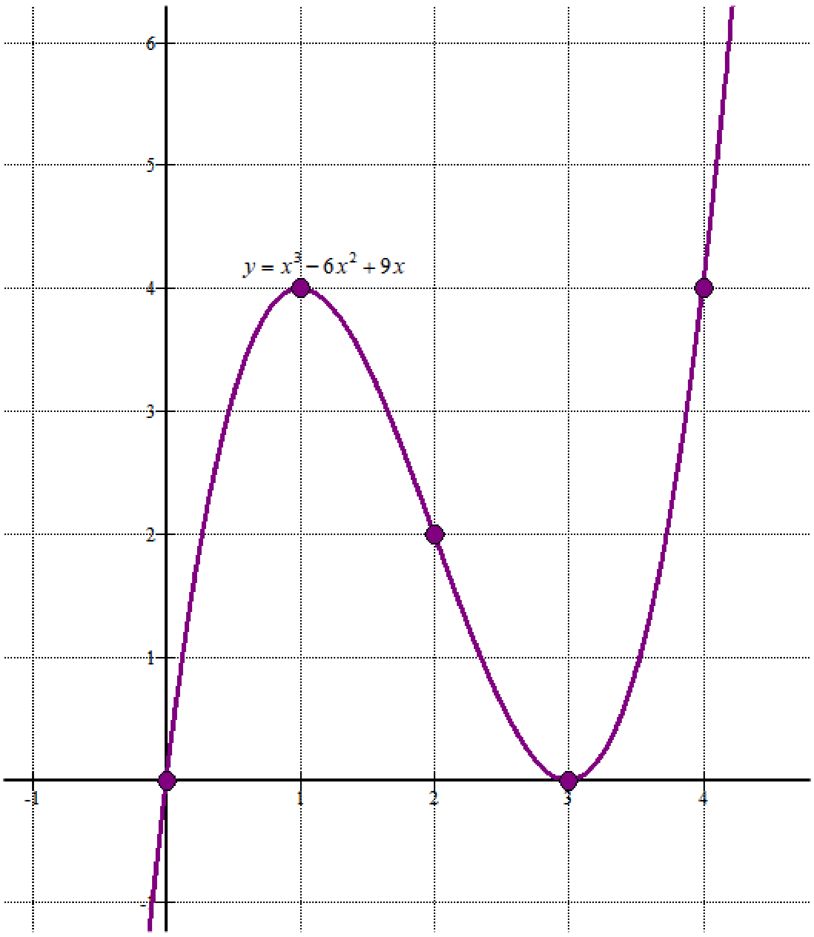
La función crece en $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ y decrece en $(1,3)$.

Para estudiar la concavidad y convexidad, vemos el signo de la derivada segunda antes de 2 y después de 2.

- En $(-\infty,2)$ tomamos $x=0$ y la derivada segunda toma el valor $f''(0)=0-12<0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty,2)$.
- En $(2,+\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada segunda toma el valor $f''(3)=18-12=6>0$. La función es convexa (∪) en $(2,+\infty)$.

Para esbozar la gráfica hacemos una tabla de valores.

x	$y=x^3-6x^2+9x$
0	0
1	$1-6+9=4$
2	$8-24+18=2$
3	$27-54+27=0$
4	$64-96+36=4$



c) La recta tangente en $x=2$ tiene ecuación $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

Calculamos $f(2)=2^3-6\cdot2^2+9\cdot2=8-24+18=2$ y $f'(2)=3\cdot2^2-12\cdot2+9=12-24+9=-3$

La recta tangente queda $y-2=-3(x-2)\Rightarrow \boxed{y=-3x+8}$

Bloque 2.B. Sea la función $f(x) = 4 - x^2$

a) Su gráfica determina con el eje de abscisas un recinto limitado D. Calcula su área. (1 punto)

b) La gráfica de la función $g(x) = 3x^2$ divide D en tres partes D_1, D_2 y D_3. Haz un dibujo de los tres recintos. (0.75 puntos)

c) Calcula el área del recinto D_2 que contiene el punto $P(0,1)$. (0.75 puntos)

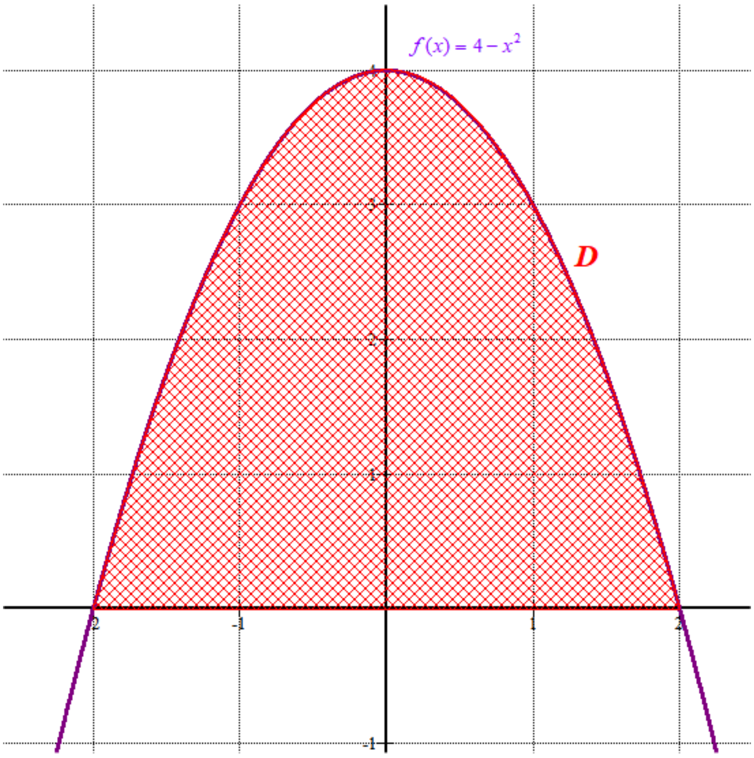
a) Hallamos los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

El área es el valor absoluto de la integral definida entre –2 y 2 de la función $f(x) = 4 - x^2$.

$$Área = \left|\int_{-2}^{2} 4 - x^2 dx\right| = \left|\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}\right| = \left|\left[4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right] - \left[4(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right]\right| = \left|8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3}\right| = \boxed{10,66\,u^2}$$

Si la dibujamos.



b) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 4 - x^2 = 3x^2 \Rightarrow 4 = 4x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

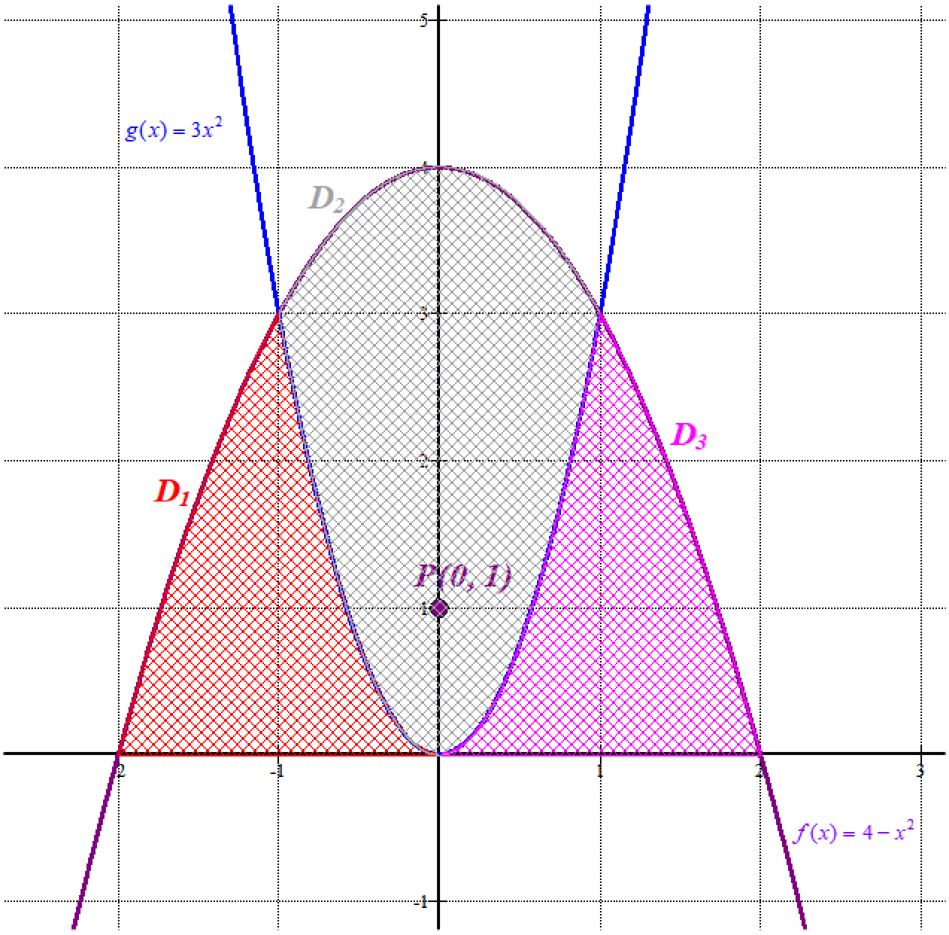
Hacemos una tabla de valores para cada parábola y las dibujamos.

$f(x) = 4 - x^2$

x	$y = 4 - x^2$
-2	0
-1	3
0	4
1	3
2	0

$g(x) = 3x^2$

x	$y = 3x^2$
-2	12
-1	3
0	0
1	3
2	12



c) El área del recinto D_2 se obtiene como la integral definida entre –1 y 1 de la diferencia entre la función $f(x)=4-x^2$ y la función $g(x)=3x^2$.
En el dibujo se observa que debe valer entre 5 y 6 cuadraditos.

$$Área = \int_{-1}^{1} 4-x^2-3x^2dx = \int_{-1}^{1} 4-4x^2dx = \left[4x-\frac{4x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$Área = \left[4-\frac{4\cdot 1^3}{3}\right]-\left[4(-1)-\frac{4(-1)^3}{3}\right] = 4-\frac{4}{3}+4-\frac{4}{3} = \boxed{5,33\,u^2}$$

Bloque 3.A. Dados el punto $A(2,1,1)$ y la recta $r:\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases}$

a) Calcula un vector director de la recta *r*. (0.75 puntos)
b) La ecuación del plano π que contiene al punto *A* y a la recta *r*. (0.75 puntos)
c) La ecuación de la recta *s* contenida en π que pasa por *A* y es perpendicular a *r*. (1 punto)

a) Pasamos las ecuaciones de *r* a paramétricas.

$$r:\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-y \\ z=0-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-y \\ y=y \\ z=0-y \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=2-t \\ y=0+t \\ z=0-t \end{cases}$$

Un vector director de la recta es $\overrightarrow{v_r}=(-1,1,-1)$

b) El plano pedido contiene al punto $A(2,1,1)$ y al punto de la recta *r* que se puede obtener de la ecuación de la recta en paramétricas $P_r(2,0,0)$, por lo que nos sirve como vectores directores del plano los vectores $\overrightarrow{AP_r}=(2,0,0)-(2,1,1)=(0,-1,-1)$ y el director de la recta $\overrightarrow{v_r}=(-1,1,-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} A(2,1,1)\in\pi \\ \pi:\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{AP_r}}=(0,-1,-1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{v_r}=(-1,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x-2+y-1-z+1+x-2=0$$

$$\boxed{\pi:2x+y-z-4=0}$$

c) La recta *s* contenida en π que pasa por *A* y es perpendicular a *r* tiene como vector director el producto vectorial del normal del plano y el director de *r*, pues es perpendicular a ambos vectores.

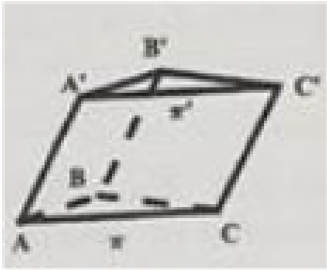
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(-1,1,-1) \\ n=(2,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-i-2j-k-2k-j+i=-3j-3k=(0,-3,-3)$$

Tomamos como vector director el vector simplificado $\overrightarrow{v_s}=(0,1,1)$

La recta *s* tiene ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} A(2,1,1)\in s \\ \overrightarrow{v_s}=(0,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{r} x=2 \\ s: y=1+t \\ z=1+t \end{array}\right\}}$$

Bloque 3.B. Sea el prisma triangular (triángulos iguales y paralelos) de la figura, con $A(1,0,0)$; $B'(-1,2,2)$; $C(0,3,0)$; $C'(0,4,2)$. Y los planos π, al que pertenecen los puntos *A*, *B*, *C* y π', al que pertenecen los puntos *A´*, *B´*, *C´*. Calcula:
a) Las coordenadas de los puntos restantes: *A´*, *B*. (0.75 puntos)
b) La distancia entre los planos π y π´. (0.75 puntos)
c) El volumen del prisma triangular. (1 punto)



a) Las aristas AA', BB' y CC' deben ser paralelas y por tanto los vectores que las definen deben tener las mismas coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AA'} = A' - (1,0,0)\\ \overrightarrow{BB'} = (-1,2,2) - B\\ \overrightarrow{CC'} = (0,4,2)-(0,3,0) = (0,1,2)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(0,1,2) = A' - (1,0,0)\\ (0,1,2) = (-1,2,2) - B\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}A' = (0,1,2)+(1,0,0) = (1,1,2)\\ B = (-1,2,2)-(0,1,2) = (-1,1,0)\end{array}\right\}$$

Los puntos *A´* y *B* tienen coordenadas $A'(1,1,2)$; $B(-1,1,0)$

b) La distancia entre los planos es la distancia de un punto del plano π´, por ejemplo $C'(0,4,2)$ al plano π.

Hallemos la ecuación del plano π.

$$\left.\begin{array}{l}A(1,0,0)\\ B(-1,1,0)\\ C(0,3,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}A(1,0,0)\\ \overrightarrow{AB} = (-1,1,0)-(1,0,0) = (-2,1,0)\\ \overrightarrow{AC} = (0,3,0)-(1,0,0) = (-1,3,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$-6z + z = 0 \Rightarrow -5z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : z = 0}$$

$$d(\pi,\pi') = d(C',\pi) = \left\{\begin{array}{l}C'(0,4,2)\\ \pi : z = 0\end{array}\right\} = \frac{|2|}{\sqrt{1+0+0}} = \boxed{2\,u}$$

c) El volumen del prisma es la mitad del producto mixto de los tres vectores $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AA'}$, pues el producto mixto es el volumen del paralelepípedo.
Calculamos las coordenadas de estos vectores.

$$\overrightarrow{AB} = (-1,1,0)-(1,0,0) = (-2,1,0)$$
$$\overrightarrow{AC} = (0,3,0)-(1,0,0) = (-1,3,0)$$
$$\overrightarrow{AA'} = (1,1,2)-(1,0,0) = (0,1,2)$$

$$Volumen = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AA'}\right]\right|}{2} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}}{2} = \frac{|-12+2|}{2} = \frac{10}{2} = \boxed{5\,u^3}$$

Bloque 4.A. En un espacio muestral se tienen dos sucesos *A* y *B*. Se conocen las siguientes probabilidades:

$P(A\cap B)=0.3,\quad P(A/B)=P(B/A)\ \ y\ \ P(\overline{A})=0.2\ \ (\overline{A}\text{ suceso contrario})$. Calcula:

a) $P(B/A)$. (1 punto)

b) $P(B)$. (1 punto)

c) ¿Son los sucesos independientes? (0.5 puntos)

a) Como $P(\overline{A})=1-P(A)=0.2\Rightarrow P(A)=1-0.2=0.8$

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.3}{0.8}=\frac{3}{8}=\boxed{0.375}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.3}{P(B)} \\ P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0.3}{0.8} \end{array}\right\}\Rightarrow P(A/B)=P(B/A)\Rightarrow\frac{0.3}{P(B)}=\frac{0.3}{0.8}\Rightarrow\boxed{P(B)=0.8}$$

Este resultado es incoherente, aunque está bien resuelto.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,8+0,8-0,3=1,3$$

¡IMPOSIBLE!

Los datos del ejercicio son incoherentes.

c) Para que sean independientes los sucesos A y B debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.3 \\ P(A)\cdot P(B)=0.8\cdot 0.8=0.64 \end{array}\right\}$$ No son iguales y por tanto **no son independientes**.

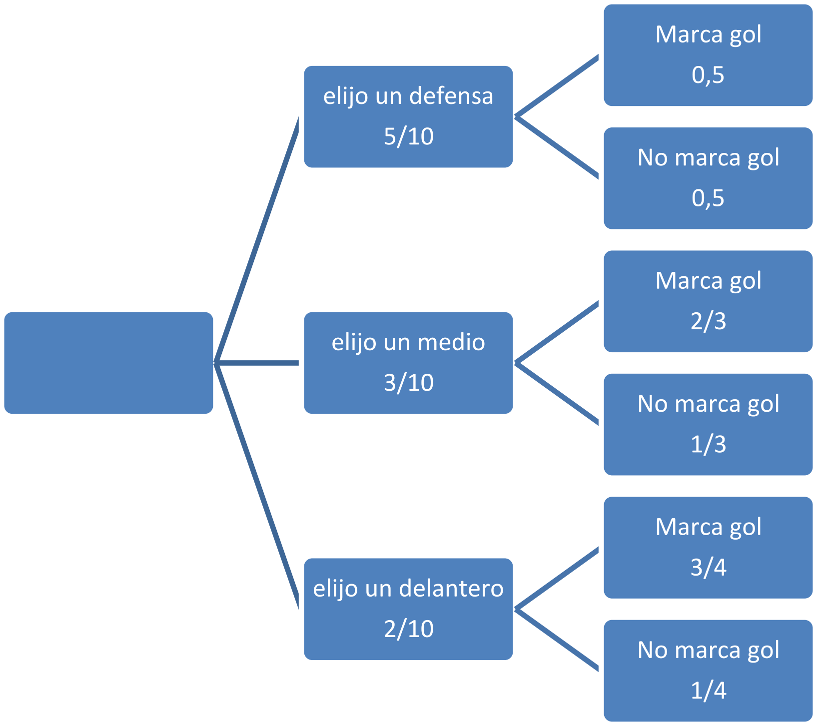
Bloque 4.B. Los 5 defensas, 3 medios y 2 delanteros de un equipo de fútbol se entrenan lanzando penaltis a su portero. Los defensas marcan gol la mitad de las veces, los medios las 2/3 partes de las veces y los delanteros las 3/4 partes de las veces.

a) Se elige un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que meta el penalti? (1.25 puntos)

b) Se supone que la probabilidad del apartado anterior es del 60%. El equipo realiza en una semana 600 lanzamientos. En cada lanzamiento se elige un jugador al azar y regresa al grupo pudiendo ser elegido nuevamente. Calcula la probabilidad de que como mucho se metan 400 goles aproximando la distribución por una normal. (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(3.25)=0.9994, F(3.2917) = 0.9995, F(3,3333) = 0.9996, F(3.375) = 0.9996, F(3.4167) = 0.9997)

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar la situación planteada en el problema.



a) $P(\text{Marca gol}) = \frac{5}{10} \cdot 0,5 + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{20} + \frac{2}{10} + \frac{3}{20} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = \boxed{0,6}$

b) Sea X = Número de goles marcados en 600 lanzamientos.

Como cada lanzamiento es independiente de lo que haya ocurrido en el anterior pues nos dicen que al lanzar un penalti la persona que lo lanzó se incorpora de nuevo al grupo para elegir al siguiente lanzador.
Tenemos que es una distribución binomial con parámetros n = 600 y p = 0,6.
X = B(600, 0.6).

Como son muchas repeticiones se debe aproximar a una normal de media n · p = 600 · 0,6 = 360 y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 12$

Nuestra distribución binomial se aproxima con una normal N(360, 12).

$$P(X \leq 400) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Corrección de Yates} \\ \text{por continuidad} \end{array} \right\} = P(X < 400,5) = \{Tipificamos\} =$$
$$= P\left(Z < \frac{400,5 - 360}{12}\right) = P(Z < 3,375) = F(3,375) = \boxed{0.9996}$$