

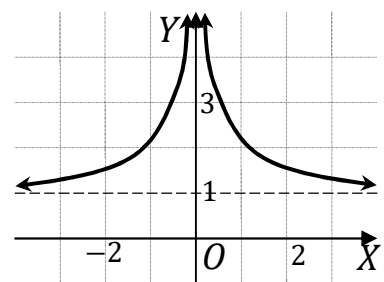
PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDAD DE CATALUÑA****JULIO – 2020**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Responde a cuatro de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre que desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

1º) Trace la recta tangente a la función $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ por un punto $P[a, f(a)]$ del primer cuadrante. Esta recta forma un triángulo con los ejes de coordenadas.



a) Comprueba que el área de ese triángulo, en función de a , viene dada por la función $g(x) = \frac{(a^2+3)^2}{4a}$.

b)

¿En qué punto P el área del triángulo es mínima? Calcule esta área mínima.

a)

La expresión del punto es $P\left(a, \frac{a^2+1}{a^2}\right)$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot 2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}. \quad m = f'(a) = -\frac{2}{a^3}.$$

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$:

$$y - \frac{a^2+1}{a^2} = -\frac{2}{a^3} \cdot (x - a); \quad a^3 y - a^3 - a = -2x + 2a;$$

$$2x + a^3 y - a^3 - a - 2a \Rightarrow t \equiv 2x + a^3 y - a(a^2 + 3) = 0.$$

Los puntos de corte con los ejes de la recta t son los siguientes:

$$\text{Eje } X \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 2x = a(a^2 + 3); \quad x = \frac{a(a^2+3)}{2} \Rightarrow M\left[\frac{a(a^2+3)}{2}, 0\right].$$

$$\text{Eje } Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow a^3 y - a(a^2 + 3) = 0; \quad y = \frac{a^3+3}{a^2} \Rightarrow N\left(0, \frac{a^3+3}{a^2}\right).$$

Por tratarse de un triángulo rectángulo, su área es la mitad del producto de sus catetos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a(a^2+3)}{2} \cdot \frac{a^3+3}{a^2} = \frac{(a^2+3)^2}{4a}.$$

$$\underline{\text{Queda comprobado que el área del triángulo es } g(a) = \frac{(a^2+3)^2}{4a}.$$

b)

El área será mínima cuando su primera derivada sea nula y sea positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$g'(a) = \frac{[2 \cdot (a^2+3) \cdot 2a] \cdot 4a - (a^2+3)^2 \cdot 4}{16a^2} = \frac{(a^2+3) \cdot (4a^2 - a^2 - 3)}{4a^2} = \frac{3(a^2+3) \cdot (a^2-1)}{4a^2}.$$

$$g'(a) = 0 \Rightarrow \frac{3(a^2+3) \cdot (a^2-1)}{4a^2} = 0; \quad a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 1.$$

La solución negativa carece de sentido lógico (par máximo).

Justificación de que se trata de un mínimo para $a = 1$:

$$g'(a) = \frac{3}{4} \cdot \frac{(a^2+3) \cdot (a^2-1)}{a^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^4 - a^2 + 3a^2 - 3}{a^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^4 + 2a^2 - 3}{a^2}.$$

$$g''(a) = \frac{3}{4} \cdot \frac{(4a^3 + 4a) \cdot a^2 - (a^4 + 2a^2 - 3) \cdot 2a}{a^4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4a^4 + 4a^2 - 2a^4 - 4a^2 + 6}{a^3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2a^4 + 6}{a^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g''(a) = \frac{3}{2} \cdot \frac{a^4+3}{a^3}. \quad g''(1) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1^4+3}{1^3} = 6 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo para } x = 1, \text{ c. q. j.}$$

$$\text{La solución es } a = 1 \Rightarrow P\left(a, \frac{a^2+1}{a^2}\right) \Rightarrow P\left(1, \frac{1^2+1}{1^2}\right).$$

El punto pedido es $P(1, 2)$.

$$g(1) = \frac{(1^2+3)^2}{4 \cdot 1} = \frac{4^2}{4} = 4.$$

El área máxima es de $4 a^2$.

2º) Considere el sistema
$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}, \text{ dependiente del parámetro } k.$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k .

b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso de $k = 0$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ k & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -k \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ k & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -k & 23 + k \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ k & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -k \end{vmatrix} = -10k + 4k + 40 - 40 - 40 + k^2 = 0;$$

$$k^2 - 6k - 40 = 0; \quad k = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 160}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{6 \pm 14}{2} = 3 \pm 7 \Rightarrow k_1 = -4, k_2 = 10.$$

$$\text{Para } \begin{cases} k \neq -4 \\ k \neq 10 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

$$\text{Para } k = -4 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ -4 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & 4 & 19 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_3\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

$$\text{Para } k = -4 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$$

$$\text{Para } k = 10 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 10 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -10 & 33 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 4 & 19 \\ 2 & 8 & 28 \\ 1 & -10 & 33 \end{vmatrix} = 264 - 380 + 112 - 162 + 280 - 264 = 392 - 542 =$$

$$= -150 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

$$\text{Para } k = 10 \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{ Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

b)

Para $k = 0$ el sistema resulta
$$\left. \begin{array}{l} 5x + y + 4z = 19 \\ 2y + 8z = 28 \\ 5x + y = 23 \end{array} \right\}, \text{ que es compatible determi-}$$

nado y equivalente al sistema
$$\left. \begin{array}{l} 5x + y + 4z = 19 \\ y + 4z = 14 \\ 5x + y = 23 \end{array} \right\}.$$

Restando a la primera ecuación la tercera: $4z = -4$; $z = -1$.

$y - 4 = 14$; $y = 18$. $5x + 18 = 23$; $5x = 5$; $x = 1$.

Solución: $x = 1, y = 18, z = -1$.

3º) a) Calcule la ecuación general del plano π que pasa por el punto $P(8, 8, 8)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (1, 2, -3)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 3)$.

b) Determine el valor del parámetro a para que el punto $Q(1, -5, a)$ pertenece al plano π y calcule la ecuación paramétrica de la recta r que pasa por Q y es perpendicular al plano π .

a)

$$\pi(P; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-8 & y-8 & z-8 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$6(x-8) + 3(y-8) + 2(z-8) - 3(y-8) = 0; \quad 6(x-8) + 2(z-8) = 0;$$

$$3(x-8) + (z-8) = 0; \quad 3x - 24 + z - 8 = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv 3x + z - 32 = 0}.$$

b) Determine el valor del parámetro a para que el punto $Q(1, -5, a)$ pertenece al plano π y calcule la ecuación paramétrica de la recta r que pasa por Q y es perpendicular al plano π .

El punto $Q(1, -5, a)$ pertenecerá al plano $\pi \equiv 3x + z - 32 = 0$ si satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 3x + z - 32 = 0 \\ Q(1, -5, a) \end{array} \right\} \Rightarrow 3 + a - 32 = 0 \Rightarrow \underline{a = 29}.$$

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (3, 0, 1)$.

Para $a = 29$ el punto es $Q(1, -5, 29)$.

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -5 \\ z = 29 + \lambda \end{cases} .}$$

4º) Considere la función $f(x) = \frac{ax^2+b}{x}$, donde a y b son dos parámetros reales. Calcule los valores de a y b de manera que la función $f(x)$ tenga una asíntota oblicua de pendiente 1 y un mínimo en el punto de la gráfica de abscisa $x = 2$.

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y = mx + n$, siendo $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

$$m = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2+b}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2+b}{x^2} = 1 \Rightarrow \underline{a = 1}.$$

La función resulta $f(x) = \frac{x^2+b}{x}$.

Para que una función tenga un mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2+b) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - b}{x^2} = \frac{x^2 - b}{x^2}.$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow \frac{2^2 - b}{2^2} = 0; \quad 4 - b = 0 \Rightarrow \underline{b = 4}.$$

Se justifica que el extremo relativo en un mínimo, para lo cual, la segunda derivada tiene que ser positiva para el valor encontrado.

La función resulta $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ y su primera derivada $f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$.

$$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^2 - 2x^2 + 8}{x^3} = \frac{8}{x^3}.$$

$$f''(2) = \frac{8}{2^3} = 1 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo relativo para } x = 2, c. q. j.}$$

5º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$:

a) Encuentre la matriz X que satisface la ecuación $AX = I - 3X$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) Compruebe que la matriz X es invertible y calcule su matriz inversa.

a)

$$AX = I - 3X; \quad AX + 3X = I; \quad (A + 3I) \cdot X = I;$$

$$(A + 3I)^{-1} \cdot (A + 3I) \cdot X = (A + 3I)^{-1} \cdot I; \quad I \cdot X = (A + 3I)^{-1}.$$

$$\underline{X = (A + 3I)^{-1}.$$

b)

$$A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}. \quad |A + 3I| = -4 + 3 = -1.$$

$$(A + 3I)^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{Adj. de } (A + 3I)^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$X = (A + 3I)^{-1} = \frac{\text{Adj. de } (A+3I)^t}{|A+3I|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$X^{-1} = [(A + 3I)^{-1}]^{-1} = A + 3I \Rightarrow \underline{X^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

6º) Considere la función $f(x) = x^3$.

a) Calcule en qué punto del tercer cuadrante la recta tangente a $y = f(x)$ es paralela a la recta $r \equiv 3x - y = 4$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en ese punto y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función y de las dos rectas.

b) Calcule el área de la región limitada por $y = f(x)$ y la recta $y = 3x + 2$.

a)

La pendiente de la recta $r \equiv 3x - y = 4$ es $m = 3$.

La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada en ese punto.

$$m = f'(x) = 3x^2 = 3; \quad x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Como el punto de tangencia es del tercer cuadrante, el valor de la variable tiene que ser negativa, por lo cual, $x = -1$.

El punto de tangencia es el siguiente: $f(-1) = (-1)^3 = -1 \Rightarrow P(-1, -1)$.

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$y + 1 = 3(x + 1) = 3x + 3 \Rightarrow \underline{t \equiv 3x - y + 2 = 0}.$$

b)

Los puntos de corte de la función $y = f(x)$ y la recta $y = 3x + 2$ tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^3 = 3x + 2; \quad x^3 - 3x - 2 = 0. \quad \text{Resolviendo por Ruffini:}$$

Las raíces distintas son $x_1 = -1, x_2 = 2$.

Los puntos de corte son $P(-1, -1)$ y $Q(2, 8)$.

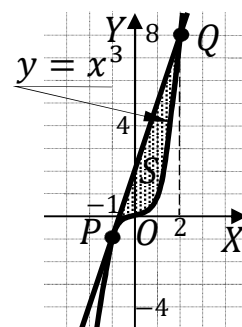
La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que indica la figura adjunta.

	1	0	-3	-2
-1		-1	1	2
	1	-1	-2	0
-1		-1		
	1	-2	0	
2		2		
	1	0		

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^2 [(3x + 2) - x^3] dx = \int_{-1}^2 (-x^3 + 3x + 2) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 =$$



$$= \left(-\frac{2^4}{4} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 2 \cdot 2 \right) - \left[-\frac{(-1)^4}{4} + \frac{3 \cdot (-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) \right] =$$

$$= -4 + 6 + 4 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = 8 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{32+1-6}{4} = \frac{27}{4}.$$

$$\underline{S = \frac{27}{4} u^2 = 6,75 u^2.}$$
