

1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$; donde I_3 es la matriz identidad.

Solución

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

Sabemos que no existe la inversa de A es $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t)$, si $|A| = 0$.

Tenemos $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos
tercera = $-(-1)(0 - 1) = -1 \neq 0$, luego existes A^{-1} .
fila

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{luego } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t) = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$, donde I_3 es la matriz identidad.

De $AX + I_3 = BC \rightarrow AX = BC - I_3$. Multiplicando $AX = BC - I_3$ por A^{-1} por la izquierda tenemos:

$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot (BC - I_3) \rightarrow I_3 X = A^{-1} \cdot (BC - I_3)$, luego $X = A^{-1} \cdot (BC - I_3)$.

Tenemos $BC - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, por tanto:

$$X = A^{-1} \cdot (BC - I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.- a) [1,75 puntos] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + az = a \\ x + ay + 2z = a \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

b) [0,75 puntos] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Solución

(a)

Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x + 2y + az = a \\ x + ay + 2z = a \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & a \\ 1 & a & 2 & a \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Tenemos $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $C_2 + C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & a+1 \\ 1 & a+1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ Adjuntos
tercera = $+(-1)(9 - (a+1)^2) = (-1) \cdot (9 - a^2 - 2a - 1) =$
fila

$$= a^2 + 2a - 8.$$

De $|A| = 0$, $a^2 + 2a - 8 = 0$, de donde $a = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$, por tanto $a = -4$ y $a = 2$.

Si $a \neq -4$ y $a \neq 2$, tenemos $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas}$, por el Teorema de Rouché el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

Si $a = -4$, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6 \neq 0$, $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 + C_1 \\ C_3 + C_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{matrix} = +(-1)(-9 - 9) = 18 \neq 0$, luego $\text{rango}(A^*) = 3$.

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, por el Teorema de Rouché el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si $a = 2$, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$, $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas iguales, luego $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas}$, por el Teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución, en nuestro caso infinitas.

(b)

Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Por el apartado anterior el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución.

Como el rango es dos tomamos sólo dos ecuaciones, 2^a y 3^a .

Lo resolvemos por Gauss:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \begin{matrix} (E_2 + E_1) \\ \end{matrix} \approx \begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ + 3y + 3z = 3 \end{cases} \begin{matrix} (E_2/3) \\ \end{matrix} \approx \begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ y + z = 1 \end{matrix}, \text{ tomando } z = m \in \mathbb{R} \text{ tenemos } y = 1 - m$$

y también $x = 2 - 2(1 - m) - 2m = 2 - 2 + 2m - 2m = 0$, y la solución del sistema pedido para el caso de $a = 2$ es $(x, y, z) = (0, 1 - m, m)$ con $m \in \mathbb{R}$.

3.- a) [1 punto] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(2x)} \right)$

b) [1,5 puntos] Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si } 1 < x < 2, \text{ donde } \ln \text{ es el logaritmo neperiano, estudia la} \\ \ln(x - 1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

continuidad de la función $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

Solución

(a)

Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(2x)} \right)$

La regla de L'Hôpital (L'H) nos dice: Si " f " y " g " son funciones continuas en $[a - \delta, a + \delta]$, derivables en

$(a - \delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}. \text{ La regla se puede reiterar, y también es válida si tenemos } \infty/\infty, \text{ y si } x \rightarrow \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(2x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x) - x}{x \cdot \sin(2x)} = \left\{ \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0}, \text{ L'H} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2x) \cdot 2 - 1}{1 \cdot \sin(2x) + x \cdot \cos(2x) \cdot 2} = \frac{1}{0^+ + 0^+} = +\infty.$$

(b)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si } x \leq 1 \\ x-2 & \text{si } 1 < x < 2, \\ \ln(x-1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, donde $\ln$ es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de

la función $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

Sabemos que la función $2^{(x-1)}$ es continua en $\mathbb{R}$, en particular lo es en $x < 1$.

La función $x - 2$ es continua en $\mathbb{R}$ en particular en el abierto $(1, 2)$.

La función $\ln(x - 1)$ es continua en $x > 1$, en particular lo es en $x > 2$.

Falta estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ y $x = 2$.

Sabemos que f es continua en $x = 1$ si $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^{x-1} = 2^0 = 1. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1$$

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$, **$f(x)$ no es continua en $x = 1$, y en dicho punto $x = 1$ presenta un punto de discontinuidad inevitable de salto finito de amplitud $1 - (-1) = 2$.**

Sabemos que f es continua en $x = 2$ si $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\ln(x-1)) = \ln(1) = 0. \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$$

Como $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$, **$f(x)$ es continua en $x = 2$, por tanto $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, y en el punto $x = 1$ presenta un punto de discontinuidad inevitable de salto finito de amplitud $1 - (-1) = 2$.**

4.- a) [1,5 puntos] Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

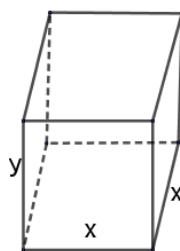
b) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución

(a)

Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima

La siguiente figura nos ayudará:



Función a Optimizar: Superficie = $S(x, y) = 4 \text{ caras laterales} + \text{base} = 4xy + x^2$.

Relación: Volumen = $108 = (\text{área base}) \cdot (\text{altura}) = x^2 \cdot y$, de donde $y = 108/x^2$

Función a Optimizar: Superficie = $S(x) = 4x(108/x^2) + x^2 = 432/x + x^2$.

Sabemos que si $S'(a) = 0$ y $S''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo de $S(x)$

Sabemos que si $S'(a) = 0$ y $S''(a) > 0$, $x = a$ es un mínimo relativo de $S(x)$

$$S(x) = 432/x + x^2; \quad S'(x) = -432/x^2 + 2x.$$

De $S'(x) = 0$, tenemos $-432/x^2 + 2x = 0$, es decir $432/x^2 = 2x$, por tanto $x^3 = 216$, de donde $x = \sqrt[3]{216} = 6$.

Veamos que es mínimo.

$$S'(x) = -432/x^2 + 2x = -432 \cdot x^{-2} + 2x; \quad S''(x) = 864x^{-3} + 2 = 864/x^3 + 2.$$

Como $S''(6) = 864/(6)^3 + 2 = 864/216 + 2 = 4 + 2 = 6 > 0$, luego $x = 6$ dm es un mínimo relativo.

Y las dimensiones de la caja son $x = 6$ dm e $y = 108/(6)^2$ dm = 3 dm, para que la superficie total de la caja sea mínima.

(b)

Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

La recta tangente en $x = 1$ es " $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ ".

Tenemos $f(x) = x^2 + x - 1$ y $f'(x) = 2x + 1$, luego $f(1) = 1$ y $f'(1) = 3$, por tanto:

La recta tangente en $x = 1$ es " $y - 1 = 3(x - 1)$ ", es decir $y = 3x - 2$.

5.- a) [1,25 puntos] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-dx}{1 + e^x}$.

(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$)

b) [1,25 puntos] Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

Solución

(a)

Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-dx}{1 + e^x}$.

$$\text{Tenemos } \int \frac{-dx}{1 + e^x} = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t; x = \ln(t) \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right\} = \int \frac{-dt}{(1+t) \cdot t} = \{\text{Racional}\} = \int \frac{A}{1+t} dt + \int \frac{Bdt}{t} = A \cdot \ln(1+t) + B \cdot \ln(t) + K =$$

$$= \{++\}, \text{ y quito cambio} \} = 1 \cdot \ln(1 + e^x) + (-1) \cdot \ln(e^x) + K = \ln(1 + e^x) - x + K.$$

{++} Calculamos A y B

$$\frac{-1}{(1+t)(t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t} = \frac{A \cdot t + B(1+t)}{(1+t)(t)}$$

Igualando numeradores:

$-1 = A \cdot t + B(t + 1)$. Sustituimos " x " por el valor de las raíces del denominador ($t = 0$ y $t = -1$).

$$\text{Para } x = -1, -1 = A(-1) \rightarrow A = 1$$

$$\text{Para } x = 0, -1 = B(1) \rightarrow B = -1.$$

(b)

Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

Veamos los cortes de $f(x)$ con $g(x)$ resolviendo la ecuación $f(x) = g(x)$.

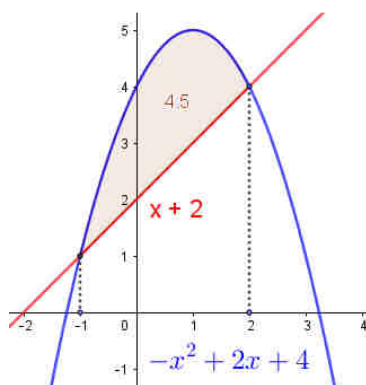
De $f(x) = g(x) \rightarrow -x^2 + 2x + 4 = x + 2 \rightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$, luego $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$ es decir $x = -1$ y $x = 2$ y los puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$ son $(-1, 1)$ y $(2, 4)$.

Sabemos que la gráfica de $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ es una parábola así ($\cap$) porque el n° que multiplica a x^2 es negativo. La abscisa de su vértice es la solución de $f'(x) = 0 = -2x + 2$, de donde $x = 1$, y su vértice es el punto $V(1, f(1)) = V(1, 5)$.

Hemos visto antes que pasa por $(-1, 1)$ y $(2, 4)$.

La recta $y = x + 2$ hemos visto que pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(2, 4)$.

Teniendo en cuenta todo lo anterior un esbozo de las gráficas y la región que determinan es:



El área pedida es:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^2 (-x^2 + 2x + 4 - (x + 2)) dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= \left[\left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left(+\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \right] u^2 = \left(\frac{10}{3} + \frac{7}{6} \right) u^2 = \frac{9}{2} u^2 = 4.5 u^2. \end{aligned}$$

6.- Sean el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$.

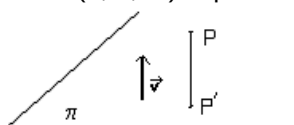
a) [1 punto] Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π .

b) [1,5 puntos] Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π , y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

Solución

(a)

Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ ($\mathbf{n} = (1, 2, -1)$).



(i) Calculamos la recta "s" perpendicular al plano π que pasa por el punto P (su vector director $\mathbf{u}$ es el vector normal del plano π , $\mathbf{n} = (1, 2, -1)$). Ponemos la recta s en paramétricas o vectorial.

$s \equiv (x, y, z) = (1 + \lambda, 2 + 2\lambda, -1 - \lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Calculamos el punto P' que es la proyección ortogonal de la recta s con el plano π , para lo cual sustituimos la ecuación de la recta s en el plano π , determinamos el valor del parámetro λ y con dicho valor entrando en las ecuaciones de la recta en paramétricas obtenemos las coordenadas del punto P' .

$(1 + \lambda) + 2(2 + 2\lambda) - (-1 - \lambda) - 4 = 0 \Rightarrow 6 + 6\lambda - 4 = 0$, de donde $\lambda = -2/6 = -1/3$, luego el punto proyección P' es $P'(1 + (-1/3), 2 + 2(-1/3), -1 - (-1/3)) = P'(2/3, 4/3, -4/3)$

(iii) La distancia buscada es $d(P; \pi) = d(P; P') = \|\mathbf{PP}'\| = \sqrt{(1/3)^2 + (2/3)^2 + (1/3)^2} u^1 = \sqrt{(6/9)} u^1 = \sqrt{(6)/3} u^1$.

$$\mathbf{PP}' = (2/3 - 1, 4/3 - 2, -4/3 + 1) = (-1/3, -2/3, -1/3)$$

También sabemos que La distancia del punto $P(p_1, p_2, p_3)$ al plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ es $d(P; \pi) =$

$$= \frac{|a(p_1) + b(p_2) + c(p_3) + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

$$\text{En nuestro caso } d(P; \pi) = \frac{|(1) + 2(2) - (-1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} u^1 = \frac{|2|}{\sqrt{6}} u^1 = \frac{2}{\sqrt{6}} u^1 = \frac{2\sqrt{6}}{6} u^1 = \frac{\sqrt{6}}{3} u^1 \text{ y vemos que coincide.}$$

(b)

Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π , y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

Veamos el punto A , corte de la recta del plano $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$ con el $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$.

Un vector directo de la recta r es $\mathbf{u} = (\text{Producto vectorial de los vectores normales de los planos que deter-})$

$$\text{minan la recta } r) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = \vec{i}(2-0) - \vec{j}(-1-0) + \vec{k}(1-0) = (2, 1, 1).$$

$$\text{Un punto de la recta } r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \text{ es } (2, 0, -2), \text{ tomando } y = 0.$$

La ecuación la recta r en vectorial es: $r \equiv (x, y, z) = (2 + 2m, m, -2 + m)$ con $m \in \mathbb{R}$.

Sustituimos la ecuación de la recta r en el plano π , determinamos el valor del parámetro m y con dicho valor entrando en las ecuaciones de la recta en paramétricas obtenemos las coordenadas del punto A.

$$(2 + 2m) + 2(m) - (-2 + m) - 4 = 0 = 4 + 3m - 4 = 0, \text{ de donde } m = 0, \text{ luego el A es } A(2, 0, -2)$$

Sabemos que el área de un triángulo ABC con $A(2, 0, -2)$, $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$ es la mitad del área del paralelogramo que determinan su lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, es decir el determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, luego el Área del triángulo es $= (1/2) \cdot \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$

$$\overrightarrow{AB} = (1 - 2, -1 - 0, 2 - (-2)) = (-1, -1, 4); \quad \overrightarrow{AC} = (0 - 2, 1 - 0, 1 - (-2)) = (-2, 1, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2 - 4) - \vec{j}(-2 + 8) + \vec{k}(-1 - 2) = (-6, -6, -3). \quad \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(6)^2 + (6)^2 + (3)^2} = \sqrt{81} = 9.$$

$$\text{El área del triángulo pedido es } = (1/2) \cdot \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = (1/2) \cdot 9 = 9/2 \text{ u}^2 = 4'5 \text{ u}^2$$

$$7.- \text{ Dadas las rectas } r \equiv \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases}, \quad s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1} \text{ y el punto } P(-1, 0, 2).$$

a) [1,25 puntos] Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s .

b) [1,25 puntos] Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s .

Solución

(a)

Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s .

$$\text{Ponemos la recta } r \equiv \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ z = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} x - y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \text{ es vectorial } r \equiv \begin{cases} x = 2 + m \\ y = m \\ z = 0 \end{cases}, \text{ con } m \in \mathbb{R}.$$

Un punto de r es $A(2, 0, 0)$ y un vector director es $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$.

Un punto de s es $B(0, -2, 1)$ y un vector director es $\mathbf{v} = (3, -2, 1)$. El vector $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, 1)$.

Como los vectores $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ de " r " y $\mathbf{v} = (3, -2, 1)$ de " s " no son proporcionales, los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son paralelos, por tanto las rectas " r " y " s " tampoco lo son, luego " r " y " s " se cortan o se cruzan.

Si $\det(\overrightarrow{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, " r " y " s " se cortan, con $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (0, -2, 1) - (2, 0, 0) = (-2, -2, 1)$.

Si $\det(\overrightarrow{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$, " r " y " s " se cruzan.

$$\text{Como } \det(\overrightarrow{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_2 - C_1 \\ \\ \text{fila} \end{array} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila} \end{array} = -(1) \cdot (0 + 5) = -5 \neq 0, \text{ luego las rectas "r" y "s" se cruzan.}$$

"s" se cruzan.

(b)

Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s .

Para un plano π necesitamos un punto, el $P(-1, 0, 2)$, y dos vectores independientes el $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ de la recta r , y el $\mathbf{v} = (3, -2, 1)$ de la recta s .

La ecuación del plano pedido es $\pi \equiv \det(\mathbf{PX}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 = \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} = \\ \text{fila} \end{matrix}$

$$= (x+1)(1-0) - (y)(1-0) + (z-2)(-2-3) = x+1-y-5z+10 = 0 = x-y-5z+11 = 0.$$

8.- a) El 70% de los usuarios de Instagram tiene menos de 34 años, el 25% entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 5% más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98% de los menores de 34 años, el 40% de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 10% de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:

a.1) [0,5 puntos] ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?

a.2) [0,75 puntos] Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluidos)?

b) El tiempo que un usuario de la red Instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.

b.1) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?

b.2) [0,75 puntos] ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

Solución

(a)

El 70% de los usuarios de Instagram tiene menos de 34 años, el 25% entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 5% más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98% de los menores de 34 años, el 40% de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluidos) y el 10% de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:

(a.1) [0,5 puntos] ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?

(a.2) [0,75 puntos] Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluidos)?

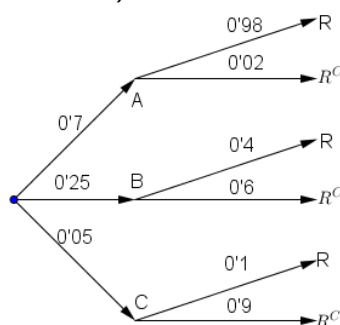
(a.1)

¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?

Llamemos A, B, C, R y R^C , a los sucesos siguientes, "tener menos de 34 años", "tener entre 34 y 54 años", "tener más de 54 años", "acceder a la red" y "no acceder a la red", respectivamente.

Datos del problema: $p(A) = 70\% = 0'7$; $p(B) = 25\% = 0'25$; $p(C) = 5\% = 0'05$; $p(R/A) = 98\% = 0'98$; $p(R/B) = 40\% = 0'4$, $p(R/C) = 10\% = 0'1$, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden $p(\text{no acceder a diario a dicha red social}) = p(R^C)$

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Tenemos $p(R^C) = p(A) \cdot p(R^C/A) + p(B) \cdot p(R^C/B) + p(C) \cdot p(R^C/C) = (0'7) \cdot (0'02) + (0'25) \cdot (0'6) + (0'05) \cdot (0'9) = 209/1000 = 0'209$.

(a.2)

Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluidos)?

Me piden **$p(\text{tener entre 34 y 54 años, si accede a diario a dicha red social}) = p(B/R)$**

Por la fórmula de Bayes:

$$\text{Me piden } p(B/R) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{p(B) \cdot p(R/B)}{1 - p(R^c)} = (0'25 \cdot 0'4) / (1 - 0'209) = \mathbf{100/791 \approx 0'12642225}.$$

(b)

El tiempo que un usuario de la red Instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.

La variable X = tiempo en minutos conectado a la red, sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma) = N(53, 10)$.

(b.1)

¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?

$$\begin{aligned} \text{Me piden } p(\text{conectar más de 30 minutos}) &= p(X \geq 30) = \{\text{tipificamos}\} = p\left(Z \geq \frac{30 - 53}{10}\right) = p(Z \geq -2'3) = \\ &= \{\text{simetría}\} = p(Z \leq 2'3) = \mathbf{0'9893}. \end{aligned}$$

(b.2)

¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

$$\begin{aligned} \text{Me piden } p(\text{porcentaje conectados entre 40 y 67 minutos}) &= p(40 \leq X \leq 67) = \{\text{tipificamos}\} = \\ p\left(\frac{40 - 53}{10} \leq Z \leq \frac{67 - 53}{10}\right) &= p(-1'3 \leq Z \leq 1') = p(Z \leq 1'4) - p(Z \leq -1'3) = \{\text{suceso contrario}\} = \\ &= p(Z \leq 1'4) - (1 - p(Z \leq 1'3)) = 0'9192 - 1 + 0'9032 = \mathbf{0'8224 = 82'84 \% \text{ se conectan entre 40 y 67 minutos.}} \end{aligned}$$