EXAMEN PARCIAL. PRIMERA EVALUACIÓN

MATEMÁTICAS II

LÍMITES Y CONTINUIDAD. DERIVADAS

NOMBRE:

GRUPO:

1.- **(3 puntos)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x^3+ax^2-1 & \text{si } x\le -1 \\ \dfrac{a}{2x} & \text{si } -1<x\le 1 \\ e^{x-1}+2b & \text{si } x>1 \end{cases}$

a) Estudia para qué valores de a y b, la función es continua en $x=1$ y $x=-1$. ¿Es f continua en $\mathbb{R}$?

b) Para los valores calculados en el apartado anterior, estudia si f es derivable en $x=1$ y $x=-1$. ¿Es f derivable en $\mathbb{R}$?

2.- **(3 puntos)** Calcula los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+4}{x^2-x+6}\right)^{\frac{3x}{x-1}}$

b) $\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}+2x\right)$

3.- **(3 puntos)** Deriva las siguientes funciones

a) $f(x)=\ln\sqrt[5]{\left(\dfrac{2x-3}{7x+8}\right)^2}$

b) $f(x)=(\sin^2 x-\cos^2 x)^{e^{x}-x^{3}}$

c) $f(x)=\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)^3$

4.- **(1 punto)** Demostrar que el polinomio $2x^3-3x^2+x-1$ tiene al menos una raíz real.

① Para que sea continua en $x=1$ y $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$$

$$2(-1)^3 + a(-1)^2 - 1 = \frac{a}{2(-1)} = 2(-1)^3 + a(-1) - 1$$

$$-2 + a - 1 = -a/2 \Rightarrow a - 3 = -a/2 \Rightarrow a + \frac{a}{2} = 3 \quad 3a = 6 \quad \boxed{a=2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\frac{a}{2} = e^0 + 2b = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = 1 + 2b \Rightarrow$$

$$1 = 1 + 2b \Rightarrow \boxed{b=0}$$

$f(x)$ NO es continua en $\mathbb{R}$ ya que en el 2º trozo hay una discontinuidad de salto infinito en $x=0$

b) hallamos $f'(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x^2 - 1 & \text{si } x \le -1 \\ 1/x & \text{si } -1 < x \le 1 \\ e^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

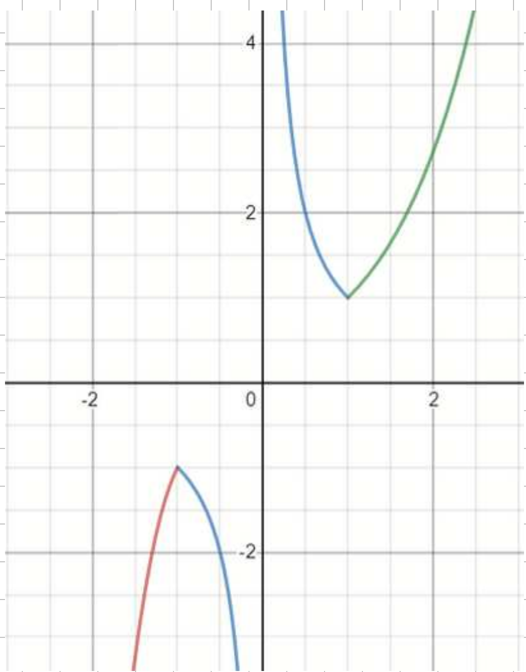
$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 4x & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ e^{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x=-1$ y $x=1$

$f'(-1^-) = f'(-1^+) \Rightarrow 6(-1)^2 + 4(-1) = \frac{1}{-1} \quad 6 - 4 \neq 1$ NO ES DERIVABLE en $x=-1$

$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow -1 = e^{1-1} \Rightarrow -1 = e^0$ NO ES DERIVABLE en $x=1$

No es derivable en $\mathbb{R}$ ya que no es continua en $\mathbb{R}$



② $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+4}{x^2-x+6}\right)^{\frac{3x}{x-1}} = \left(\frac{2+4}{1-1+6}\right)^{\frac{3}{0}} = \left(\frac{6}{6}\right)^{\infty} = 1^{\infty}$$

$$\lim\left(1+\frac{2x+4}{x^2-x+6}-1\right)^{3/x-1} = \lim\left(1+\frac{2x+4-x^2+x-6}{x^2-x+6}\right)^{\frac{3}{x-1}} =$$

$$= \lim\left(1+\frac{-x^2+3x-2}{x^2-x+6}\right)^{\frac{3}{x-1}} = \lim\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-x+6}{-x^2+3x-2}}\right)^{\frac{x^2-x+6}{-x^2+3x-2}\cdot\frac{-x^2+3x-2}{x^2-x+6}\cdot\frac{3}{x-1}}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & 2 \\ \hline & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

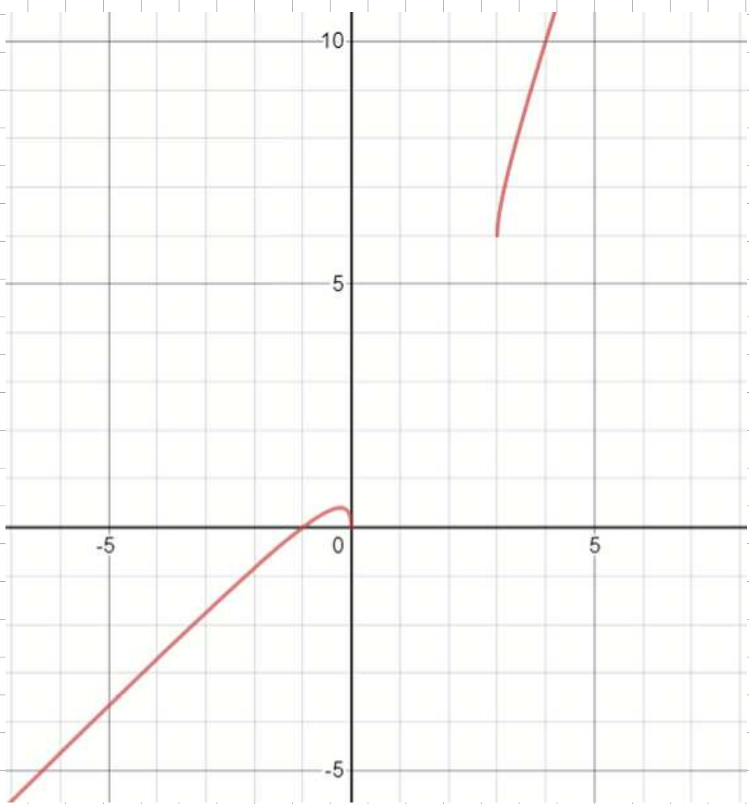
$$e^{\lim \frac{3(-x^2+3x-2)}{(x-1)(x^2-x+6)}} = e^{\lim \frac{3\cancel{(x-1)}(-x+2)}{\cancel{(x-1)}(x^2-x+6)}} = e^{\lim 3\frac{(2-x)}{x^2-x+6}} =$$

$$= e^{\frac{3(2-1)}{1-1+6}} = e^{3/6} = e^{1/2} = \boxed{\sqrt{e}}$$

b) $$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}+2x\right) = \infty-\infty \Rightarrow$$

$$\lim\left(\sqrt{x^2-3x}+2x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-3x}-2x}{\sqrt{x^2-3x}-2x} = \lim\frac{x^2-3x-4x^2}{\sqrt{x^2-3x}-2x} = \lim\frac{-3x^2-3x}{\sqrt{x^2-3x}-2x}$$

$$= \frac{-\infty}{\infty} = -3\cdot\infty = \boxed{-\infty}$$ (Grado de infinito > Numerador)



③ a) $f(x) = \ln\left[\left(\frac{2x-3}{7x+8}\right)^{2/5}\right] \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{2x-3}{7x+8}\right)^{2/5}} \cdot \frac{2}{5}\left(\frac{2x-3}{7x+8}\right)^{-3/5} \cdot \frac{2(7x+8)-7(2x-3)}{(7x+8)^2}$$

$$\frac{2\cdot(\cancel{14x}+16-\cancel{14x}+21)}{5\sqrt[5]{\left(\frac{2x-3}{7x+8}\right)^2}\sqrt[5]{\left(\frac{2x-3}{7x+8}\right)^3}(7x+8)^2} = \frac{74}{5\sqrt[\cancel{5}]{\left(\frac{2x-3}{\cancel{7x+8}}\right)^{\cancel{5}}}\cdot(7x+8)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \boxed{\frac{74}{5(2x-3)(7x+8)}}$$

b) Derivación logarítmica:

$\ln y = \ln\left[(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)^{e^x - x^2}\right]$

$\ln y = (e^x - x^2)\cdot\ln(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)$

$$\frac{y'}{y} = (e^x - 2x)\ln(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) + \frac{\overbrace{2\operatorname{sen} x\cos x + 2\cos x\operatorname{sen} x}^{4\operatorname{sen} x\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x} =$$

$$\boxed{y' = \left[(e^x - 2x)\ln(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) + \frac{4\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}\right]\cdot(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)^{e^x - x^2}}$$

c) $f'(x) = \boxed{3\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}$

④

Teorema de Bolzano: Si una función f(x) está definida y es continua en un intervalo cerrado [a, b] y toma valores de distinto signo en los extremos a y b, entonces existe al menos un punto c del intervalo abierto (a, b) en el que se anula la función.

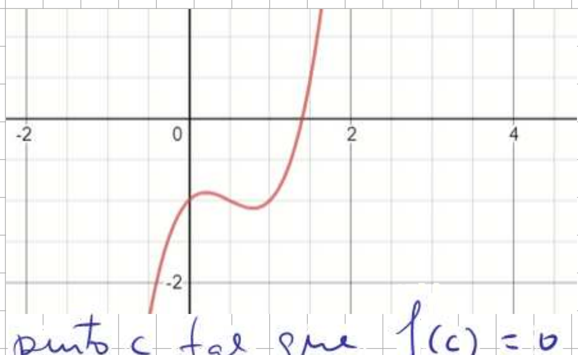
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ ES CONTÍNUA en $\mathbb{R}$

Probamos valores:

$f(0) = -1 < 0$

$f(1) = 2 - 3 + 1 - 1 < 0$

$f(2) = 16 - 12 + 2 - 1 > 0$



En el intervalo $(1, 2)$ habrá un punto c tal que $f(c) = 0$