Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

---

1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} mx+ \quad y-z=0 \\ 2x+my \qquad =m \\ x \qquad +mz=m \end{array}\right\} \quad m\in\mathbb{R} \ .$$

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de m. (1.25 puntos)
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso m = 1. (0.75 puntos)
c) Para qué valores de m se tiene la solución x = 0; y = 1; z = 1. (0.5 puntos)

---

2. Dada la función $f(x)=\dfrac{2}{2+e^x}$:

a) Calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1 punto)

b) Mediante el cambio de variable $t=e^x$; calcula $\displaystyle\int \frac{2}{2+e^x}\,dx$ (1.5 puntos)

---

3. Sean los planos $\pi_1 : x+y+z=0$ y π_2 : Su intersección es la recta $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$. Calcula:

a) La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A(1;1;1)\in\pi_2$. (1.25 puntos)

b) La ecuación de un plano π'_1 paralelo a π_1 y que esté a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de la recta r. (1.25 puntos)

---

4. Un monitor de tenis compra un cañón para lanzar bolas. En las especificaciones del cañón se indica que falla el lanzamiento el 10% de las veces.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 bolas lanzadas, se tengan exactamente 5 fallos? (1.25 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho falle 2 veces de los 20 lanzamientos? (1.25 puntos)
Nota: Se pueden dejar indicadas las operaciones en potencias, sin necesidad de realizarlas.

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

OPCIÓN B

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\0&6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}$

a) Razona, sin hacerlos, si son posibles los siguientes productos matriciales y, si es el caso, indica las dimensiones de las matrices resultantes. (1 punto)

$$A\cdot A,\quad A\cdot B,\quad A\cdot B\cdot C,\quad C\cdot D$$

b) Calcula las inversas, si existen, de las matrices cuadradas posibles del apartado anterior.

(1.5 puntos)

2. Dada la curva $y=\dfrac{1}{3+x^2}$.

a) Expresa la función m(x) que da la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto x.

(1 punto)

b) Calcula el valor x donde se alcanza la máxima pendiente. (1.5 puntos)

3. Sean los puntos $A(1,1,1),\quad B(1;-1;-1)$: Calcula:

a) La ecuación del plano π que hace que los puntos A y B sean simétricos respecto a él.

(1.5 puntos)

b) Los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales. (1 punto)

4. Pedro y Luis son aficionados a los dardos. Pedro acierta en el centro el 10% de las veces y cada vez que acierta gana 400 €. Luis acierta en el centro el 20% de las veces y cada vez que acierta gana 100 €. Cuando fallan no ganan ni pierden nada. Tira cada uno dos dardos. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Que Luis acierte en el centro las dos veces. (0.75 puntos)

b) Que Pedro acierte en el centro una sola vez. (1 punto)

c) Que entre los dos hayan ganado 600 €. (0.75 puntos)

SOLUCIONES:

OPCIÓN A

1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} mx+\ \ y-z&=0\\ 2x+my\quad\ &=m\\ x\quad +mz&=m \end{aligned}\right\}\quad m\in\mathbb{R}\ .$$

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de m. (1.25 puntos)
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso m = 1. (0.75 puntos)
c) Para qué valores de m se tiene la solución x = 0; y = 1; z = 1. (0.5 puntos)

a) La matriz de coeficientes del sistema es:

$$A=\begin{pmatrix} m & 1 & -1\\ 2 & m & 0\\ 1 & 0 & m\end{pmatrix} \text{ y la matriz ampliada es } Am=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -1 & 0\\ 2 & m & 0 & m\\ 1 & 0 & m & m\end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de A:

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 1 & -1\\ 2 & m & 0\\ 1 & 0 & m\end{vmatrix}=m^3+0+0-(-m+2m+0)=m^3-m$$

Si lo igualamos a cero:

$$|A|=0\Rightarrow m^3-m=0\Rightarrow m(m^2-1)=0\Rightarrow\begin{cases} m=0\\ m^2-1=0\Rightarrow m^2=1\Rightarrow m=\sqrt{1}=\pm1\end{cases}$$

Por lo que vamos a distinguir 4 casos diferentes:

CASO 1. $m\neq 0;\ m\neq -1\ y\ m\neq 1$

En este caso el determinante de la matriz de los coeficientes no sería cero y el rango de A = rango de Am = 3 = nº de incógnitas. El sistema sería compatible determinado (solución única).

CASO 2. *m = 0*

El sistema queda:

$$\left.\begin{aligned} y-z&=0\\ 2x&=0\\ x&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned} x&=0\\ y&=z\\ z&=z\end{aligned}\right\}$$ El sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. *m = –1*

El sistema queda:

$$\left.\begin{aligned} -x+\ \ y-z&=0\\ 2x-y\quad\ &=-1\\ x\quad -z&=-1\end{aligned}\right\}\left\langle\begin{matrix}\text{Sumo a la 2ª ecuación el doble de la 1ª}\\ \text{Sumo a la 3ª ecuación la 1ª}\end{matrix}\right\rangle\Rightarrow\left.\begin{aligned} -x+\ \ y-z&=0\\ y-2z&=-1\\ y-2z&=-1\end{aligned}\right\}$$

$$\left\langle\begin{matrix}\text{2ª y 3ª ecuación son iguales}\\ \text{puedo quitar una de ellas}\end{matrix}\right\rangle\Rightarrow\left.\begin{aligned} -x+\ \ y-z&=0\\ y-2z&=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$y = 2z - 1 \Rightarrow -x + 2z - 1 - z = 0 \Rightarrow -x + z - 1 = 0 \Rightarrow z - 1 = x$

La solución del sistema sería $\left.\begin{array}{l} x = z - 1 \\ y = 2z - 1 \\ z = z \end{array}\right\}$

El sistema es compatible indeterminado

CASO 4. $m = 1$

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \text{Sumo a la 2ª ecuación -2 veces la 1ª} \\ \text{Sumo a la 3ª ecuación -1 vez la 1ª} \end{array} \right\rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ -y + 2z = 1 \\ -y + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

El sistema equivalente al inicial tiene dos ecuaciones iguales y por tanto es compatible indeterminado.

b) Para m = 1 el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ -y + 2z = 1 \\ -y + 2z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ -y + 2z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z - 1 = y \Rightarrow x + 2z - 1 - z = 0 \Rightarrow x = 1 - z$$

La solución es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = 2z - 1 \\ z = z \end{array}\right\}$$

c) Si sustituimos x = 0; y = 1; z = 1 como solución del sistema se debería cumplir:

$$\left.\begin{array}{l} 1 - 1 = 0 \\ m = m \\ m = m \end{array}\right\}$$

Se cumplen para cualquier valor de *m*

---

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{2 + e^x}$:

a) Calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1 punto)

b) Mediante el cambio de variable $t = e^x$; calcula $\int \dfrac{2}{2 + e^x} dx$ (1.5 puntos)

a) El dominio de definición de la función $f(x)=\frac{2}{2+e^x}$ son todos los valores reales menos los que anulen el denominador.
$2+e^x=0 \Rightarrow 2=-e^x \Rightarrow -2=e^x$ Esta igualdad no tiene solución ya que la exponencial siempre es positiva.
El dominio es $\mathbb{R}$.

Asíntotas verticales. No tiene, el dominio son todos los números reales

Asíntotas horizontales.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2+e^x}=\frac{2}{2+e^{+\infty}}=\frac{2}{+\infty}=0$ una asíntota horizontal es y = 0

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{2+e^x}=\frac{2}{2+e^{-\infty}}=\frac{2}{2+0}=1$ otra asíntota horizontal es y = 1

Asíntotas oblicuas. No tiene, ya que tiene horizontales.

b)

$$\int\frac{2}{2+e^x}dx=\left\{\begin{array}{l} t=e^x \\ dt=e^x dx \Rightarrow \frac{dt}{e^x}=dx \\ dx=\frac{dt}{t}\end{array}\right\}=\int\frac{2}{2+t}\frac{dt}{t}=\int\frac{2}{(2+t)t}dt$$

Esta integral la hacemos por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{2}{(2+t)t}=\frac{A}{2+t}+\frac{B}{t}\Rightarrow\frac{2}{(2+t)t}=\frac{At+B(2+t)}{(2+t)t}$$

$$2=At+B(2+t)$$

$$t=0\Rightarrow 2=2B\Rightarrow B=1$$

$$t=-2\Rightarrow 2=-2A\Rightarrow A=-1$$

$$\frac{2}{(2+t)t}=\frac{-1}{2+t}+\frac{1}{t}$$

Siguiendo con la integral:

$$\int\frac{2}{(2+t)t}dt=\int\left(\frac{-1}{2+t}+\frac{1}{t}\right)dt=\int\frac{-1}{2+t}dt+\int\frac{1}{t}dt=-\ln|2+t|+\ln t=$$

$$=\ln\frac{t}{2+t}=\ln\left(\frac{e^x}{2+e^x}\right)+K$$

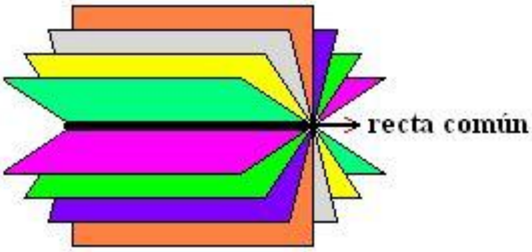
3. Sean los planos $\pi_1: x+y+z=0$ y π_2 : Su intersección es la recta $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0\end{cases}$. Calcula:

a) La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A(1;1;1)\in\pi_2$. (1.25 puntos)

b) La ecuación de un plano π'_1 paralelo a π_1 y que esté a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de la recta r. (1.25 puntos)

a)

Una forma de resolverlo:



El plano pedido está en el haz de planos que contienen a la recta $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ y por tanto el plano π_2 tiene ecuación $x+y+z+b(x+z)=0$. Como pasa por A(1,1,1) entonces:

$1+1+1+b(1+1)=0 \Rightarrow 3+2b=0 \Rightarrow b=\frac{-3}{2}$

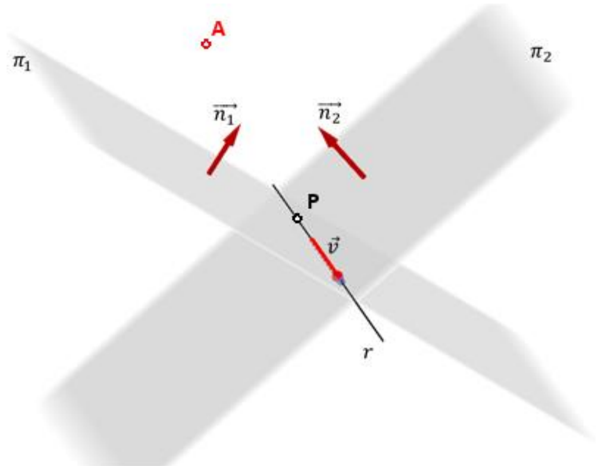
La ecuación queda $x+y+z-\frac{3}{2}(x+z)=0 \Rightarrow 2x+2y+2z-3x-3z=0 \Rightarrow -x+2y-z=0$

El plano tiene ecuación $\pi_2 \equiv -x+2y-z=0$

Otra forma de resolverlo:

La recta de ecuación $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ pasa por el punto P(0,0,0) y tiene como vector director el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen:

$$\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=i+j-(k+j)=i-k=(1,0,-1)$$



El plano π_2 al contener a la recta debe pasar por P(0,0,0) y tener como vectores directores $\overrightarrow{v_r}=(1,0,-1)$ y $\overrightarrow{AP}=(0,0,0)-(1,1,1)=(-1,-1,-1)$

El plano tiene ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow y-z-(-y+x)=0$$

$-x+2y-z=0$

El plano tiene ecuación $\pi_2 \equiv -x+2y-z=0$

b) La ecuación de un plano π'_1 paralelo a $\pi_1 : x+y+z=0$ tiene ecuación $\pi'_1 : x+y+z+D=0$.
Además P(0,0,0) es un punto del plano π_1.

$$distancia(\pi_1,\pi'_1)=\sqrt{3} \Rightarrow \text{distancia}(\text{P},\pi'_1)=\sqrt{3} \Rightarrow \frac{|0+0+0+D|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}$$

$$|0+0+0+D|=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow |D|=3 \Rightarrow \begin{cases} D=3 \\ o \\ D=-3 \end{cases}$$

El plano puede ser $\pi'_1 : x+y+z+3=0$ o $\pi'_1 : x+y+z-3=0$

---

4. Un monitor de tenis compra un cañón para lanzar bolas. En las especificaciones del cañón se indica que falla el lanzamiento el 10 % de las veces.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 bolas lanzadas, se tengan exactamente 5 fallos? (1.25 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho falle 2 veces de los 20 lanzamientos? (1.25 puntos)
Nota: Se pueden dejar indicadas las operaciones en potencias, sin necesidad de realizarlas.

Dado que son 20 lanzamientos es un problema de distribución binomial.
Consideremos la distribución X = Número de fallos de un cañón en 20 lanzamientos

n = 20 y p = Probabilidad de fallo en un lanzamiento = 0,10.

X = B(20, 0,1)

a) $$P(X=5)=\binom{20}{5}\cdot 0,1^5\cdot 0,9^{15}=\frac{\cancel{20}\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{\cancel{5\cdot 4}\cdot 3\cdot 2}\cdot 0,1^5\cdot 0,9^{15}=0,03$$

b)
$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$
$$=\binom{20}{0}\cdot 0,1^0\cdot 0,9^{20}+\binom{20}{1}\cdot 0,1^1\cdot 0,9^{19}+\binom{20}{2}\cdot 0,1^2\cdot 0,9^{18}=$$
$$=1\cdot 0,1^0\cdot 0,9^{20}+20\cdot 0,1^1\cdot 0,9^{19}+\frac{20\cdot 19}{2}\cdot 0,1^2\cdot 0,9^{18}=$$
$$=0,1215+0,27+0,2851=0,6766$$

OPCIÓN B

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\0&6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}$

a) Razona, sin hacerlos, si son posibles los siguientes productos matriciales y, si es el caso, indica las dimensiones de las matrices resultantes. (1 punto)

$$A\cdot A,\quad A\cdot B,\quad A\cdot B\cdot C,\quad C\cdot D$$

b) Calcula las inversas, si existen, de las matrices cuadradas posibles del apartado anterior. (1.5 puntos)

a) Un producto de matrices es posible si el número de columnas de la primera matriz del producto es igual al número de filas de la segunda matriz del producto:

A · B es posible si A es de dimensiones m x n y B es n x p. Siendo el producto resultante una matriz m x p.

Apliquemos esta regla a nuestros productos:

$$A \text{ es de dimensiones } 3\times 3 \Rightarrow \begin{cases} A\cdot A \text{ es posible y se obtiene una matriz } 3\text{x}3 \\ 3\text{x}\boxed{3\cdot 3}\text{x}3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ es de dimensiones } 3\times 3 \\ B \text{ es de dimensiones } 3\times 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A\cdot B \text{ es posible y se obtiene una matriz } 3\text{x}2 \\ 3\text{x}\boxed{3\cdot 3}\text{x}2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot B \text{ es posible y se obtiene una matriz 3x2} \\ C \text{ es de dimensiones } 3\times 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A\cdot B\cdot C \text{ no es posible} \\ 3\text{x}\boxed{2\cdot 3}\text{x}1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ es de dimensiones } 3\times 1 \\ D \text{ es de dimensiones } 1\times 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C\cdot D \text{ es posible y se obtiene una matriz } 3\text{x}3 \\ 3\text{ x }\boxed{1\cdot 1}\text{ x }3 \end{cases}$$

b) Debemos hallar la inversa de $A\cdot A$ y $C\cdot D$. Las otras no son cuadradas.

$$A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$$

$$|A\cdot A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\3&1&0\\3&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$(A\cdot A)^{-1}=\frac{Adj(A\cdot A)^T}{|A\cdot A|}=\frac{Adj\left(\begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}3&3\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&3\\0&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}3&3\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&3\\0&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$$

$$C\cdot D=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$|C\cdot D|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&0&2\\1&0&1\end{vmatrix}=0$ Esta matriz no tiene inversa

---

2. Dada la curva $y=\dfrac{1}{3+x^2}$.

a) Expresa la función m(x) que da la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto x. (1 punto)

b) Calcula el valor x donde se alcanza la máxima pendiente. (1.5 puntos)

a) $m(x)=f\,'(x)=\dfrac{0\cdot(3+x^2)-2x\cdot 1}{(3+x^2)^2}=\dfrac{-2x}{(3+x^2)^2}$

b) Debemos maximizar $m(x)=\dfrac{-2x}{(3+x^2)^2}$, por lo que calculamos su derivada.

$$m\,'(x)=\frac{-2\cdot(3+x^2)^2-(-2x)\cdot 2(3+x^2)\cdot 2x}{(3+x^2)^4}=\frac{-2\cdot(3+x^2)^2+8x^2\cdot(3+x^2)}{(3+x^2)^4}$$

$$m\,'(x)=\frac{(3+x^2)(-2\cdot(3+x^2)+8x^2)}{(3+x^2)^4}=\frac{(3+x^2)(-6-2x^2+8x^2)}{(3+x^2)^4}=\frac{(3+x^2)(-6+6x^2)}{(3+x^2)^4}=\frac{-6+6x^2}{(3+x^2)^3}$$

Si igualamos a cero

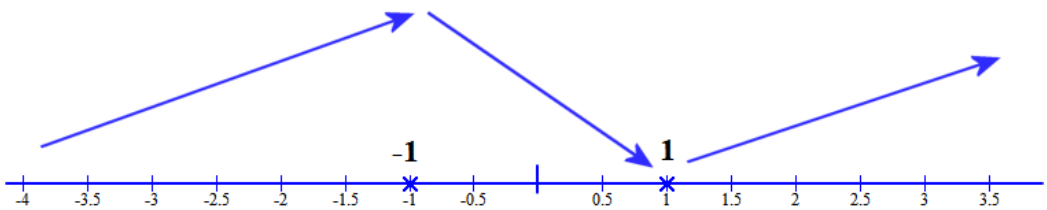
$$m\,'(x)=0\Rightarrow\frac{-6+6x^2}{(3+x^2)^3}=0\Rightarrow -6+6x^2=0\Rightarrow 6x^2=6\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

Comprobemos si 1 o –1 es un máximo.

En $(-\infty,-1)$ tomamos un valor, por ejemplo $x=-2 \Rightarrow m'(-2)=\frac{-6+6(-2)^2}{\left(3+(-2)^2\right)^3}=\frac{18}{7^3}>0$ la función crece

En $(-1,1)$ tomamos un valor, por ejemplo $x=0 \Rightarrow m'(0)=\frac{-6+6(0)^2}{\left(3+(0)^2\right)^3}=\frac{-6}{3^3}<0$ la función decrece

En $(1,+\infty)$ tomamos un valor, por ejemplo $x=2 \Rightarrow m'(2)=\frac{-6+6(2)^2}{\left(3+(2)^2\right)^3}=\frac{18}{7^3}>0$ la función crece



En x = –1 hay un máximo. La pendiente es máxima en dicho punto.

---

3. Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,-1,-1)$: Calcula:

a) La ecuación del plano π que hace que los puntos A y B sean simétricos respecto a él.

(1.5 puntos)

b) Los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales. (1 punto)

a) Hallamos el punto medio del segmento AB que debe pertenecer al plano pedido:

$$PM=\frac{(1,1,1)+(1,-1,-1)}{2}=\frac{(2,0,0)}{2}=(1,0,0)$$

Además el vector normal a dicho plano debe ser el vector $\overrightarrow{AB}=(1,-1,-1)-(1,1,1)=(0,-2,-2)$

El plano π tiene la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{n_\pi}=(0,-2,-2)\\ PM(1,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi\equiv -2y-2z+D=0\\ PM(1,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 0+0+D=0\Rightarrow D=0$$

El plano es el de ecuación $\pi\equiv -2y-2z=0$, que simplificado es $\pi\equiv y+z=0$

b) El vector que une los puntos A y B lo dividimos entre 3:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{3}=\frac{(0,-2,-2)}{3}=\left(0,\frac{-2}{3},\frac{-2}{3}\right)$$

Le sumamos al punto A(1,1,1) dicho vector y obtenemos C:

$$C=A+\frac{\overrightarrow{AB}}{3}=(1,1,1)+\left(0,\frac{-2}{3},\frac{-2}{3}\right)=\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

Le sumamos a C el mismo vector y obtenemos D:

$$D=C+\frac{\overrightarrow{AB}}{3}=\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)+(0,\frac{-2}{3},\frac{-2}{3})=\left(1,\frac{-1}{3},\frac{-1}{3}\right)$$

Los puntos pedidos son $C\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ y $D\left(1,\frac{-1}{3},\frac{-1}{3}\right)$

---

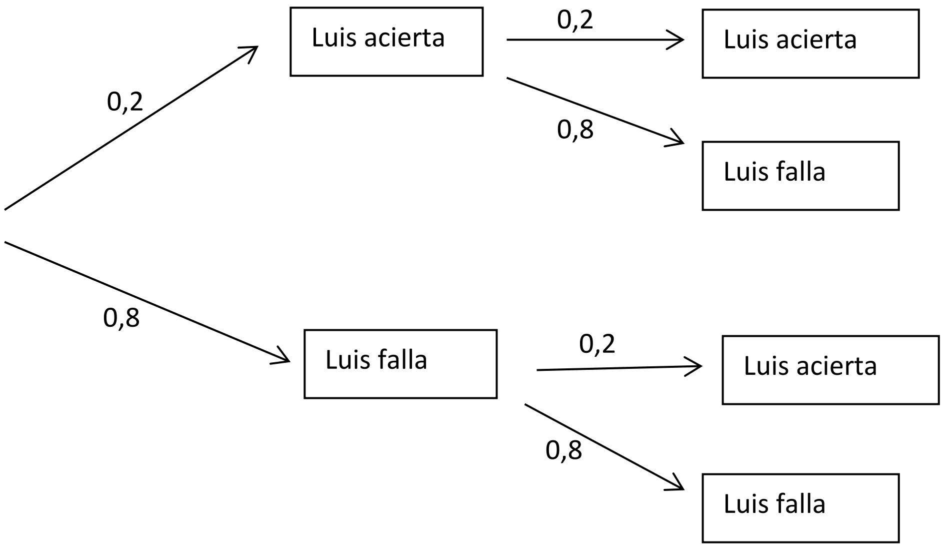
4. Pedro y Luis son aficionados a los dardos. Pedro acierta en el centro el 10% de las veces y cada vez que acierta gana 400 €. Luis acierta en el centro el 20% de las veces y cada vez que acierta gana 100 €. Cuando fallan no ganan ni pierden nada. Tira cada uno dos dardos. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Que Luis acierte en el centro las dos veces. (0.75 puntos)

b) Que Pedro acierte en el centro una sola vez. (1 punto)

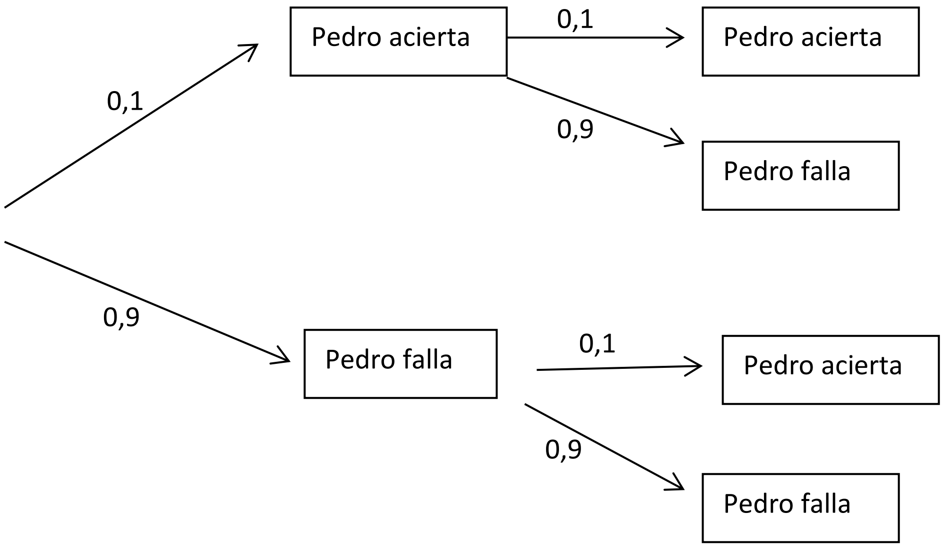
c) Que entre los dos hayan ganado 600 €. (0.75 puntos)

a) Hagamos el diagrama de árbol:



$P\left(\text{Luis acierta las dos veces}\right)=0,2\cdot 0,2=0,04$

b) Hagamos el diagrama de árbol:



$$P\left(\text{Luis acierta una sola vez}\right)=0{,}1\cdot 0{,}9+0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}09+0{,}09=0{,}18$$

c) Para ganar entre los dos 600 € Pedro debe acertar solo una vez y Luis las dos veces. Como son independientes las tiradas de uno con respecto a las del otro, la probabilidad de que ocurra esto es:

$$P\left(ganar\ 600€\right)=P\left(\text{Luis acierta una sola vez y Pedro acierta las dos veces}\right)=$$

$$=P\left(\text{Luis acierta una sola vez}\right)\cdot P\left(\text{Luis acierta las dos veces}\right)=$$

$$=0{,}18\cdot 0{,}04=0{,}0072$$