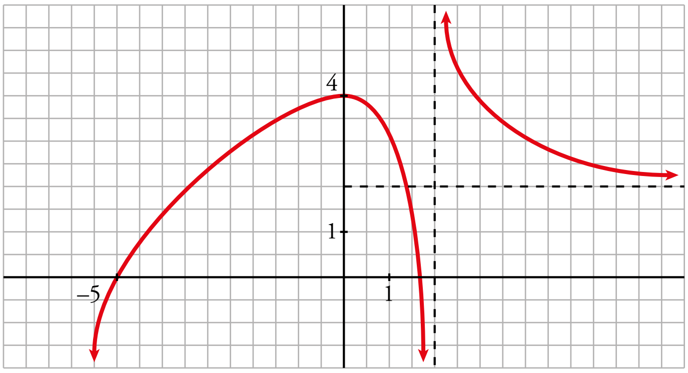
Resuelve

Página 299

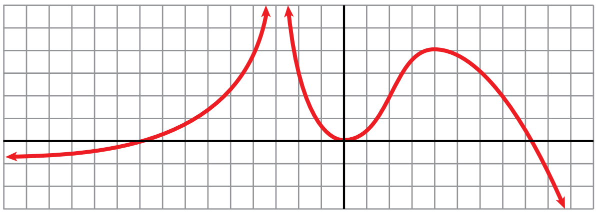
Límites y derivadas para representar una función

- **Traza unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado y representa una curva, lo más sencilla posible, que cumpla las siguientes condiciones:**

  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
  - $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
  - $f(0) = 4;\ f'(0) = 0$
  - $f(-5) = 0;\ f(1{,}75) = 0$
  - f **es derivable en todo** $\mathbb{R}$**, salvo en** $x = 2$**.**



- **Describe, con la menor cantidad de datos y de forma similar al ejercicio anterior, la siguiente función:**



- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$
- $f(-9) = 0;\ f'(0) = 0;\ f(8) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f(4) = 4;\ f'(4) = 0$

1 Elementos fundamentales para la construcción de curvas

Página 301

1 Halla el dominio de estas funciones y di dónde son continuas y dónde derivables.

a) $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$ **b)** $y = \frac{3x^3+5}{x^2-5x+4}$ **c)** $y = \frac{1}{sen\, x}$ **d)** $y = \frac{x^3+2x}{x^2+1}$

e) $y = \sqrt{x^2-2x}$ **f)** $y = ln\,(x^2-1)$ **g)** $y = ln\,(x^2+1)$ **h)** $y = \frac{e^x}{x^2}$

a) *Dominio* = $\mathbb{R}$

y es un polinomio, luego es continua y derivable en todo su dominio.

b) $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

Dominio = $\mathbb{R} - \{1, 4\}$

y es un cociente de polinomios, que solo daría problemas de continuidad y derivabilidad en $x = 4$ y $x = 1$, luego es continua y derivable en su dominio, $\mathbb{R} - \{1, 4\}$.

c) Como $sen\, x$ se anula cuando $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, la función dada no existe para estos valores de x ya que se produciría una división entre 0. Por tanto, el dominio de definición es $\mathbb{R} - \{k\pi\}$.

La función es continua y derivable en todo su dominio.

d) $x^2 + 1 \neq 0$ para todo $x \rightarrow$ *Dominio* = $\mathbb{R}$

Se sigue del razonamiento del apartado b) que es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

e) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow$ *Dominio* = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

Al ser una función raíz, la derivada no existirá en los puntos en los que se anula, $x = 2$ y $x = -2$. Es continua en todo su dominio, $\mathbb{R} - (0, 2)$, pero solo es derivable en $\mathbb{R} - [0, 2]$.

f) $x^2 - 1 > 0 \rightarrow$ *Dominio* = $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

La derivada no existe para $x^2 - 1 = 0$, pero son puntos fuera del dominio, luego es continua y derivable en todo su dominio.

g) $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \rightarrow$ *Dominio* = $\mathbb{R}$

La derivada existe para todo punto x, luego es derivable y continua en $\mathbb{R}$.

h) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

La derivada solo da problemas fuera del dominio, luego es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

2 Di dónde son continuas y dónde son derivables las funciones:

a) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ **b)** $y = |x^3 - x|$

c) $y = arc\, cos\,(x-4)$ **d)** $y = log\,(5 - \sqrt{169-x^2})$

a) *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Es continua y derivable en su dominio.

b) La función $y = |x^3 - x|$ es continua en todo su dominio, que es $\mathbb{R}$. Por tener puntos angulosos donde se anula el polinomio $x^3 - x$, no es derivable en dichos puntos; es decir, en $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$ no es derivable.

c) La función $y = arc\, cos\,(x-4)$ está definida cuando $-1 \leq x - 4 \leq 1$, es decir, su dominio de definición es el intervalo [3, 5]. En él la función es continua. Como tiene puntos de tangente vertical en $x = 3$ y $x = 5$, no es derivable en ellos. Sí lo es en el resto del intervalo.

d) Veamos primero el dominio de definición de la función $y = log(5 - \sqrt{169 - x^2})$.

Para que la función exista, debe ser $5 - \sqrt{169 - x^2} > 0$, es decir, $\sqrt{169 - x^2} < 5$ y además x debe estar comprendido entre –13 y 13 para que tenga sentido la raíz cuadrada.

Elevando al cuadrado:

$$169 - x^2 < 25 \rightarrow 144 < x^2 \rightarrow 12 < x \le 13 \text{ y } -13 \le x < -12$$

Luego el dominio de definición es $[-13, -12) \cup (12, 13]$.

En su dominio la función es continua. En $x = -13$ y $x = 13$ la función tiene puntos de tangente vertical, luego en ellos no es derivable. Por tanto, es derivable en $(-13, -12) \cup (12, 13)$.

Página 302

3 Halla las simetrías y las periodicidades de las funciones siguientes:

a) $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$

b) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

e) $y = sen\, x + 1/2\, (sen\, 2x)$

f) $y = \sqrt[3]{cos\, x + 5}$

a) $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 - 1 = 3x^4 - 5x^2 - 1 = f(x)$

Es una función par: simétrica respecto al eje Y.

No es periódica.

b) $f(-x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

c) $f(-x) = \dfrac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$

Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

d) $f(-x) = \dfrac{-x^3 - 1}{x^2}$

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

e) $f(-x) = sen\,(-x) + \dfrac{1}{2}(sen\,(-2x)) = -sen\, x - \dfrac{1}{2}(sen\,(2x)) = -f(x)$

Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas. Es periódica de período 2π.

f) Como $cos\,(-x) = cos\, x$, la función es par.

Por otro lado, $cos\, x$ es periódica de período 2π. Por tanto, la función dada también es periódica de período 2π.

Página 303

4 Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

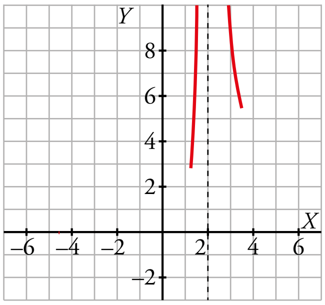
a) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2 x}$ **b)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$

c) $y = \dfrac{3}{\sqrt{4-x}}$ **d)** $y = log\,(x^2 - 4)$

a) El denominador se anula cuando $x = 2$ y cuando $x = 0$.

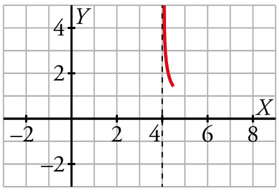
$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3}{(x-2)^2 \cdot x} = +\infty$, ya que en las cercanías del punto 2 los dos términos de la fracción son positivos. Por tanto, en $x = 2$ hay una asíntota vertical.

Por otro lado, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{(x-2)^2 \cdot x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{(x-2)^2} = 0$ y en $x = 0$ no hay una asíntota vertical.



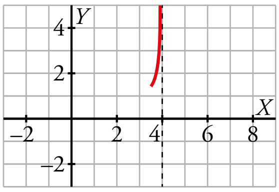
b) El denominador se anula cuando $x = 4$ y el dominio de la función es el intervalo $(4, +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-4}} = +\infty$ y en $x = 4$ tenemos una asíntota vertical.



c) El denominador se anula cuando $x = 4$ y el dominio de la función es el intervalo $(-\infty, 4)$.

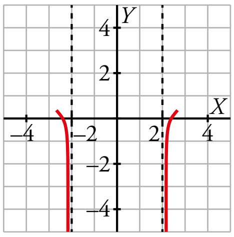
$\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{3}{\sqrt{4-x}} = +\infty$ y en $x = 4$ tenemos una asíntota vertical.



d) El dominio de definición es $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ ya que $x^2 - 4 > 0$.

$\lim\limits_{x \to -2^-} log\,(x^2 - 4) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -2^+} log\,(x^2 - 4) = -\infty$ porque en ambos casos $x^2 - 4 \to 0^+$.

Luego tiene dos asíntotas verticales: una en $x = -2$ y otra en $x = 2$.



Página 305

5 Halla las ramas en el infinito de las funciones siguientes:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

b) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$

c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

e) $y = ln\,(x^2 + 1)$

f) $y = 2^{x-1}$

g) $y = x\ sen\ x$

h) $y = x - cos\ x$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^5 - 20x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^5 - 20x^3) = -\infty$

Tiene sendas ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido por ser una función polinómica.

b) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2 - 1}$

En el infinito, la función dada es equivalente a $x^2 + 1$, luego tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido y $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to \pm\infty$.

c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2} = x + 4 + \dfrac{12x - 16}{(x-2)^2}$

La función tiene una asíntota oblicua cuando $x \to \pm\infty$ y es la recta $y = x + 4$.

d) En el infinito, la función es equivalente a $\sqrt{x^2} = |x|$, luego $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to \pm\infty$.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} ln\,(x^2 + 1) = +\infty$

$y = ln\,(x^2 + 1)$ es equivalente en el infinito a $y = ln\,(x^2) = 2ln\,|x|$.

Luego $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\,(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ ln|x|}{x} = 0$.

Lo mismo ocurre cuando $x \to -\infty$ y, por tanto, tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más lento cuando $x \to \pm\infty$.

f) Esta función tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más rápido cuando $x \to +\infty$ por ser una función exponencial. Por el mismo motivo, la recta $y = 0$ es la asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x\ sen\ x)$ no existe.

Análogamente ocurre cuando $x \to -\infty$ y, por tanto, esta función no tiene ni asíntotas ni ramas parabólicas.

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - cos\ x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - cos\ x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{cos\ x}{x}\right) = 1$ porque la función $cos\ x$ está acotada entre –1 y 1.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x - cos\ x - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} cos\ x$ no existe.

En consecuencia, no tiene asíntotas ni ramas parabólicas.

6 **¿Qué tipo de ramas en el infinito tienen estas funciones?**

a) $y = \dfrac{1}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{3x}{x+1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ **d)** $y = \dfrac{x^4}{x+1}$

e) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ **f)** $y = \sqrt[3]{x^2+3}$ **g)** $y = x + \sqrt{x}$ **h)** $y = tg\,x$

a) Tiene una asíntota horizontal cuando $x \to \pm\infty$. Es la recta $y = 0$.

b) $y = \dfrac{3x}{x+1} = 3 - \dfrac{3}{x+1}$ tiene una asíntota horizontal cuando $x \to \pm\infty$. Es la recta $y = 3$.

c) $y = \dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$. Por tanto, la recta $y = x - 1$ es la asíntota oblicua cuando $x \to \pm\infty$.

d) $y = \dfrac{x^4}{x+1} = x^3 - x^2 + x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ tiene ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido por ser equivalente en el infinito a una función polinómica.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$. La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^x} = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2/e^x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^x} = -\infty$. La función tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más rápido cuando $x \to -\infty$.

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2+3} = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+3}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2+3}{x^3}} = 0$$

Se da la misma situación cuando $x \to -\infty$ por ser una función par. Tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más lento.

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x} - x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más lento cuando $x \to +\infty$.

Como su dominio de definición es el intervalo $[0, +\infty)$, no podemos estudiarla cuando $x \to -\infty$.

h) La función $y = tg\,x$ es periódica y no acotada. No tiene asíntotas ni ramas parabólicas en el infinito.

Página 306

7 **Halla los puntos singulares y los puntos de inflexión de estas funciones:**

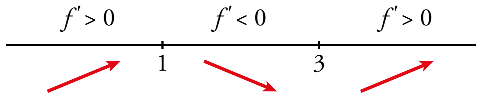
a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ **b)** $y = ln\,(x^2 + 1)$

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
- $f'(x) = 0 \to 3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

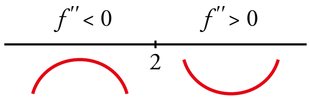


Hay un máximo en (1, 9) y un mínimo en (3, 5).

- $f''(x) = 6x - 12$

  $f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

  Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en (2, 7).

b) $y = ln(x^2 + 1)$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

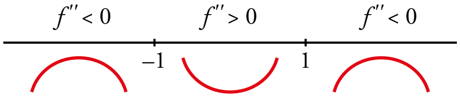
  $f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

  $$\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ para } x < 0 \\ f''(x) > 0 \text{ para } x > 0 \end{array}\right\}$$ Hay un mínimo en (0, 0).

- $f''(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

  $$f''(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}$$

  Signo de $f''(x)$



Hay un punto de inflexión en (–1, *ln* 2) y otro en (1, *ln* 2).

8 **Halla los puntos singulares de:**

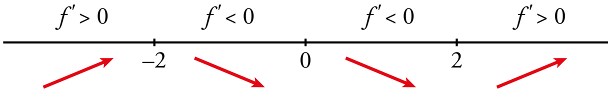
a) $y = 3x^5 - 20x^3$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 15x^2(x^2 - 4) = 0 \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}$$

Signo de $f'(x)$:



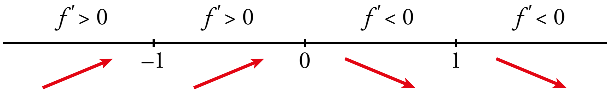
Hay un máximo en (–2, 64), un mínimo en (2, –64), y un punto de inflexión en (0, 0).

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f'(x) = \dfrac{2x(x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$

Signo de $f'(x)$:



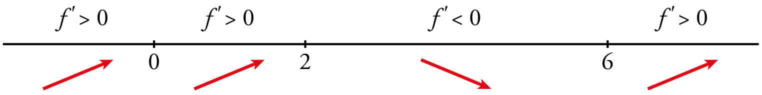
Hay un máximo en (0, 0).

c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{3x^2(x-2) - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



Hay un punto de inflexión en (0, 0) y un mínimo en $\left(6, \dfrac{27}{2}\right)$.

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. *Dominio* = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \notin$ *Dominio*.

No hay puntos singulares.

2 El valor absoluto en la representación de funciones

Página 307

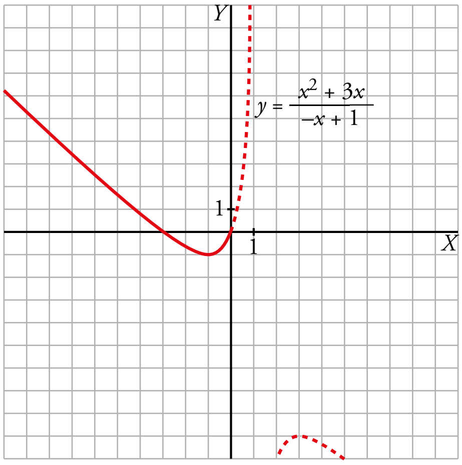
1 **Representa:**

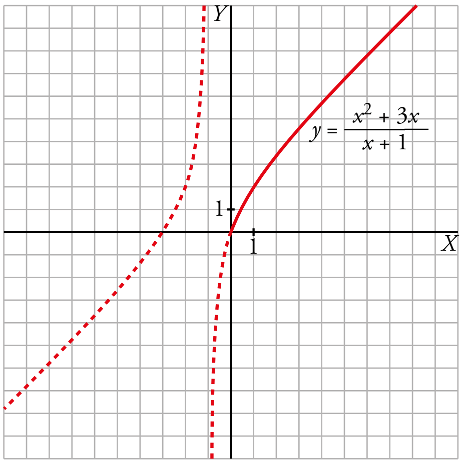
a) $y = \dfrac{x^2+3x}{|x|+1}$ **b)** $y = |x-5|x$

c) $y = x - |x-3| + |x+1|$ **d)** $y = \sqrt{|x^2-1|}$

a) El único valor absoluto que interviene es $|x|$. La abscisa en donde cambia de signo x es 0. Por tanto:

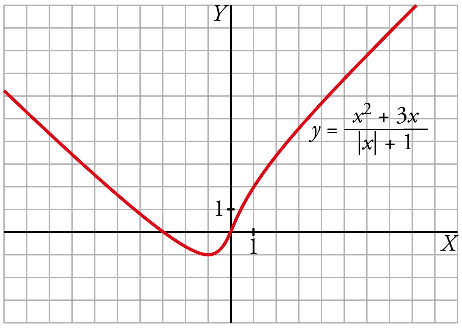
$x < 0,\ |x| = -x \ \to\ y = \dfrac{x^2+3x}{-x+1}$ $x \ge 0,\ |x| = x \ \to\ y = \dfrac{x^2+3x}{x+1}$





Representamos, pues, esta función:

$$y = \frac{x^2+3x}{|x|+1} = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x}{-x+1} & \text{si } x < 0 \\[2mm] \dfrac{x^2+3x}{x+1} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

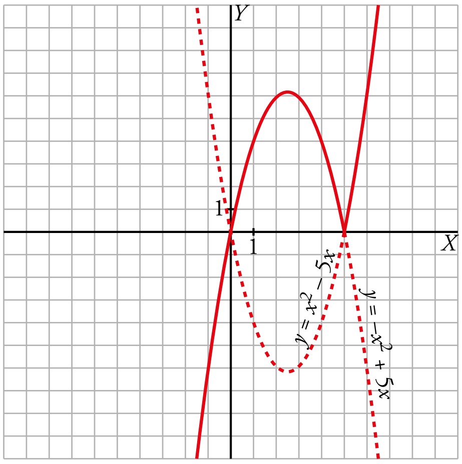


b) El único valor absoluto que interviene es $|x-5|$. La abscisa donde cambia de signo $x-5$ es 5. Por tanto, analizamos cómo queda la función a la izquierda y a la derecha de 5:

$x < 5 \ \to\ |x-5| = -x+5 \ \to\ y = (-x+5)x = -x^2+5x$

$x \ge 5 \ \to\ |x-5| = x-5 \ \to\ y = (x-5)x = x^2-5x$

$$y = |x-5|x = \begin{cases} -x^2+5x & \text{si } x < 5 \\ x^2-5x & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$$



c) Intervienen dos valores absolutos, $|x+1|$ y $|x-3|$, que cambian de signo en las abscisas $x=-1$ y $x=3$, respectivamente.

Por tanto:

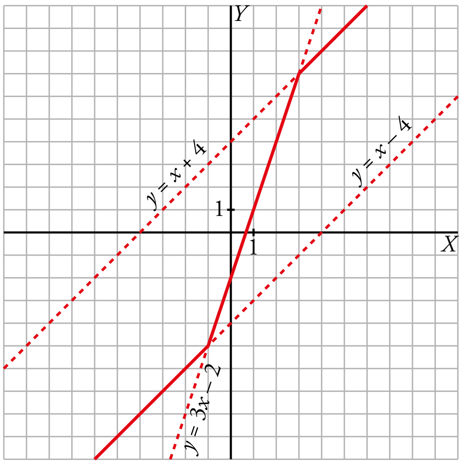
$x<-1$, $|x+1|=-x-1$ y $|x-3|=-x+3 \rightarrow y=x+x-3-x-1=x-4$

$-1 \le x<3$, $|x+1|=x+1$ y $|x-3|=-x+3 \rightarrow y=x+x-3+x+1=3x-2$

$x \ge 3$, $|x+1|=x+1$ y $|x-3|=x-3 \rightarrow y=x-x+3+x+1=x+4$

Representamos, pues, esta función:

$$y=x-|x-3|+|x+1|=\begin{cases} x-4 & \text{si } x<-1 \\ 3x-2 & \text{si } -1 \le x<3 \\ x+4 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$



d) Las abscisas en donde cambia de signo x^2-1 son –1 y 1. Analizamos cómo queda definido el valor absoluto:

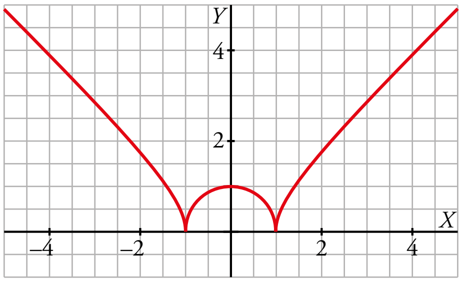
$x<-1 \rightarrow |x^2-1|=x^2-1 \rightarrow y=\sqrt{x^2-1}$

$-1 \le x<1 \rightarrow |x^2-1|=1-x^2 \rightarrow y=\sqrt{1-x^2}$

$x \ge -1 \rightarrow |x^2-1|=x^2-1 \rightarrow y=\sqrt{x^2-1}$

$$y=\sqrt{|x^2-1|}=\begin{cases} \sqrt{x^2-1} & \text{si } x<-1 \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 \le x<1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$$

y la gráfica es:



3 Representación de funciones polinómicas

Página 309

1 Representa estas funciones:

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$ **b)** $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$ **c)** $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

d) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$ **e)** $y = x^3 - 3x$ **f)** $y = (1/4)x^4 - 2x^2$

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

- Simetrías:

  $f(-x) = x^4 - 8x^2 + 7 = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- Ramas infinitas:

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

  $f'(x) = 4x^3 - 16x$

  $$f'(x) = 0 \to 4x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

  Puntos singulares: (0, 7); (–2, –9); (2, –9)

- Cortes con los ejes:

  — Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 7 \to$ Punto: (0, 7)

  — Con el eje $X \to y = 0 \to x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

  $$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \begin{cases} x^2 = 7 \to x = \pm\sqrt{7} \\ x^2 = 1 \to x = \pm 1 \end{cases}$$

  Puntos: $(-\sqrt{7}, 0); (-1, 0); (1, 0); (\sqrt{7}, 0)$

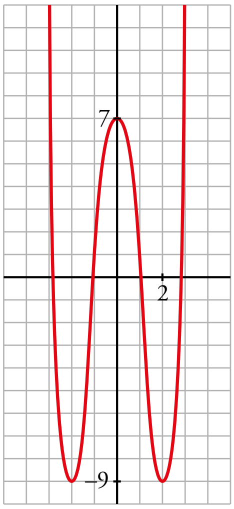
- Puntos de inflexión:

  $f''(x) = 12x^2 - 16$

  $$f''(x) = 0 \to 12x^2 - 16 = 0 \to x^2 = \frac{4}{3} \to x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

  Puntos $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$

- Gráfica:



b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

- Simetrías:

  $f(-x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y, ni respecto al origen de coordenadas.

- Ramas infinitas:

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- Puntos singulares:

  $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$

  $$f'(x) = 0 \;\to\; 12x(x^2 + x - 6) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$$

  Puntos: (0, 0); (2, –64); (–3, –189)

- Cortes con los ejes:

  — Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 0 \to$ Punto: (0, 0)

  — Con el eje $X \to y = 0 \to x^2(3x^2 + 4x - 36) = 0$

  $$\begin{cases} x^2 = 0 \;\to\; x = 0 \\ x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+432}}{6} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{448}}{6} \begin{cases} x \approx 2,86 \\ x \approx -4,19 \end{cases} \end{cases}$$

  Puntos: (0, 0); (2,86; 0); (–4,19; 0)

- Puntos de inflexión:

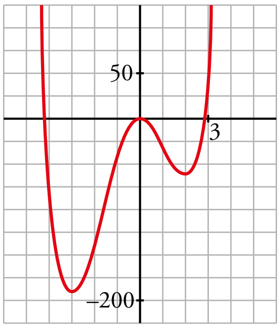
  $f''(x) = 36x^2 + 24x - 72$

  $f''(x) = 0 \;\to\; 12(3x^2 + 2x - 6) = 0$

  $$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+72}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} \begin{cases} x \approx 1,12 \\ x \approx -1,79 \end{cases}$$

  Puntos: (1,12; –34,82) y (–1,79; –107,22)

- Gráfica:



c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

- Simetrías:

  $f(-x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y, ni respecto al origen de coordenadas.

- Ramas infinitas:

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$

$$f'(x) = 0 \to 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 0 \to 4(x-1)(x+1)(x-3) = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Puntos: (1, 7); (–1, –9); (3, –9)

- Cortes con los ejes:

— Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 0 \to$ Punto: (0, 0)

— Con el eje $X \to y = 0 \to x(x^3 - 4x^2 - 2x - 6) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 4x^2 - 2x + 12 = 0 \to (x-2)(x^2 - 2x + 12) = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x \approx 3,65 \\ x \approx -1,65 \end{cases} \end{cases}$$

Puntos: (0, 0); (2, 0); (3,65; 0); (–1,65; 0)

- Puntos de inflexión:

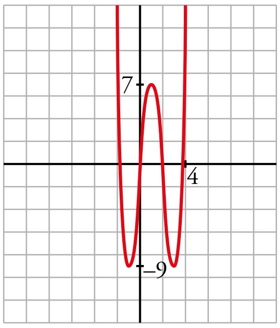
$f''(x) = 12x^2 - 24x - 4$

$f''(x) = 0 \to 4(3x^2 - 6x - 1) = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36+12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} \begin{cases} x \approx 2,15 \\ x \approx -0,15 \end{cases}$$

Puntos: (2,15; –1,83) y (–0,15; –1,74)

- Gráfica:



d) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

- Simetrías:

$f(-x) = 3x^4 + 4x^3 - 16$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y, ni respecto al origen de coordenadas.

- Ramas infninitas:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

$$f'(x) = 0 \to 12x^2(x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Puntos: (0, –16); (1, –17)

- Cortes con los ejes:

  — Con el eje $Y \to x = 0 \to y = -16 \to$ Punto: $(0, -16)$

  — Con el eje $X \to y = 0 \to 3x^4 - 4x^3 - 16 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \end{cases}$

  $3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \to$ tiene una sola raíz, que está entre -2 y -1; pues, si $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8$, $g(-2) = -16 < 0$ y $g(-1) = 3 > 0$.

  Puntos: $(2, 0)$ y $(k, 0)$, con k entre -2 y -1.

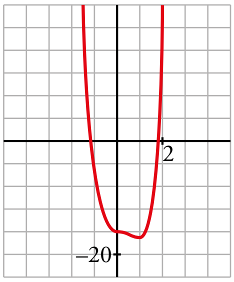
- Puntos de inflexión:

  $f''(x) = 36x^2 - 24x$

  $f''(x) = 0 \to 12x(3x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

  Puntos: $(0, -16)$ y $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-448}{27}\right)$

- Gráfica:



e) $y = x^3 - 3x$

- Simetrías:

  $f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- Ramas infinitas:

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- Puntos singulares:

  $f'(x) = 3x^2 - 3$

  $f'(x) = 0 \to 3(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

  Puntos: $(-1, 2)$; $(1, -2)$

- Cortes con los ejes:

  — Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 0 \to$ Punto: $(0, 0)$

  — Con el eje $X \to y = 0 \to x^3 - 3x = 0 \to x(x^2 - 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$

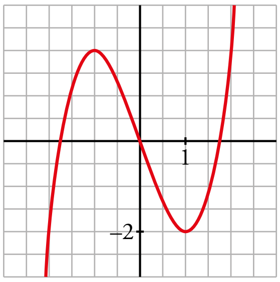
  Puntos: $(0, 0)$; $(-\sqrt{3}, 0)$; $(\sqrt{3}, 0)$

- Puntos de inflexión:

  $f''(x) = 6x$

  $f''(x) = 0 \to 6x = 0 \to x = 0 \to$ Punto $(0, 0)$

- Gráfica:



f) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

- Simetrías:

$f(-x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje *Y*.

- Ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- Puntos singulares:

$f'(x) = x^3 - 4x$

$$f'(x) = 0 \to x(x^2-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Puntos: (0, 0); (–2, –4); (2, –4)

- Cortes con los ejes:

— Con el eje *Y* → $x = 0 \to y = 0$ → Punto: (0, 0)

— Con el eje *X* → $y = 0 \to x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 8 \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$

Puntos: (0, 0); $(-2\sqrt{2}, 0)$; $(2\sqrt{2}, 0)$

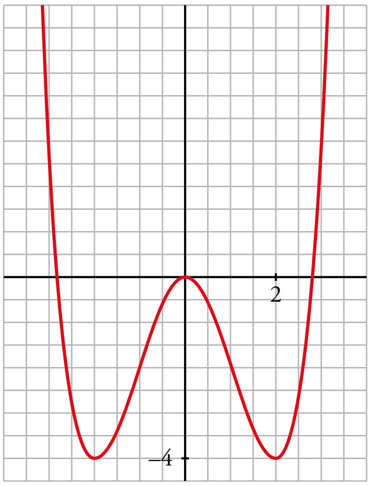
- Puntos de inflexión:

$f''(x) = 3x^2 - 4$

$$f''(x) = 0 \to 3x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Puntos: $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right); \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$

- Gráfica:



4 Representación de funciones racionales

Página 311

1 **Representa:**

a) $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-4}$ **c)** $y = \dfrac{x^2-2x-8}{x}$ **d)** $y = \dfrac{x^3+2x}{x^2+1}$

a) $y = \dfrac{x^3}{1-x^2} = -x + \dfrac{x}{1-x^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- Simetrías:

  $f(-x) = \dfrac{-x^3}{1-x^2} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- Asíntotas verticales:

  $$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ &\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{aligned}\right\} \text{ Asíntota vertical en } x = -1.$$

  $$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ &\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \end{aligned}\right\} \text{ Asíntota vertical en } x = 1.$$

- Asíntota oblicua:

  $\dfrac{x^3}{1-x^2} = -x + \dfrac{x}{1-x^2} \rightarrow y = -x$ es asíntota oblicua.

  Posición de la curva respecto a la asíntota:

  $f(x) - (-x) > 0$ si $x \to -\infty$ (curva por encima)

  $f(x) - (-x) < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- Puntos singulares:

  $$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1-x^2)^2}$$

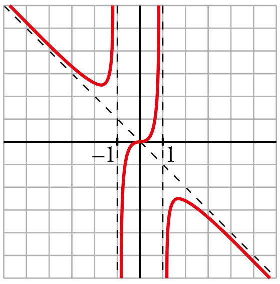
  $$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(-x^2+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

  Puntos: (0, 0); $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

- Cortes con los ejes:

  Corta a los ejes en (0, 0).

- Gráfica:



b) $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-4}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- Simetrías:

$f(-x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-4} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 2.$$

- Asíntota horizontal:

$\dfrac{x^2-9}{x^2-4} = 1 - \dfrac{5}{x^2-4} \;\to\; y = 1$ es asíntota horizontal.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - 1 < 0$ si $x \to -\infty$ (curva por debajo)

$f(x) - 1 < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2-9)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x(x^2-4-x^2+9)}{(x^2-4)^2} = \frac{10x}{(x^2-4)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; 10x = 0 \;\to\; x = 0 \;\to$ Punto: $\left(0, \dfrac{9}{4}\right)$

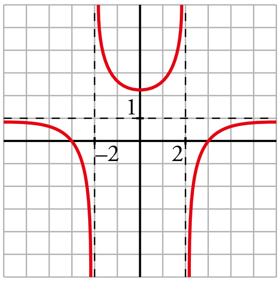
- Cortes con los ejes:

— Con el eje $Y \to x = 0 \to y = \dfrac{9}{4} \to$ Punto: $\left(0, \dfrac{9}{4}\right)$

— Con el eje $X \to y = 0 \to x^2 - 9 = 0 \;\begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Puntos: (–3, 0) y (3, 0)

- Gráfica:



c) $y = \dfrac{x^2-2x-8}{x} = x - 2 - \dfrac{8}{x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

- Simetrías:

$f(-x) = \dfrac{x^2+2x-8}{-x}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y, ni respecto al origen.

- Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \text{ Asíntota vertical en } x = 0.$$

- Asíntota oblicua:

$$\frac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \frac{8}{x} \;\to\; y = x - 2 \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (x - 2) > 0$ si $x \to -\infty$ (curva por encima)

$f(x) - (x - 2) < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- Puntos singulares:

$f'(x) = 1 + \dfrac{8}{x^2} > 0$ para todo x del dominio.

La función es creciente en todo su dominio. No tiene puntos singulares.

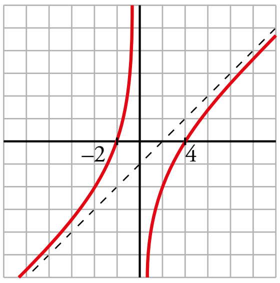
- Cortes con los ejes:

— Con el eje $X \to y = 0 \to x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$

Puntos: (–2, 0) y (4, 0)

— No corta al eje Y, pues no está definida en $x = 0$.

- Gráfica:



d) $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$. *Dominio* = ℝ

- Simetrías:

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 2x}{x^2 + 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- No tiene asíntotas verticales.

- Asíntota oblicua:

$$\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \frac{x}{x^2 + 1} \;\to\; y = x \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - x < 0$ si $x \to -\infty$ (curva por debajo)

$f(x) - x > 0$ si $x \to +\infty$ (curva por encima)

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2)(x^2+1)-(x^3+2x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2+2x^2+2-2x^4-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x^4+x^2+2=0 \;\to\; x^2 = \frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2} \;\to\; \text{No tiene solución.}$$

No hay puntos singulares.

- Cortes con los ejes:

— Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 0 \to$ Punto: (0, 0)

— Con el eje $X \to y = 0 \to x^3 + 2x = 0 \to x(x^2+2) = 0 \to x = 0 \to$ Punto: (0, 0)

- Puntos de inflexión:

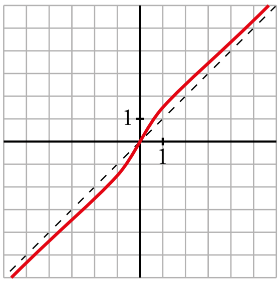
$$f''(x) = \frac{(4x^3+2x)(x^2+1)^2-(x^4+x^2+2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3+2x)(x^2+1)-4x(x^4+x^2+2)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Puntos: (0, 0); $\left(-\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$; $\left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$

- Gráfica:



5 Representación de otros tipos de funciones

Página 314

1 Representa:

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 9}$

c) $y = ln\,(x^2 + 4)$ **d)** $y = ln\,(x^2 - 1)$

e) $y = \dfrac{ln\,x}{x}$ **f)** $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

g) $y = \dfrac{e^{-x}}{-x}$ **h)** $y = x^3\,e^x$

i) $y = \dfrac{1}{2}cos\,2x + cos\,x$ **j)** $y = \dfrac{1}{ln\,x}$

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

- Dominio: $x^2 + 2x = 0 \;\to\; x(x+2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

  Dominio $= (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

- Simetrías:

  $f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

- No tiene asíntotas verticales.

- Asíntotas oblicuas:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 2x} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \frac{-2}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$y = -x - 1$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$y = x + 1$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; x + 1 = 0 \;\to\; x = -1$

Como no pertence al dominio de $f(x)$, no hay puntos singulares.

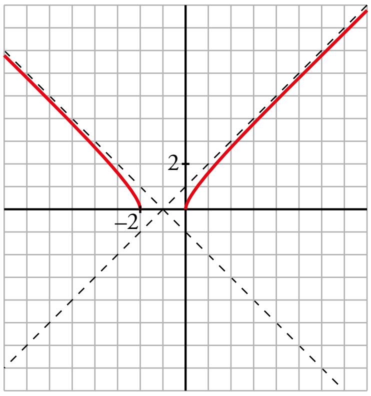
- Cortes con los ejes:

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 + 2x} \rightarrow x^2 + 2x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Puntos: (0, 0) y (–2, 0)

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: (0, 0)

- Gráfica:



b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

- Dominio: $x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Dominio = $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

- Simetrías:

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 9}$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas oblicuas:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to -\infty} [\sqrt{x^2 - 9} + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0$$

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{\sqrt{x^2 - 9} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0$$

$y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

- Puntos singulares:

  $$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$$

  $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

  Como no pertence al dominio de $f(x)$, no hay puntos singulares.

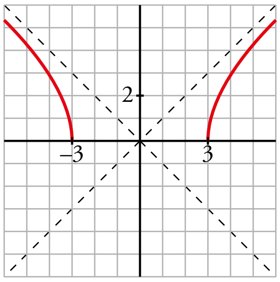
- Cortes con los ejes:

  — Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2-9} \rightarrow x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

  Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$

  — No corta al eje Y, pues no existe $f(0)$.

- Gráfica:



c) $y = ln(x^2 + 4)$

- Dominio:

  Como $x^2 + 4 > 0$ para todo x, $Dominio = \mathbb{R}$.

- Simetrías:

  $f(-x) = ln(x^2+4) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.

- No tiene asíntotas verticales.

- Ramas infinitas:

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x^2+4)}{x} \overset{\mathbf{H}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+4}}{1} = 0$$

  Por tanto, no tiene asíntotas de ningún tipo.

  Tiene ramas parabólicas.

- Puntos singulares:

  $$f'(x) = \frac{2x}{x^2+4}$$

  $f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, ln\ 4)$

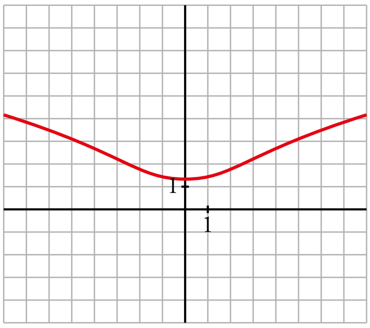
- Puntos de inflexión:

  $$f''(x) = \frac{2(x^2+4) - 2x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^2 + 8 - 4x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{8 - 2x^2}{(x^2+4)^2}$$

  $f''(x) = 0 \rightarrow 8 - 2x^2 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

  Puntos: $(-2, ln\ 8)$ y $(2, ln\ 8)$

- Gráfica:



d) $y = ln(x^2 - 1)$

- Dominio: $x^2 - 1 > 0 \rightarrow Dominio = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Simetrías: $f(-x) = ln(x^2 - 1) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y.
- Asíntotas verticales:

  $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x^2 - 1)}{x} \overset{\mathbf{H}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}}{1} = 0$$

  Tiene ramas parabólicas.

- Puntos singulares:

  $$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

  $f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

  No tiene puntos singulares, pues la función no está definida en $x = 0$.

- Puntos de inflexión:

  $$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

  No tiene puntos de inflexión.

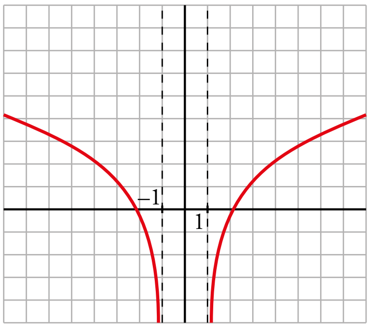
- Puntos de corte con los ejes:

  — Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow ln(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1$

  $$x^2 = 2 \left\langle \begin{matrix} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{matrix} \right\} \text{ Puntos: } (-\sqrt{2}, 0) \text{ y } (\sqrt{2}, 0)$$

  — No corta al eje Y, pues no existe $f(0)$.

- Gráfica:



e) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

- Dominio: Su dominio de definición es el intervalo $(0, +\infty)$.
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \to \text{Tiene una asíntota vertical en } x = 0.$$

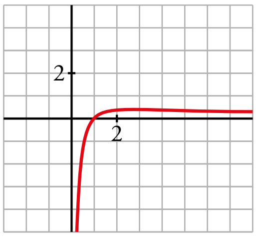
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \to \text{La recta } y = 0 \text{ es una asíntota horizontal cuando } x \to +\infty.$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \to 1 - \ln x = 0 \to x = e \to f(e) = \frac{1}{e}. \text{ Tiene un punto singular: } \left(e, \frac{1}{e}\right)$$

- Gráfica:



f) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- No es simétrica.
- Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 0$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Además, $f(x) > 0$ para todo x del dominio.

$y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

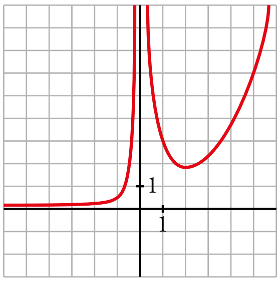
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty. \text{ Rama parabólica.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot e^x (x - 2)}{x^4} = \frac{e^x (x - 2)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \to x = 2 \to \text{Punto } \left(2, \frac{e^2}{4}\right)$$

- Gráfica:



g) $y = \dfrac{e^{-x}}{-x}$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- No es simétrica.
- Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{ Asíntota vertical en } x = 0$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$. Rama parabólica.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. $f(x) < 0$ para todo x positivo.

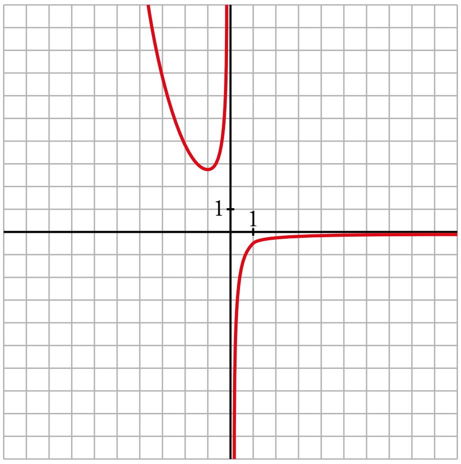
$y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot (-x) - e^{-x} \cdot (-1)}{(-x)^2} = \frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow$ Punto: $(-1, -e)$

- Gráfica:



h) $y = x^3 e^x$

- Su dominio de definición es $\mathbb{R}$.
- Ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \cdot e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 \cdot e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^x = +\infty$

La función tiene una rapa parabólica de crecimiento cada vez más rápido cuando $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 \cdot e^x = 0 \rightarrow$ La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

- Puntos singulares:

$f'(x) = (3x^2 + x^3)\, e^x$

$f'(x) = 0 \rightarrow (3x^2 + x^3)\, e^x = 0 \rightarrow x = -3,\ x = 0$

$f''(x) = (x^3 + 6x^2 + 6x)\, e^x$

$f''(-3) = (-27 + 54 - 18)e^{-3} = 9e^{-3} \rightarrow x = -3$ es un mínimo relativo.

$f(-3) = -27e^{-3} \approx -1{,}34$

$f''(0) = 0 \rightarrow x = 0$ es un punto de inflexión ya que la derivada segunda cambia de signo al pasar por él.

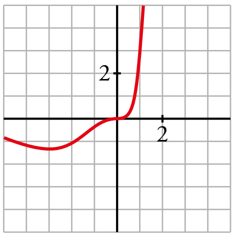
$f(0) = 0$

Los otros dos puntos de inflexión son: $x_1 = -3 + \sqrt{3}$ y $x_2 = -3 - \sqrt{3}$.

$f(x_1) = -0{,}57$

$f(x_2) = -0{,}93$

- Gráfica:



i) $y = \frac{1}{2}\cos 2x + \cos x$

- El período de $\cos x$ es 2π y el de $\cos 2x$ es π. Por tanto, la función es periódica de período 2π. La estudiamos solo en este intervalo.
- Es derivable en todo $\mathbb{R}$ (es suma de funciones derivables).
- Puntos singulares:

$f'(x) = -\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x = -2\operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x(2\cos x + 1)$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -\operatorname{sen} x(2\cos x + 1) = 0 \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\operatorname{sen} x = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto: } \left(0, \frac{3}{2}\right) \\ x = \pi \rightarrow \text{Punto: } \left(\pi, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \text{Punto: } \left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{3}{4}\right) \\ x = \frac{4\pi}{3} \rightarrow \text{Punto: } \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

- Puntos de corte con los ejes:

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{3}{2} \rightarrow$ Punto: $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \cos 2x + 2\cos x = 0$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 2\cos x = 0$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 2\cos x = 0$$

$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 2\cos x = 0$$

$$2\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{4} \begin{cases} \cos x = 0{,}366 \\ \cos x = -1{,}366 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$\cos x = 0{,}366 \begin{cases} x = 1{,}2 \\ x = 5{,}09 \end{cases} \text{Puntos: } (1{,}2;\ 0);\ (5{,}09;\ 0)$$

- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = -2\cos 2x - \cos x$$

$$f''(x) = 0 \;\to\; -2\cos 2x - \cos x = 0$$

$$-2\,(\cos^2 x - \text{sen}^2\, x) - \cos x = 0$$

$$-2\cos^2 x + 2\text{sen}^2\, x - \cos x = 0$$

$$-2\cos^2 x + 2\,(1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$$

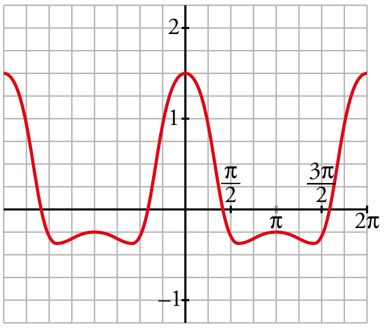
$$-2\cos^2 x + 2 - 2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$-4\cos^2 x - \cos x + 2 = 0$$

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{-8} \left\langle \begin{array}{l} \cos x = -0{,}843 \;\to\; x_1 = 2{,}57,\;\; x_2 = 3{,}71 \\ \cos x = 0{,}593 \;\to\; x_3 = 0{,}94,\;\; x_4 = 5{,}35 \end{array} \right.$$

Puntos: (2,57; –0,63); (3,71; –0,63); (0,94; 0,44); (5,35; 0,45)

- Gráfica:



j) $y = \dfrac{1}{\ln x}$

- Su dominio de definición es $(0, +\infty) - \{1\}$ para que se pueda evaluar el logaritmo y no se produzca una división entre 0.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \;\to\; \text{La recta } y = 0 \text{ es una asíntota horizontal cuando } x \to +\infty.$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0, \text{ ya que } \ln x \to -\infty \text{ cuando } x \to 0^+.$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty \;\to\; \text{La recta } x = 1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

- Puntos singulares:

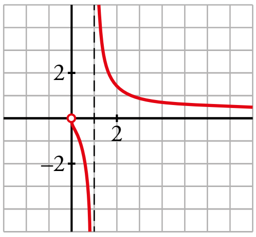
$$f'(x) = \frac{-1/x}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x\,\ln^2 x} \;\to\; \text{No tiene puntos singulares ya que la derivada no se anula nunca.}$$

La función decrece en los intervalos (0, 1) y $(1, +\infty)$ ya que $x \cdot \ln^2 x$ siempre es positivo en ambos.

$$f''(x) = \frac{\ln x + 2}{x^2 \cdot \ln^3 x} \;\to\; f''(x) = 0 \text{ si } \ln x + 2 = 0 \;\to\; x = e^{-2}$$

La función tiene un punto de inflexión en $\left(e^{-2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

- Gráfica:



Ejercicios y problemas resueltos

Página 315

1. Del estudio a la gráfica (asíntotas horizontales y verticales)

Hazlo tú. Representa $y = f(x)$:

$Dom\, f = \mathbb{R} - \{-2\}$; f es derivable en todo su dominio.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1^+$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -1^+$ $\quad \lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

$f(0) = 0$; $f(7) = 0$ $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$; $f(4) = 2$; $f''(4) < 0$

I) Por ser derivable en su dominio, es continua en él y no tiene puntos angulosos.

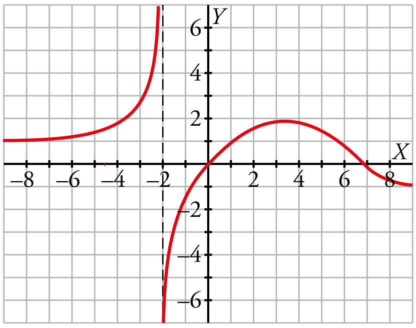
II) En $x = -2$ la función tiene una asíntota vertical y las tendencias nos dicen cómo se acerca a ella.

La recta $y = 1$ es la asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ y se acerca a ella por encima.

Análogamente, la recta $y = -1$ es la asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y también se acerca por encima.

III) Corta al eje horizontal en los puntos (0, 0) y (7, 0).

El único extremo relativo está en el punto (4, 2) y, además, es un máximo.



2. Del estudio a la gráfica (simetrías y asíntotas oblicuas y verticales)

Hazlo tú. Representa $y = f(x)$:

$Dom\, f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$; función impar.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$ $\quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (-1) \cdot x] = -1^+$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$f(3) = 0$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $f(0) = 0$

I) Por ser derivable en su dominio, es continua en él y no tiene puntos angulosos.

II) Por ser impar, es simétrica respecto del origen de coordenadas.

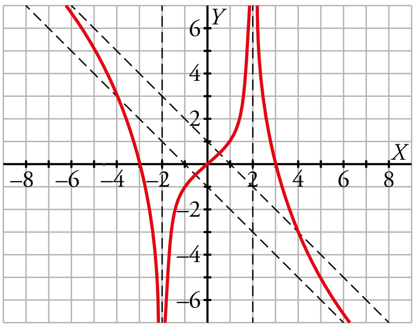
La recta $x = 2$ es una asíntota vertical y, por simetría, también lo es la recta $x = -2$.

Las tendencias en esta última asíntota se obtienen por simetría de las primeras.

Por otra parte, la recta $y = -x - 1$ es la asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$. De nuevo, por simetría, la recta $y = -x + 1$ es la asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

III) Corta al eje horizontal en los puntos (3, 0), (0, 0) y (–3, 0), siendo este último por simetría.

Finalmente, el punto (0, 0) es el único punto de tangente horizontal y, por las características de la curva, es un punto de inflexión.



Página 316

3. Representación de una función racional con asíntotas oblicuas

Hazlo tú. Representa la siguiente función: $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2(x-1)}$

- El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.
- Ramas infinitas:

$\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} = 1 \to$ La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$. Lo mismo ocurre cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} = -\infty; \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} = +\infty$$

$\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} = +\infty$ ya que, al estar $x - 2$ elevado al cuadrado, el signo del cociente no cambia al pasar de un lado al otro de 2 en sus proximidades.

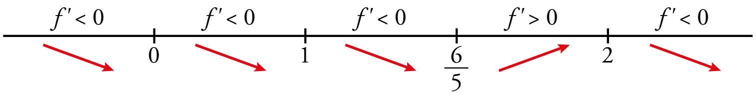
Las rectas $x = 1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)}\right)' = \frac{3x^2(x-2)^2(x-1) - x^3[2(x-2)(x-1) + (x-2)^2]}{(x-2)^4(x-1)^2} =$$

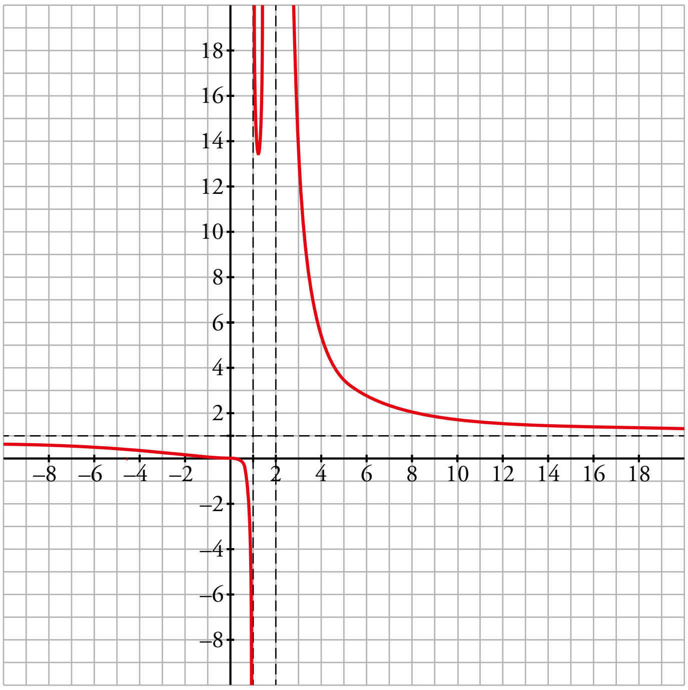
$$= \frac{3x^2(x-2)(x-1) - x^3[2(x-1) + (x-2)]}{(x-2)^3(x-1)^2} = \frac{-5x^3 + 6x^2}{(x-2)^3(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \to -5x^3 + 6x^2 = 0 \to x = 0, \; x = \frac{6}{5}$$



$f(0) = 0$

$$f\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{\left(\frac{6}{5}\right)^3}{\left(\frac{6}{5} - 2\right)^2\left(\frac{6}{5} - 1\right)} = \frac{27}{2}$$



4. Representación de una función racional con ramas parabólicas

Hazlo tú. Estudia el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y los mínimos para representar esta función:

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

- El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1\}$.
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$

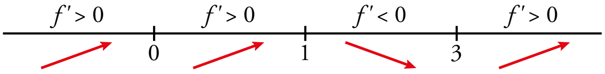
ya que, al estar $x - 1$ elevado al cuadrado, el signo del cociente siempre es positivo en las proximidades de 1. Luego, la recta $x = 1$ es la asíntota vertical de la función:

$y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$ → La recta $y = x + 2$ es la asíntota oblicua de la función.

- Puntos singulares:

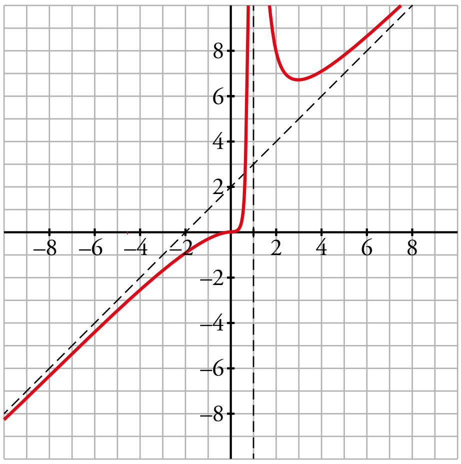
$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x^3 - 3x^2 = 0 \;\to\; x = 0,\; x = 3$$



$f(0) = 0$

$f(3) = \dfrac{27}{4}$



Página 317

5. Función con valor absoluto

Hazlo tú. Representa la siguiente función:

$$y = |x| - |x-3| + |x+1|$$

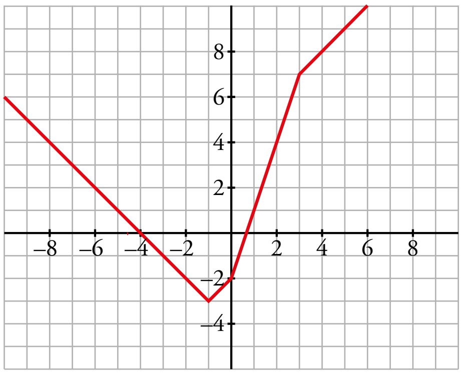
$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

$$-|x-3| = \begin{cases} -[-(x-3)] & \text{si } x < 3 \\ -(x-3) & \text{si } x \ge 3 \end{cases} = \begin{cases} x-3 & \text{si } x < 3 \\ -x+3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} -(x+1) & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } x \ge -1 \end{cases} = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta los puntos donde cambia de signo cada sumando, sumamos las expresiones y se obtiene:

$$y = |x| - |x-3| + |x+1| = \begin{cases} -x + x - 3 - x - 1 & \text{si } x < -1 \\ -x + x - 3 + x + 1 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ x + x - 3 + x + 1 & \text{si } 0 \le x < 3 \\ x - x + 3 + x + 1 & \text{si } x \ge 3 \end{cases} = \begin{cases} -x - 4 & \text{si } x < -1 \\ x - 2 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x - 2 & \text{si } 0 \le x < 3 \\ x + 4 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$



6. Función logarítmica

Hazlo tú. **Representa la siguiente función sabiendo que tiene un único máximo en $x = 0$:**

$$y = \begin{cases} \dfrac{ln(x^2+1)}{x^2}, & x \ne 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

- El dominio de definición es $\mathbb{R}$. La función tiene simetría par ya que $f(-x) = f(x)$. Por tanto, basta estudiarla para valores positivos de x.

- Ramas infinitas:

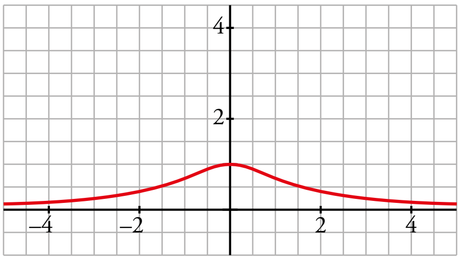
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln\,(x^2+1)}{x^2} = 0$$

La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$. La función está siempre por encima de la asíntota ya que toma valores positivos.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{ln\,(x^2+1)}{x^2} = \frac{0}{0} \to \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{2x} = 1$$

Puesto que $f(0) = 1$, la función es continua en $\mathbb{R}$.

La gráfica de la función es:



Página 318

7. Estudio y gráfica de otras funciones

Hazlo tú. Representa las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x}{\ln x^2}$ **b)** $y = \dfrac{2x+1}{e^{-x}}$

a) - Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

- Tiene simetría impar ya que $f(-x) = -f(x)$. Por tanto, la estudiamos solo para valores positivos de x.
- Ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\ln x^2} = 0 \to$ En $x = 0$ tiene una discontinuidad evitable.

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{\ln x^2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{\ln x^2} = +\infty \to$ La recta $x = 1$ es una asíntota vertical. Por simetría, la recta $x = -1$ también lo es.

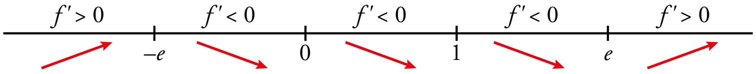
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} \to \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x/x^2} = +\infty$$

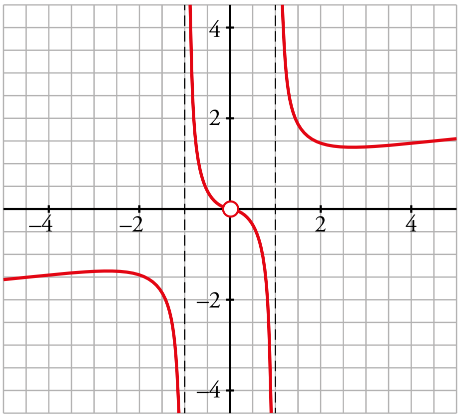
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{x}{\ln x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\ln x^2} = 0 \to$ Tiene una rama parabólica.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x^2}\right)' = \frac{\ln x^2 - 2}{\ln^2(x^2)} \to \ln x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{e^2} = \pm e$$

$$f(e) = \frac{e}{2},\ f(-e) = -\frac{e}{2}$$





b) - Su dominio de definición es $\mathbb{R}$. No tiene asíntotas verticales.

- Ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{e^{-x}} = +\infty$, ya que $e^{-x} \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{2x+1}{e^{-x}}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{xe^{-x}} = +\infty \to$ Tiene una rama parabólica.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{e^{-x}} = 0 \to$ La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

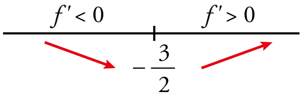
La función corta al eje horizontal en $x = -\dfrac{1}{2}$.

Si $x < -\dfrac{1}{2}$, la función toma valores negativos y está por debajo de la asíntota.

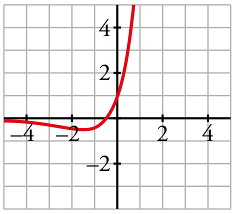
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2e^{-x} - (2x+1)(-e^{-x})}{(e^{-x})^2} = \frac{3+2x}{e^{-x}}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -\frac{3}{2}$$



$$f\left(-\frac{3}{2}\right) \approx -0{,}45$$



Página 319

8. Funciones trigonométricas

Hazlo tú. Representa las siguientes funciones:

a) $y = 2sen\, x + cos\, 2x$ **b)** $y = \dfrac{1}{cos\, \pi x}$

a) • Su dominio de definición es $\mathbb{R}$. Es periódica de período 2π.

- No tiene asíntotas.
- Cortes con los ejes:

$x = 0,\ y = 1 \;\rightarrow\; (0,\ 1)$

$y = 0 \;\rightarrow\; 2sen\, x + cos\, 2x = 0 \;\rightarrow\; 2sen\, x + cos^2 x - sen^2 x = 0 \;\rightarrow\; 2sen\, x + 1 - sen^2 x - sen^2 x = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; sen\, x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = arc\ sen\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi \approx -0{,}37 + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ x \approx \pi + 0{,}37 + 2k\pi \approx 3{,}51 + 2k\pi\,, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- Puntos singulares:

$y' = 2cos\, x - 2sen\, 2x$

$y' = 0 \;\rightarrow\; cos\, x - sen\, 2x = 0 \;\rightarrow\; cos\, x - 2sen\, x\, cos\, x = 0 \;\rightarrow\; cos\, x(1 - 2sen\, x) = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} cos\, x = 0 \\ sen\, x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

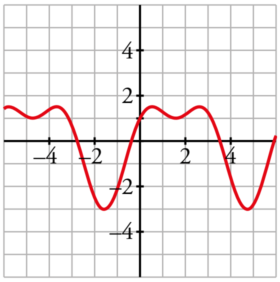
$y'' = -2sen\, x - 4cos\, 2x$

$x = \dfrac{\pi}{6} \;\rightarrow\; y'' = -2sen\, \dfrac{\pi}{6} - 4cos\, \dfrac{\pi}{3} = -3 < 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{6}$ es un máximo relativo.

$x = \dfrac{\pi}{2} \;\rightarrow\; y'' = -2sen\, \dfrac{\pi}{2} - 4cos\, \pi = 2 > 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2}$ es un mínimo relativo.

$x = \dfrac{5\pi}{6} \;\rightarrow\; y'' = -2sen\, \dfrac{5\pi}{6} - 4cos\, \dfrac{5\pi}{3} = -3 < 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{5\pi}{6}$ es un máximo relativo.

$x = \dfrac{3\pi}{2} \;\rightarrow\; y'' = -2sen\, \dfrac{3\pi}{2} - 4cos\, 3\pi = 6 > 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{3\pi}{2}$ es un mínimo relativo.



$x = \frac{\pi}{6},\ y = 2sen\,\frac{\pi}{6} + cos\,\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$

$x = \frac{\pi}{2},\ y = 2sen\,\frac{\pi}{2} + cos\,\pi = 1 \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

$x = \frac{5\pi}{6},\ y = 2sen\,\frac{5\pi}{6} + cos\,\frac{5\pi}{3} = \frac{3}{2} \rightarrow \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$

$x = \frac{3\pi}{2},\ y = 2sen\,\frac{3\pi}{2} + cos\,3\pi = -3 \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}, -3\right)$

b) • Como el coseno se anula en $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$, el dominio de definición es $\mathbb{R} - \left\{\frac{2k+1}{2}\right\}$.

Es una función par ya que el coseno lo es. Es periódica de período 2.

- Asíntotas verticales: $x = \frac{2k+1}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Estudiamos los casos $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{3}{2}$ y los demás casos se deducen de la periodicidad de la función.

$$\lim_{x \to (1/2)^+} \frac{1}{cos\,\pi x} = -\infty, \quad \lim_{x \to (1/2)^-} \frac{1}{cos\,\pi x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to (3/2)^+} \frac{1}{cos\,\pi x} = +\infty, \quad \lim_{x \to (3/2)^-} \frac{1}{cos\,\pi x} = -\infty$$

- Puntos singulares:

$y' = \frac{\pi \cdot sen\,\pi x}{cos^2\,\pi x}$, $y' = 0 \rightarrow sen\,\pi x = 0 \rightarrow x = k,\ k \in \mathbb{Z}$

$$y'' = \frac{\pi^2 \cdot cos\,\pi x \cdot cos^2 \cdot \pi x + 2\pi^2 \cdot sen\,\pi x \cdot cos\,\pi x \cdot sen\,\pi x}{cos^4\,\pi x} = \frac{\pi^2 \cdot cos^2\,\pi x + 2\pi^2 \cdot sen^2\,\pi x}{cos^3\,\pi x}$$

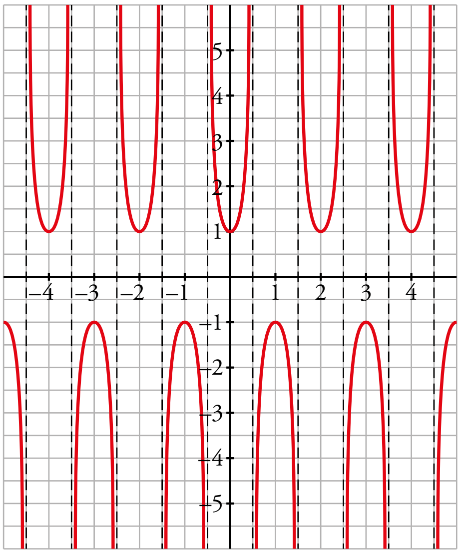
$x = 0 \rightarrow y'' = \frac{\pi^2 \cdot cos^2\,0 + 2\pi^2 \cdot sen^2\,0}{cos^3\,0} = \pi^2 > 0 \rightarrow x = 0$ es un mínimo relativo.

$x = 1 \rightarrow y'' = \frac{\pi^2 \cdot cos^2\,\pi + 2\pi^2 \cdot sen^2\,\pi}{cos^3\,\pi} = -\pi^2 < 0 \rightarrow x = 1$ es un máximo relativo.

$x = 0,\ y = 1 \rightarrow (0, 1)$

$x = 1,\ y = -1 \rightarrow (1, -1)$

Los demás casos se obtienen por periodicidad.

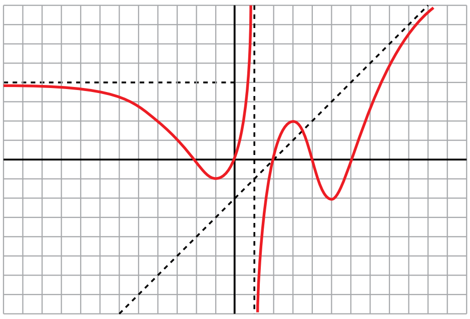


Ejercicios y problemas guiados

Página 320

1. Descripción de una gráfica

Describir la siguiente gráfica dando los elementos necesarios para que un compañero la pueda representar a partir de la descripción.



- El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1\}$. Es derivable en su dominio puesto que no presenta puntos angulosos.
- La recta $y = 4$ es la asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ ya que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$. Se acerca por debajo de la asíntota.

  La recta $x = 1$ es la asíntota vertical de la función. La posición respecto de la asíntota es:

  $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

  $$\lim_{x \to 1^+} = -\infty$$

  La recta $y = x - 2$ es la asíntota oblicua de la función cuando $x \to +\infty$. La curva corta a la asíntota oblicua en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = \frac{7}{2}$. Después se acerca por debajo de la asíntota.
- Los puntos $(-1, -1)$ y $(5, -2)$ son mínimos relativos de la función.

  Solo tiene un máximo relativo, que se encuentra en el punto $(3, 2)$.
- Finalmente, la función corta a los ejes coordenados en los puntos: $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$ y $(6, 0)$.

2. Representación de una función logarítmica con valor absoluto

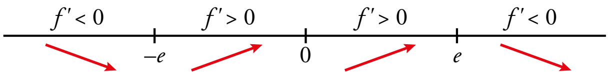
Representar la siguiente función:

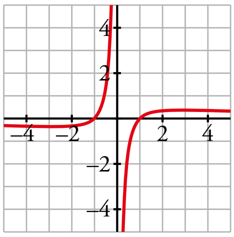
$$y = \frac{\ln|x|}{x}$$

- El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0\}$.

  La función tiene simetría impar, ya que $f(-x) = \dfrac{\ln|-x|}{-x} = -f(x)$. Basta estudiarla para valores positivos de x.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln|x|}{x} = -\infty \to$ La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln|x|}{x} = 0 \to$ La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal de la función cuando $x \to \pm\infty$.
- $f'(x) = \left(\dfrac{\ln|x|}{x}\right)' = \begin{cases} \dfrac{1 - \ln x}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1 - \ln(-x)}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \to y' = 0 \to x = \pm e$





$x = e,\ y = \frac{1}{e} \to \left(e, \frac{1}{e}\right)$ es un máximo relativo y,

por simetría, $\left(-e, -\frac{1}{e}\right)$ es un mínimo relativo.

3. Curva con asíntotas

Representar la siguiente función: $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{|x|}$

- El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0\}$.

  La función tiene simetría par ya que $f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^4 + 1}}{|-x|} = f(x)$. Basta estudiarla para valores positivos de x.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^4+1}}{|x|} = +\infty \to$ La recta $x = 0$ es la asíntota vertical de la función.

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{|x|} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}} = +\infty$$

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^4+1}}{|x|}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}} = 1$$

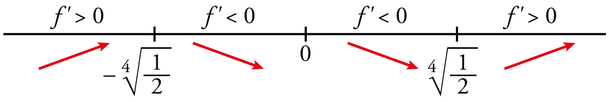
  $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4+1}}{|x|} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 + 1 - x^4}{x(\sqrt{x^4+1} + x^2)} = 0$$

  La recta $y = x$ es la asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$.

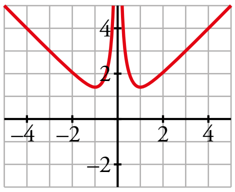
- $$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x^4+1}}{x}\right)' = \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}} \cdot x - \sqrt{x^4+1}}{x^2} = \frac{2x^4 - (x^4+1)}{x^2\sqrt{x^4+1}} = \frac{2x^4 - 1}{x^2\sqrt{x^4+1}}$$

  $f'(x) = 0 \to x^4 = \frac{1}{2} \to x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \approx 0{,}84$

  (Hemos calculado la derivada suponiendo que x toma valores positivos).



$x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}},\ y = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + 1}}{\sqrt[4]{\frac{1}{2}}} \approx 1{,}46 \to \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}; 1{,}46\right)$ es un mínimo relativo de la función.



4. Casi la misma función

Representar la siguiente función: $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x}$

El estudio de esta función es idéntico al anterior, con la salvedad de que la función es impar, ya que $f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^4 + 1}}{-x} = -f(x)$.

Ejercicios y problemas propuestos

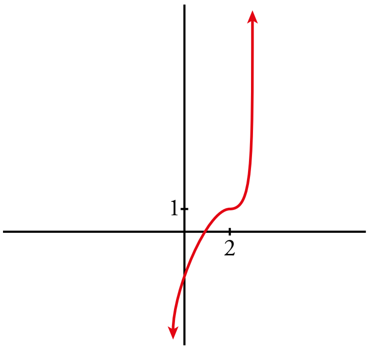
Página 321

Para practicar

Descripción de una gráfica

1 **Representa una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ tal que:**

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $f(2) = 1,\ f'(x) \geq 0$ para cualquier x, $f'(2) = 0$



2 **De una función $y = f(x)$ tenemos la siguiente información:**

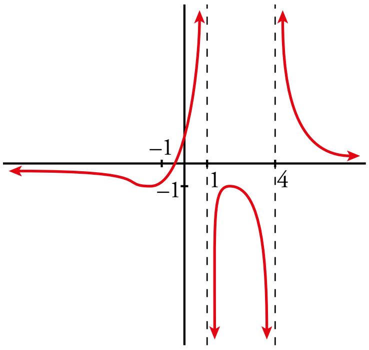
$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ si $x \to +\infty,\ f(x) > 0$ si $x \to -\infty,\ f(x) < 0$

$f'(2) = 0,\ f(2) = -1;\ f'(-1) = 0,\ f(-1) = -1$

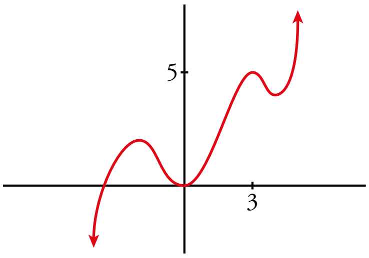
Represéntala.



3 **Dibuja la gráfica de una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ de la que se conocen los siguientes datos:**

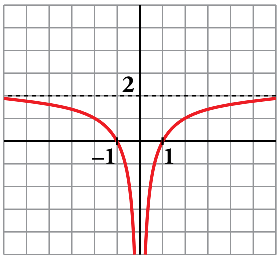
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 0$ si $x = -2,\ x = 0,\ x = 3,\ x = 4$ $f(-2) = 2;\ f(0) = 0;\ f(3) = 5;\ f(4) = 4$

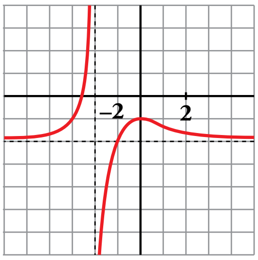


4 **Describe las siguientes funciones indicando su dominio, sus simetrías (si las tienen), sus asíntotas y ramas infinitas, sus puntos singulares y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Hazlo dando valores de la función, de su derivada y de ciertos límites.**

a)

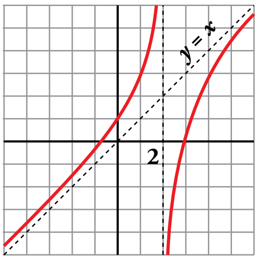


b)



c)

d)



a) • Asíntota horizontal: $y = 2$.

Asíntota vertical: $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

(si $x \to -\infty$, $f(2) < 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2$)

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

- $f(x)$ no tiene puntos singulares.
- Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$

b) • Asíntota horizontal: $y = -2$.

Asíntota vertical: $x = -2$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

(si $x \to -\infty$, $f(2) > -2$; si $x \to +\infty$, $f(x) > -2$)

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

- Puntos singulares:

$f'(0) = 0$; $f(0) = -1$. Máximo en $(0, -1)$.

- Creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

c) • Asíntota horizontal: si $x \to +\infty$, $y = 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

- Punto singulares:

$f'(0) = 0$; $f(0) = 0$. Mínimo en $(0, 0)$.

$f'(2) = 0$; $f(2) = 1$. Máximo en $(2, 1)$.

- Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y creciente en $(0, 2)$.

d) • Asíntota vertical: $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

- Asíntota oblicua: $y = x$

  (si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)
- $f(x)$ no tiene puntos singulares.
- Creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

Características de las funciones

5 Indica el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$ **b)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x - 21}}$ **c)** $y = ln\,(4 - \sqrt{x})$

d) $y = \dfrac{1}{arc\,cos\,(x - 2)}$ **e)** $y = \dfrac{1}{tg\,x}$ **f)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{tg^2\,x - 1}}$

a) Para que se pueda definir la función, el radicando debe ser no negativo.

$-x^2 + 3x + 4 \geq 0 \ \rightarrow$ El dominio de definición es el intervalo $[-1, 4]$.

b) Para que se pueda definir la función, el radicando debe ser positivo.

$3x - 21 \geq 0 \ \rightarrow$ El dominio de definición es el intervalo $(7, +\infty)$.

c) Para que se pueda definir la función, el argumento del logaritmo debe ser positivo y, además, $x \geq 0$ para que exista la raíz.

$4 - \sqrt{x} > 0 \ \rightarrow \ \sqrt{x} < 4 \ \rightarrow \ x$ debe estar en el intervalo $[0, 16)$.

d) Por una parte, $-1 \leq x - 2 \leq 1 \ \rightarrow \ 1 \leq x \leq 3$.

Teniendo en cuenta que $arc\,cos\ 1 = 0$, el dominio de definición es el intervalo $[1, 3)$.

e) La tangente no está definida cuando $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Además, la función no está defiida cuando $tg\,x = 0$, es decir, cuando $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Por tanto, el dominio de definición es $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

f) Para que la función esté bien defiida, debe ser $tg^2\,x - 1 > 0$.

Por otra parte, la función es periódica de período π.

Dentro del intervalo $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $tg^2\,x - 1 > 0$ cuando $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Usando la periodicidad, el dominio de definición es la unión de todos los intervalos de la forma

$\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

6 Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 1$ **b)** $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$ **c)** $y = tg\,\pi x$

d) $y = e^{|x|}$ **e)** $y = \dfrac{|x|}{x^2 - 2x}$ **f)** $y = 2cos\,\dfrac{x}{2}$

a) $f(-x) = (-x)^2 + 1 = f(x) \ \rightarrow$ Función par.

b) $f(-x) = \dfrac{-x}{\sqrt{(-x)^2 - 3}} = -f(x) \ \rightarrow$ Función impar.

c) $f(-x) = tg\,[\pi(-x)] = -f(x) \ \rightarrow$ Función impar.

d) $f(-x) = = e^{|-x|} = f(x) \ \rightarrow$ Función par.

e) $f(-x) = \dfrac{|-x|}{(-x)^2 - 2(-x)} = \dfrac{|x|}{x^2 + 2x} \ \rightarrow$ No es simétrica.

f) $f(-x) = 2cos\,\dfrac{-x}{2} = f(x) \ \rightarrow$ Función par.

7 Determina el periodo de cada una de estas funciones:

a) $y = sen\ 3x$ **b)** $y = sen\ 2\pi x$ **c)** $y = tg\ \pi x$

d) $y = sen\ x + cos\ 2x$ **e)** $y = cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot sen\ x$ **f)** $y = sen\ (x^2 + 1)$

a) $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = sen\left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = sen\,(3x + 2\pi) = sen\,3x = f(x)$ → Su período es $\frac{2\pi}{3}$.

b) $f(x + 1) = sen\,[2\pi\,(x + 1)] = sen\,(2\pi x + 2\pi) = sen\,2\pi x = f(x)$ → Su período es 1.

c) $f(x + 1) = tg\,[\pi\,(x + 1)] = tg\,(\pi x + \pi) = tg\,\pi x = f(x)$ → Su período es 1.

d) $f(x + 2\pi) = sen\,(x + 2\pi) + cos\,[2\,(x + 2\pi)] = sen\,x + cos\,(2x + 4\pi) = sen\,x + cos\,2x = f(x)$ → Su período es 2π.

e) $f(x) = cos\,\frac{\pi x}{2}\,sen\,x$

$cos\,\frac{\pi x}{2}$ es periódica de período $\frac{2\pi}{\pi/2} = 4$.

$sen\,x$ es periódica de período 2π.

Por tanto, la función dada no puede ser periódica.

f) Para que sea periódica de período T, debe cumplirse que:

$f(x + T) = sen\,((x + T)^2 + 1) = sen\,(x^2 + 2Tx + T^2 + 1) = f(x) = sen\,(x^2 + 1 + 2k\pi)$ pero esto no es posible ya que no se puede hallar el hipotético período independientemente de x.

8 Halla las asíntotas verticales de estas funciones e indica la posición relativa de cada curva respecto a ellas:

a) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ **b)** $y = \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-9}}$ **c)** $y = \frac{1}{ln\ x}$

d) $y = \frac{x(x-1)}{x^2-2x}$ **e)** $y = \frac{1}{1-sen^2\ x}$ **f)** $y = \frac{1}{cos\ \frac{x}{2}}$

a) Tiene dos posibles asíntotas verticales ya que su denominador se anula cuando $x = 1$ y $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty$$

b) Tiene dos posibles asíntotas verticales ya que su denominador se anula cuando $x = 3$ y $x = -3$. La posición de la función respecto de las asíntotas debe tener en cuenta el dominio de definición, que es $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-9}} = -\infty, \quad \lim_{x \to 3^+} \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-9}} = +\infty$$

c) El dominio de definición es $(0, +\infty) - \{1\}$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{ln\,x} = 0$$ → En $x = 0$ no hay asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{ln\,x} = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{ln\,x} = +\infty$$ → La recta $x = 1$ es la asíntota vertical de la función.

d) $y = \frac{x(x-1)}{x^2-2x} = \frac{x(x-1)}{x(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}$ salvo en el punto $x = 0$.

Por tanto, en $x = 0$ tiene una discontinuidad evitable. En $x = 2$ tiene una asíntota vertical y la posición es:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x-1}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{x-1}{x-2} = +\infty$$

e) El denominador se anula cuando $sen^2\, x = 1$, es decir, cuando $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

$\lim\limits_{x \to (\pi/2) + k\pi} \frac{1}{1 - sen^2\, x} = +\infty$ ya que $1 - sen^2\, x > 0$ salvo en los valores de x donde están las asíntotas verticales.

f) El denominador se anula cuando $cos\, \frac{x}{2} = 0$, es decir, cuando $x = \pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Como la función es periódica de período 4π, estudiamos las asíntotas verticales $x = \pi$, $x = 3\pi$ y las demás se obtienen usando la periodicidad.

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{1}{cos\, x/2} = +\infty, \quad \lim_{x \to \pi^+} \frac{1}{cos\, x/2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3\pi^-} \frac{1}{cos\, x/2} = -\infty, \quad \lim_{x \to 3\pi^+} \frac{1}{cos\, x/2} = +\infty$$

Funciones polinómicas

9 Estudia y representa las siguientes funciones:

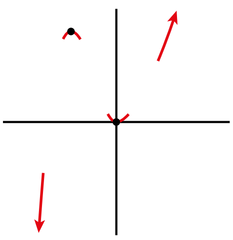
a) $y = x^3 + 3x^2$ **b)** $y = x^3 - 3x^2 + 5$ **c)** $y = \frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 + 10$ **d)** $y = \frac{5x^4 - x^5}{64}$

e) $y = x^5 - 5x^3$ **f)** $y = (x - 1)^3 - 3x$ **g)** $y = x^4 - 4x^2$ **h)** $y = 1 - (x - 1)^3$

a) $y = x^3 + 3x^2$

- Ramas infinitas:

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



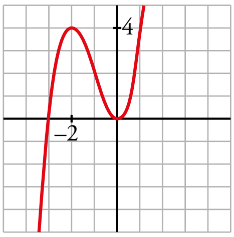
- Puntos singulares:

  $f'(x) = 3x^2 + 6x; \quad 3x^2 + 6x = 0 \;\to\; x(3x + 6) = 0$

  $x = 0, \; f(0) = 0 \;\to\; (0, 0)$ es un mínimo.

  $x = -2, \; f(-2) = -8 + 3 \cdot 4 = 4 \;\to\; (-2, 4)$ es un máximo.

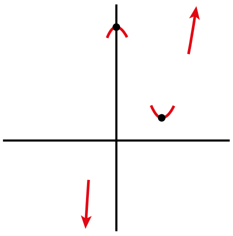
- Representación:



b) $y = x^3 - 3x^2 + 5$

- Ramas infinitas:

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



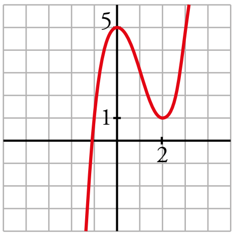
- Puntos singulares:

  $f'(x) = 3x^2 - 6x; \quad 3x^2 - 6x = 0 \;\to\; x(3x - 6) = 0$

  $x = 0, \; f(0) = 5 \;\to\; (0, 5)$ es un máximo.

  $x = 2, \; f(2) = 1 \;\to\; (2, 1)$ es un mínimo.

- Representación:



c) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{9}{2}x^2 + 10$

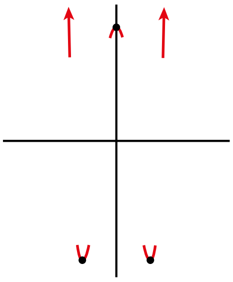
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

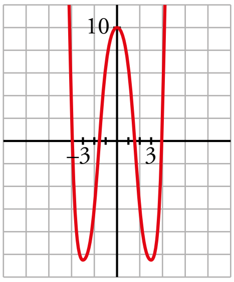
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x^3}{4} - \frac{9}{2} \cdot 2x = x^3 - 9x; \quad x^3 - 9x = 0 \;\to\; x(x^2 - 9) = 0$$

$x = 0, \; f(0) = 10 \;\to\;$ máximo en $(0, 10)$.
$x = 3, \; f(3) = -41/4 \;\to\;$ mínimo en $(3, -41/4)$.
$x = -3, \; f(-3) = -41/4 \;\to\;$ mínimo en $(-3, -41/4)$.



- Representación:



d) $y = \dfrac{5x^4 - x^5}{64}$

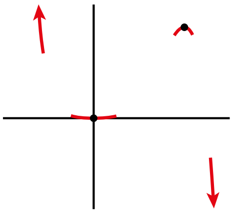
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

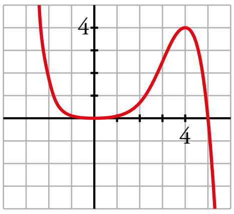
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{1}{64}(20x^3 - 5x^4); \quad \frac{1}{64}(20x^3 - 5x^4) = 0 \;\to\; x^3(20 - 5x) = 0$$

$x = 0, \; f(0) = 0 \;\to\;$ mínimo en $(0, 0)$.
$x = 4, \; f(4) = 4 \;\to\;$ máximo en $(4, 4)$.



- Representación:



e) $y = x^5 - 5x^3$

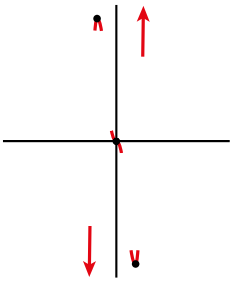
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares:

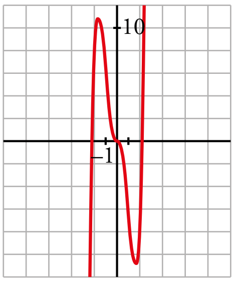
$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2; \quad 5x^4 - 15x^2 = 0 \;\to\; 5x^2(x^2 - 3) = 0$$

$x = 0 \;\to\; f(0) = 0$
$x = \sqrt{3} \;\to\; f(\sqrt{3}) = \sqrt{3^5} - 5\sqrt{3^3} = 9\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$
$x = -\sqrt{3} \;\to\; f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3^5} + 5\sqrt{3^3} = -9\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$



Tiene un máximo en $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$, un mínimo en $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ y un punto de inflexión en $(0, 0)$.

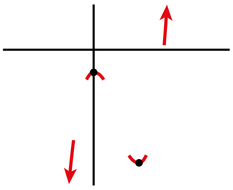
- Representación:



f) $y = (x - 1)^3 - 3x$

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

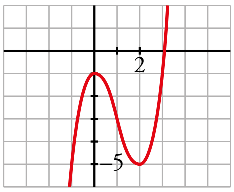


- Puntos singulares:

$f'(x) = 3(x - 1)^2 - 3;\ 3(x - 1)^2 - 3 = 0 \ \to$

$$(x - 1)^2 = 1 \begin{cases} x = 0,\ f(0) = -1 \ \to \ (0, -1) \text{ es un máximo.} \\ x = 2,\ f(2) = -5 \ \to \ (2, -5) \text{ es un mínimo.} \end{cases}$$

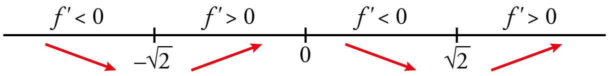
- Representación:



g) $y = x^4 - 4x^2$

- Por ser una función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$.
- Es simétrica respecto del eje vertical.
- No tiene asíntotas. En el infinito, tiene ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido.

$f'(x) = 4x^3 - 8x,\ f'(x) = 0 \ \to \ 4x^3 - 8x = 0 \ \to \ x = -\sqrt{2},\ x = 0,\ x = \sqrt{2}$



$x = -\sqrt{2},\ y = (-\sqrt{2})^4 - 4(-\sqrt{2})^2 = -4$

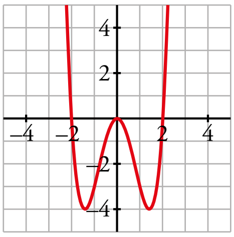
$x = 0,\ y = 0$

$x = \sqrt{2},\ y = -4$

Los puntos de corte con el eje horizontal son las soluciones de:

$x^4 - 4x^2 = 0 \ \to \ x = -2,\ x = 0,\ x = 2$

- Representación:

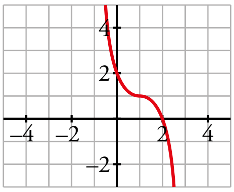


h) $y = 1 - (x - 1)^3$

- Por ser una función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$.
- No tiene asíntotas. En el infinito tiene ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido.

  $f'(x) = -3(x - 1)^2$, $f'(x) = 0 \to x = 1$
- Es decreciente en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$ ya que la primera derivada es negativa salvo en $x = 1$.

  $x = 1 \to y = 1$
- Corta a los ejes en los puntos (2, 0) y (0, 2).
- Representación:

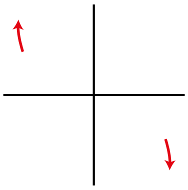


10 **Estudia las ramas infinitas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones. Represéntalas gráficamente:**

a) $y = 3 + (2 - x)^3$
b) $y = 2 - (x - 3)^4$
c) $y = (x + 1)^6 - 5$
d) $y = 3 - (1 - x)^3$
e) $y = x(x - 1)(x + 3)$
f) $y = (x - 2)^2 (x + 1) x^3$

a) $y = 3 + (2 - x)^3$

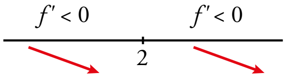
- Ramas infinitas $\left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \end{array} \right.$



- Puntos singulares:

  $f'(x) = -3(2 - x)^2$; $-3(2 - x)^2 = 0 \to x = 2$; $f(2) = 3$

  Signo de f':



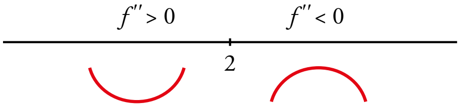
  f es decreciente en $\mathbb{R}$.

  No tiene máximos ni mínimos.

- Puntos de inflexión:

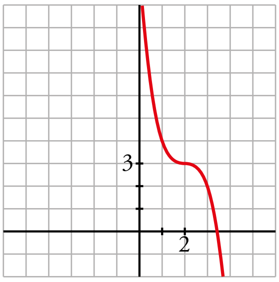
  $f''(x) = 6(2 - x)$; $6(2 - x) = 0 \to x = 2$; $f(2) = 3$

  Signo de f'':



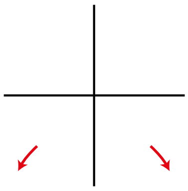
  El punto (2, 3) es un punto de inflexión con tangente horizontal $(f''(2) = 0$ y $f'(2) = 0)$.

- Gráfica:



b) $y = 2 - (x - 3)^4$

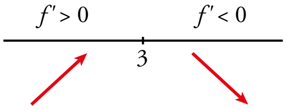
- Ramas infinitas $\left\langle \begin{array}{l} \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} f(x) = -\infty \\ \underset{x \to -\infty}{\text{lím}} f(x) = -\infty \end{array} \right.$



- Puntos singulares:

$f'(x) = -4(x - 3)^3;\ -4(x - 3)^3 = 0 \ \to\ x = 3;\ f(3) = 2$

Signo de f':



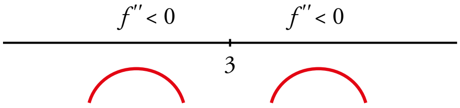
f es creciente en $(-\infty, 3)$ y decreciente en $(3, +\infty)$.

Tiene un máximo en $(3, 2)$.

- Puntos de inflexión:

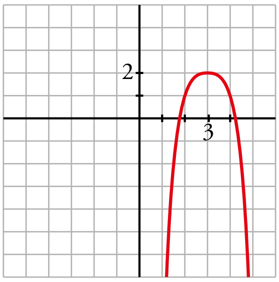
$f''(x) = -12(x - 3)^2;\ -12(x - 3)^2 = 0 \ \to\ x = 3;\ f(3) = 2$

Signo de f'':



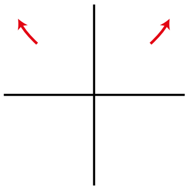
No tiene puntos de inflexión.

- Gráfica:



c) $y = (x + 1)^6 - 5$

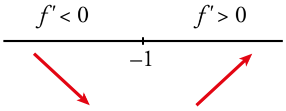
- Ramas infinitas $\left\langle \begin{array}{l} \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} f(x) = +\infty \\ \underset{x \to -\infty}{\text{lím}} f(x) = +\infty \end{array} \right.$



- Puntos singulares:

$f'(x) = 6(x + 1)^5;\ 6(x + 1)^5 = 0 \ \to\ x = -1;\ f(-1) = -5$

Signo de f':



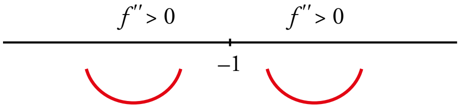
f es decreciente en $(-\infty, -1)$. Es creciente en $(-1, +\infty)$.

Mínimo en $(-1, -5)$.

- Puntos de inflexión:

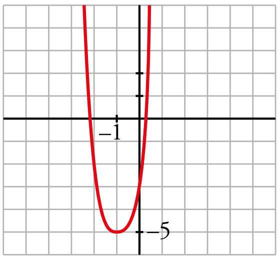
$f''(x) = 30(x + 1)^4;\ 30(x + 1)^4 = 0 \ \to\ x = -1;\ f(-1) = -5$

Signo de f'':

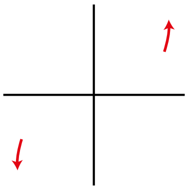


No tiene puntos de inflexión.

- Gráfica:



d) $y = 3 - (1 - x)^3$

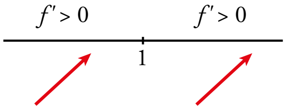


- Ramas infinitas $\left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \right.$

- Puntos singulares:

  $f'(x) = 3(1 - x)^2;\ 3(1 - x)^2 = 0 \ \to \ x = 1;\ f(1) = 3$

  Signo de f':



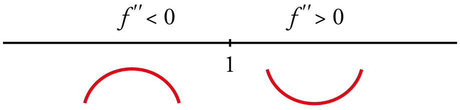
  f es creciente en $\mathbb{R}$.

  No tiene máximos ni mínimos.

- Puntos de inflexión:

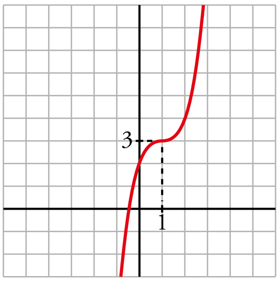
  $f''(x) = -6(1 - x);\ -6(1 - x) = 0 \ \to \ x = 1;\ f(1) = 3$

  Signo de f'':



  (1, 3) es un punto de inflexión con tangente horizontal, puesto que $f'(1) = 0$.

- Gráfica:



e) $y = x(x - 1)(x + 3)$

- Ramas infinitas $\left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \right.$

  Tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido.

- Puntos singulares:

  $f'(x) = (x - 1)(x + 3) + x(x + 3) + x(x - 1) = 3x^2 + 4x - 3$

  $f'(x) = 0 \ \to \ 3x^2 + 4x - 3 = 0 \ \to \ x = \dfrac{-2 - \sqrt{13}}{3},\ x = \dfrac{-2 + \sqrt{13}}{3}$

- Es creciente en $\left(-\infty, \dfrac{-2 - \sqrt{13}}{3}\right)$ y en $\left(\dfrac{-2 + \sqrt{13}}{3}, +\infty\right)$.

  Es decreciente en $\left(\dfrac{-2 - \sqrt{13}}{3}, \dfrac{-2 + \sqrt{13}}{3}\right)$.

$x = \dfrac{-2-\sqrt{13}}{3} \approx -1,87,\ \ y = 6,06 \ \to\ (-1,87; 6,06)$ es un máximo relativo.

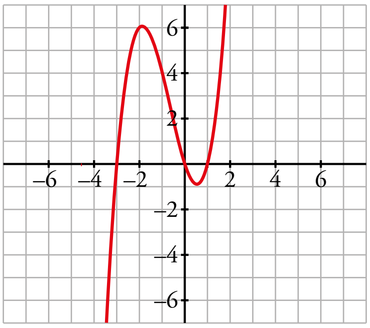
$x = \dfrac{-2+\sqrt{13}}{3} \approx 0,54,\ \ y = -0,88 \ \to\ (0,54; -0,88)$ es un mínimo relativo.

- Puntos de inflexión:

  $f''(x) = 6x + 4;\ f''(x) = 0 \ \to\ 6x + 4 = 0 \ \to\ x = -\dfrac{2}{3}$

  $x = -\dfrac{2}{3};\ y \approx 2,6 \ \to\ \left(-\dfrac{2}{3}; 2,6\right)$ es el punto de inflexión.

- Corta a los ejes coordenados en los puntos $x = 0,\ x = 1$ y $x = -3$.
- Gráfica:



f) $y = (x-2)^2\,(x+1)\,x^3$

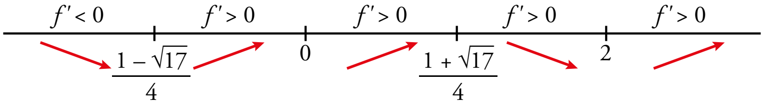
- Ramas infinitas $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ Tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido.

- Puntos singulares:

  $f'(x) = ((x-2)^2(x+1)x^3)' = 2(x-2)(x+1)x^3 + (x-2)^2x^3 + (x+1)(x-2)^2\,3x^2 =$

  $= 6x^5 - 15x^4 + 12x^2$

  $f'(x) = 0 \ \to\ 6x^5 - 15x^4 + 12x^2 = 0 \ \to\ x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4},\ \ x = 0,\ \ x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4},\ \ x = 2$



$x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \approx -0,78,\ \ y = -0,81 \ \to\ (-0,78; -0,81)$ es un mínimo relativo.

$x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \approx 1,28,\ \ y = 2,48 \ \to\ (1,28; 2,48)$ es un máximo relativo.

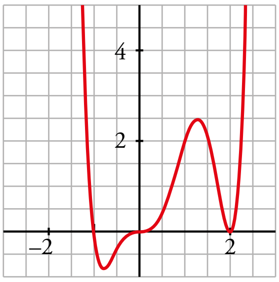
$x = 2,\ y = 0 \ \to\ (2, 0)$ es un mínimo relativo.

- Puntos de inflexión:

  $f''(x) = 30x^4 - 60x^3 + 24x;\ f''(x) = 0 \ \to\ x = 0;\ x = 1,73;\ x = 0,83;\ x = -0,56$

  Los puntos de inflexión son (0, 0); (1,73; 1,03); (0,83; 1,43) y (–0,56; –0,51).

- Corta a los ejes coordenados en los puntos $x = 2,\ x = -1$ y $x = 0$
- Gráfica:



Página 322

Funciones racionales

11 **En las siguientes funciones, estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos:**

a) $y = \dfrac{1}{x^2}$	**b)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$	**c)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$	**e)** $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$	**f)** $y = x + \dfrac{1}{x^2}$
g) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$	**h)** $y = \dfrac{x^3}{(1 - x)^2}$	**i)** $y = \dfrac{4x^2}{1 + x^4}$

a) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0\}$. Tiene simetría par.

- Asíntotas verticales:

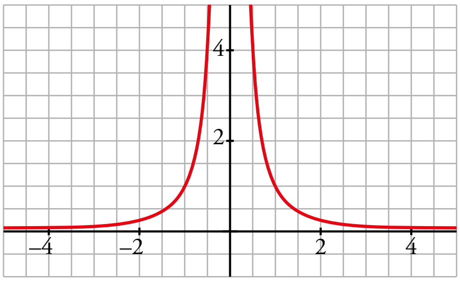
$\underset{x \to 0}{\text{lím}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ porque la función es positiva en todo su dominio. La recta $x = 0$ es la asíntota vertical de la función.

- Asíntotas horizontales:

$\underset{x \to +\infty}{\text{lím}} \dfrac{1}{x^2} = 0 \to$ La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y, también, por simetría, cuando $x \to -\infty$.

La función está por encima de la asíntota por ser siempre positiva.

- Gráfica:



b) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

- Asíntotas:

$\underset{x \to -\infty}{\text{lím}} f(x) = 0; \quad \underset{x \to +\infty}{\text{lím}} f(x) = 0$

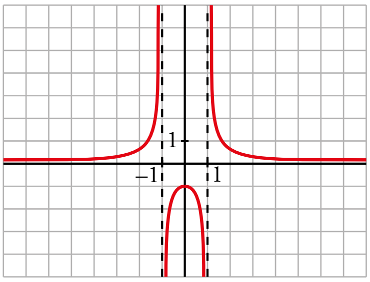
$y = 0$ es asíntota horizontal.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x \to -1^-}{\text{lím}} f(x) = +\infty \\ \underset{x \to -1^+}{\text{lím}} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x \to 1^-}{\text{lím}} f(x) = -\infty \\ \underset{x \to 1^+}{\text{lím}} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Gráfica:



c) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

- Asíntotas:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

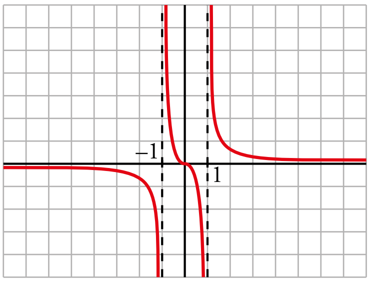
(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Gráfica:



d) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0\}$.

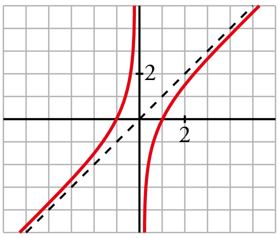
- Asíntotas:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \; x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

- Gráfica:



e) • El dominio de definición es $\mathbb{R}$.

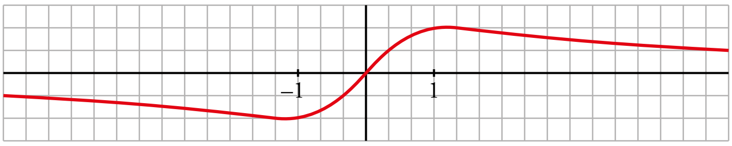
- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

- Gráfica:



f) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0\}$.

- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to 0} \left(x + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$ porque la fracción es positiva en todo su dominio.

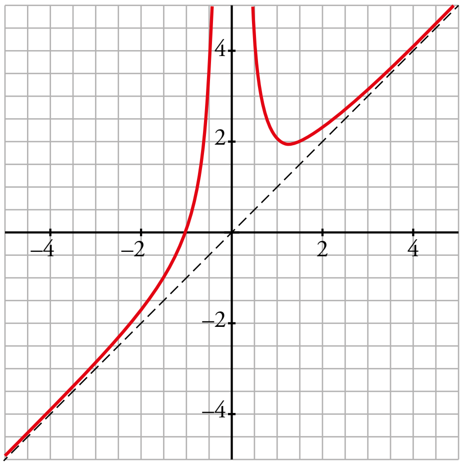
La recta $x = 0$ es la asíntota vertical de la función.

No tiene asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas:

$f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ → La recta $y = x$ es la asíntota oblicua.

Como $f(x) - x = \dfrac{1}{x^2} > 0$ salvo en $x = 0$, la función queda por encima de la asíntota oblicua.



g) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. La función tiene simetría impar.

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty \end{array} \right\}$$ $x = 1$ es asíntota vertical. Análogamente, por simetría, lo es la recta $x = -1$.

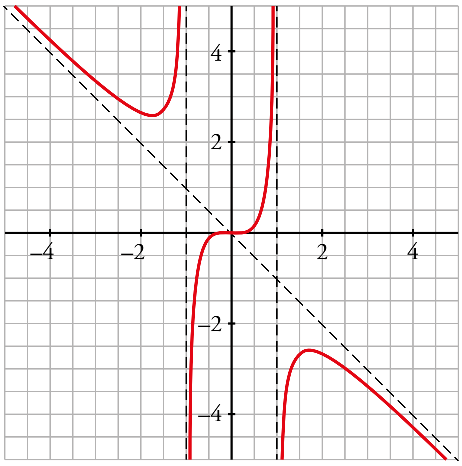
No tiene asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas:

$f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2} = x - \dfrac{x}{x^2-1}$ → La recta $y = -x$ es la asíntota oblicua.

Si $x \to +\infty$, $f(x) - (-x) = -\dfrac{x}{x^2-1} < 0$ → La función queda por debajo de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x) - (-x) = -\dfrac{x}{x^2-1} > 0$ → La función queda por encima de la asíntota.



h) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1\}$.

- Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3}{(1-x)^2} = +\infty$ ya que el denominador es no negativo.

La recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función.

No tiene asíntotas horizontales.

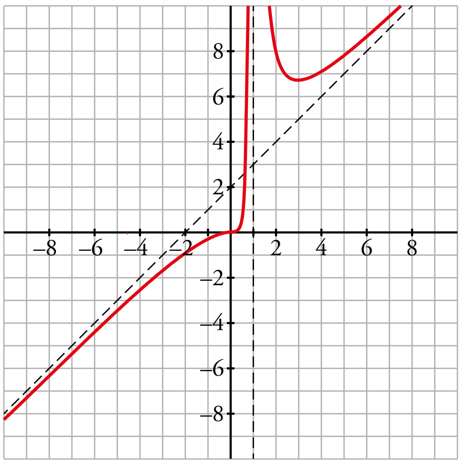
- Asíntotas oblicuas:

$f(x) = \dfrac{x^3}{(1-x)^2} = x + 2 + \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$ → La recta $y = x + 2$ es la asíntota oblicua.

Si $x \to +\infty$, $f(x) - (x+2) = \dfrac{3x-2}{(x-1)^2} > 0$ → La función queda por encima de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x) - (x+2) = \dfrac{3x-2}{(x-1)^2} < 0$ → La función queda por debajo de la asíntota.

- Gráfica:



i) • El dominio de definición es $\mathbb{R}$. Es una función par.

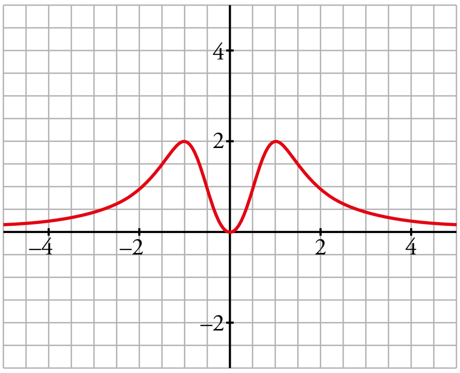
- No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2}{1+x^4} = 0$

La recta $x = 0$ es la asíntota horizontal de la función cuando $x \to \pm\infty$.

La función queda por encima de la asíntota por ser positiva salvo en $x = 0$.

- Gráfica:



12 **Representa estas funciones estudiando previamente su dominio, asíntotas, ramas infinitas y extremos relativos.**

a) $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$ **b)** $y = \dfrac{(x-1)}{x(x-3)(x+4)}$ **c)** $y = \dfrac{8-2x}{x(x-2)}$ **d)** $y = \dfrac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)}$

a) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1, 3\}$.

• Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{(x-1)(x-3)} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{(x-1)(x-3)} = -\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{(x-1)(x-3)} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{(x-1)(x-3)} = +\infty \end{array}\right\} \; x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

• Asíntotas horizontales:

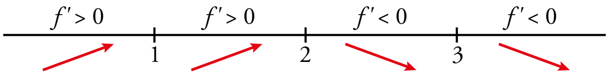
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(x-1)(x-3)} = 0 \to$ La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal cuando $x \to \pm\infty$.

La función queda por encima de la asíntota cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

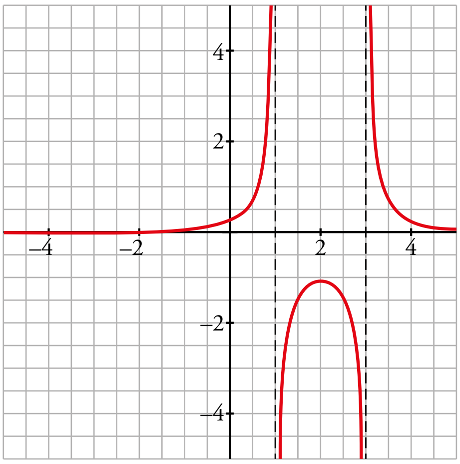
• Extremos relativos:

$f'(x) = \dfrac{-2x+4}{[(x-1)(x-3)]^2}$, $f'(x) = 0 \to x = 2$

$x = 2,\; y = -1$



• Gráfica:



b) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-4, 0, 3\}$.

• Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{x-1}{x(x-3)(x+4)} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -4^+} \dfrac{x-1}{x(x-3)(x+4)} = -\infty \end{array}\right\} \; x = -4 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-1}{x(x-3)(x+4)} = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-1}{x(x-3)(x+4)} = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x-1}{x(x-3)(x+4)} = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x-1}{x(x-3)(x+4)} = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

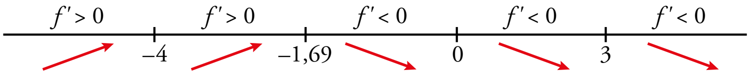
- Asíntotas horizontales:

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x(x-3)(x+4)} = 0 \to$ La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal cuando $x \to \pm\infty$.

  La función queda por encima de la asíntota cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

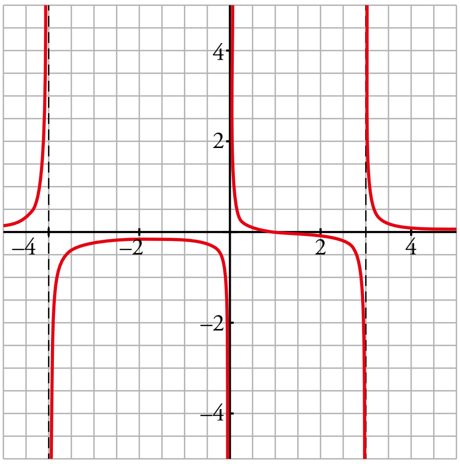
- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{2(-x^3 + x^2 + x - 6)}{x^2(x-3)^2(x+4)^2}, \; f'(x) = 0 \to -x^3 + x^2 + x - 6 = 0 \to x = -1{,}69; \; y = -0{,}15$$



- Corta a los ejes en (1, 0).

- Gráfica:



c) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

- Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{8-2x}{x(x-2)} = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{8-2x}{x(x-2)} = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{8-2x}{x(x-2)} = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{8-2x}{x(x-2)} = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Asíntotas horizontales:

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8-2x}{x(x-2)} = 0 \to$ La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal cuando $x \to \pm\infty$.

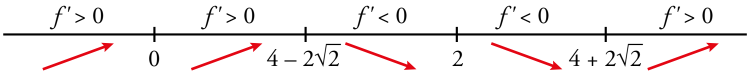
  La función queda por debajo de la asíntota cuando $x \to +\infty$ y por encima cuando $x \to -\infty$.

- Extremos relativos:

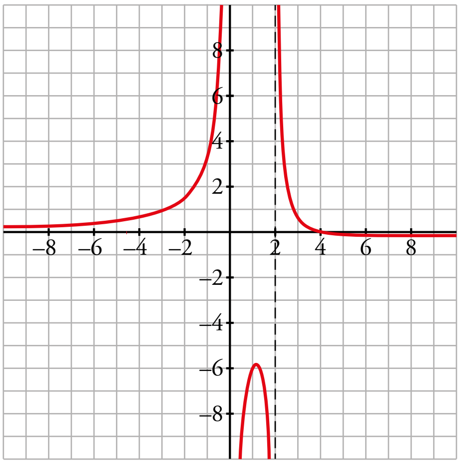
$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 8x + 8)}{x^2(x-2)^2},\ f'(x) = 0 \to x^2 - 8x + 8 = 0 \to x = 4 - 2\sqrt{2},\ x = 4 + 2\sqrt{2}$$

$x = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1{,}17,\ y = -5{,}83$

$x = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6{,}83,\ y = -0{,}17$



- Corta a los ejes en (4, 0).
- Gráfica:



d) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

- Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} = +\infty \end{array}\right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} = +\infty \end{array}\right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

- No tiene asíntotas horizontales.
- Asíntotas oblicuas:

$$f(x) = \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} = 2x + 1 + \frac{5x+2}{(x+1)(x-2)} \to \text{La recta } y = 2x + 1 \text{ es la asíntota oblicua.}$$

Si $x \to +\infty,\ f(x) - (2x+1) = \dfrac{5x+2}{(x+1)(x-2)} > 0 \to$ La función queda por encima de la asíntota.

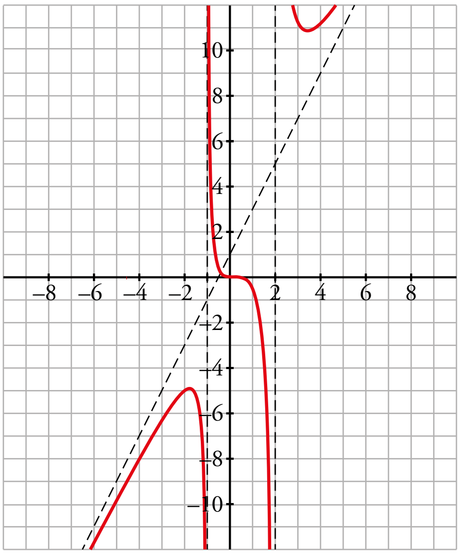
Si $x \to -\infty,\ f(x) - (2x+1) = \dfrac{5x+2}{(x+1)(x-2)} < 0 \to$ La función queda por debajo de la asíntota.

- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{x(2x^3 - 4x^2 - 11x + 4)}{(x-2)^2(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \to x(2x^3 - 4x^2 - 11x + 4) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ 2x^3 - 4x^2 - 11x + 4 = 0 \to x = 0{,}33;\ x = 3{,}43;\ x = -1{,}76 \end{cases}$$

- Corta a los ejes en (0, 0) y en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
- Gráfica:



13 **Representa las siguientes funciones racionales:**

a) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ **c)** $y = \dfrac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{2x^3}$ **e)** $y = \dfrac{x^3 - 7x^2 + 6}{x^4 - x^2}$ **f)** $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 9x + 22}{x^3 - x^2 - 2x}$

Recuerda que si se simplifica una fracción dividiendo numerador y denominador por $(x - a)$, hay una discontinuidad evitable en $x = a$.

a) • El dominio de definición es $\mathbb{R}$.

- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = 1 \to$ La recta $y = 1$ es la asíntota horizontal de la función.

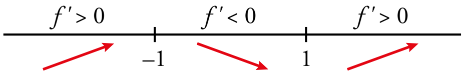
$$f(x) - 1 = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} - 1 = \frac{-2x}{x^2 + x + 1}$$

Si $x \to +\infty$, $f(x) - 1 = \dfrac{-2x}{x^2 + x + 1} < 0 \to$ La función queda por debajo de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $f(x) - 1 = \dfrac{-2x}{x^2 + x + 1} > 0 \to$ La función queda por encima de la asíntota.

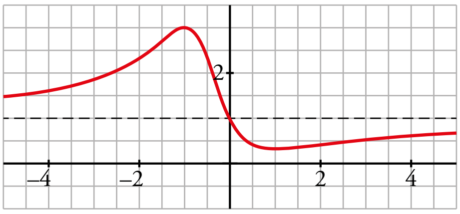
- Extremos relativos:

$f'(x) = \dfrac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$, $f'(x) = 0 \to x = -1,\ x = 1$



$x = -1,\ y = 3;\ x = 1,\ y = \dfrac{1}{3}$

- Gráfica:



b) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1\}$.

- Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = +\infty \end{array}\right\} \; x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- No tiene asíntotas horizontales.
- Asíntotas oblicuas:

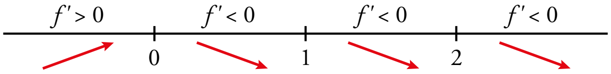
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1} \;\to\; \text{La recta } y = x - 1 \text{ es la asíntota oblicua de la función.}$$

$$\text{Si } x \to +\infty,\; f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x - 1} > 0 \;\to\; \text{La función queda por encima de la asíntota.}$$

$$\text{Si } x \to -\infty,\; f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x - 1} < 0 \;\to\; \text{La función queda por debajo de la asíntota.}$$

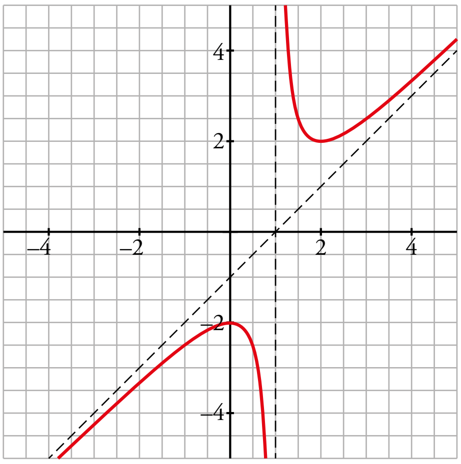
- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2},\; f'(x) = 0 \;\to\; x = 0,\; x = 2$$



$x = 0,\; y = -1;\; x = 2,\; y = 2$

- Gráfica:



c) • El dominio de definición es $\mathbb{R}$.

- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1} = 3 \;\to\; \text{La recta } y = 3 \text{ es la asíntota horizontal de la función.}$$

$$f(x) - 3 = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1} - 3 = \frac{x - 5}{x^2 + 1}$$

$$\text{Si } x \to +\infty,\; f(x) - 3 = \frac{x - 5}{x^2 + 1} > 0 \;\to\; \text{La función queda por encima de la asíntota.}$$

$$\text{Si } x \to -\infty,\; f(x) - 3 = \frac{x - 5}{x^2 + 1} < 0 \;\to\; \text{La función queda por debajo de la asíntota.}$$

- Extremos relativos:

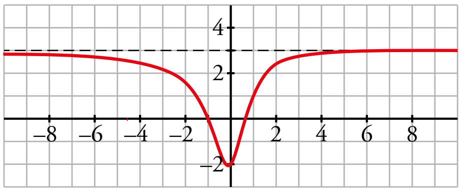
$$f'(x) = \frac{-x^2 + 10x + 1}{(x^2+1)^2}, \; f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -x^2 + 10x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = 5 - \sqrt{26}, \; x = 5 + \sqrt{26}$$

$f' < 0$		$f' > 0$		$f' < 0$
↘	$5 - \sqrt{26}$	↗	$5 + \sqrt{26}$	↘

$x = 5 - \sqrt{26} \approx -0{,}1, \; y = -2{,}05$

$x = 5 + \sqrt{26} \approx 10{,}1, \; y = 3{,}05$

- Gráfica:



d) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0\}$.

- Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 4}{2x^3} = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 4}{2x^3} = +\infty \end{array}\right\} \; x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x^2 - x + 4}{2x^3} = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \text{La recta } y = \frac{1}{2} \text{ es la asíntota horizontal de la función.}$$

$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{x^3 - x^2 - x + 4}{2x^3} - \frac{1}{2} = \frac{-x^2 - x + 4}{2x^3}$$

Si $x \rightarrow +\infty, \; f(x) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-x^2 - x + 4}{2x^3} < 0 \;\rightarrow$ La función queda por debajo de la asíntota.

Si $x \rightarrow -\infty, \; f(x) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-x^2 - x + 4}{2x^3} > 0 \;\rightarrow$ La función queda por encima de la asíntota.

- Extremos relativos:

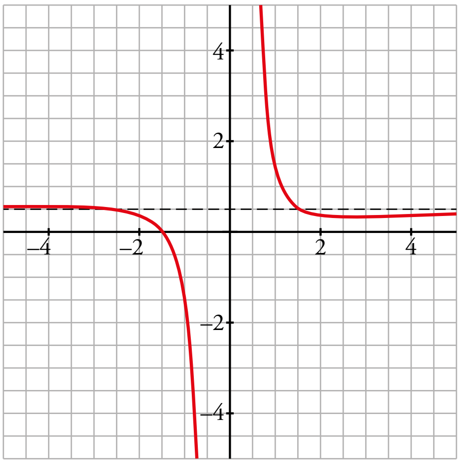
$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 12}{2x^4}, \; f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 + 2x - 12 = 0 \;\rightarrow\; x = -1 - \sqrt{13}, \; x = -1 + \sqrt{13}$$

$f' > 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' < 0$
↗	$-1 - \sqrt{13}$	↘	0	↘	$-1 + \sqrt{13}$	↘

$$x = -1 - \sqrt{13} \approx -4{,}6, \; y = \frac{(-4{,}6)^3 - 4{,}6^2 + 4{,}6 + 4}{-2 \cdot 4{,}6^3} = 0{,}56452$$

$x = -1 + \sqrt{13} \approx 2{,}6, \; y = 0{,}35$

- Gráfica:



e) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

- $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x^2 + 6}{x^4 - x^2} = \dfrac{(x-1)(x^2 - 6x - 6)}{x^2(x-1)(x+1)} = \dfrac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)}$ salvo en $x = 1$, donde presenta una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 6}{x^4 - x^2} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = -\frac{11}{2}$$

- Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = +\infty \end{array}\right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = -\infty \end{array}\right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = 0 \to$ La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal de la función.

Si $x \to +\infty$, $f(x) > 0 \to$ La función queda por encima de la asíntota.

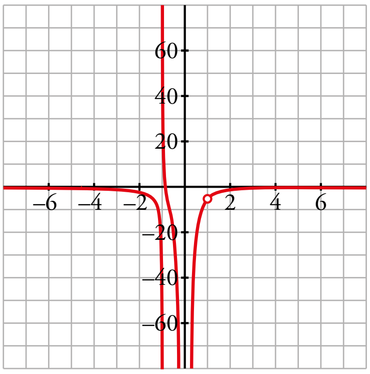
Si $x \to -\infty$, $f(x) < 0 \to$ La función queda por debajo de la asíntota.

- Extremos relativos:

$f'(x) = \dfrac{-x^3 + 12x^2 + 24x + 12}{x^3(x+1)^2}$, $f'(x) = 0 \to -x^3 + 12x^2 + 24x + 12 = 0 \to x = 13{,}8$

$x = 13{,}8$; $y = 0{,}036$

- Gráfica:



f) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-1, 0, 2\}$.

- $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 9x + 22}{x^3 - x^2 - 2x} = \dfrac{(x-2)(x^2 - x - 11)}{x(x+1)(x-2)} = \dfrac{x^2 - x - 11}{x(x+1)}$ salvo en $x = 2$, donde presenta una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 22}{x^3 - x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} = -\frac{3}{2}$$

- Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} = +\infty \end{array}\right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} = -\infty\end{array}\right\} \; x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} = 1 \to \text{La recta } y = 1 \text{ es la asíntota horizontal de la función.}$$

$$f(x) - 1 = \frac{x^2 - x - 11}{x(x+1)} - 1 = \frac{-2x - 11}{x(x+1)}$$

Si $x \to +\infty$, $f(x) - 1 = \dfrac{-2x - 11}{x(x+1)} < 0 \to$ La función queda por debajo de la asíntota.

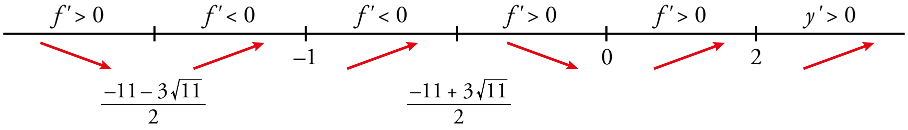
Si $x \to -\infty$, $f(x) - 1 = \dfrac{-2x - 11}{x(x+1)} > 0 \to$ La función queda por encima de la asíntota.

- Extremos relativos:

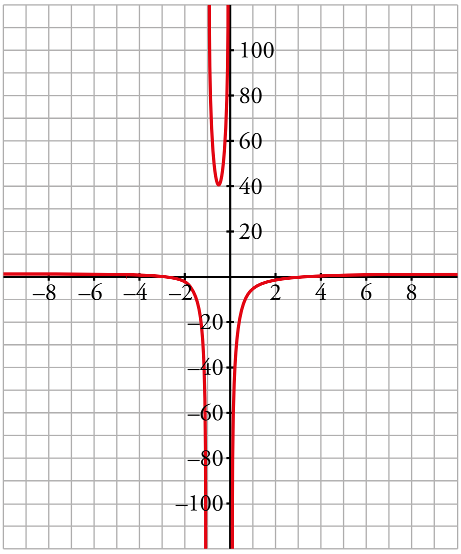
$$f'(x) = \frac{2x^2 + 22x + 11}{x^2(x+1)^2}, \; f'(x) = 0 \to 2x^2 + 22x + 11 = 0$$

$$x = \frac{-11 - 3\sqrt{11}}{2} \approx -10{,}5; \; y = 1{,}1$$

$$x = \frac{-11 + 3\sqrt{11}}{2} \approx -0{,}53; \; y = 40{,}9$$



- Gráfica:



Otros tipos de funciones

14 **Estudia y representa las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - x}$ **c)** $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

a) $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

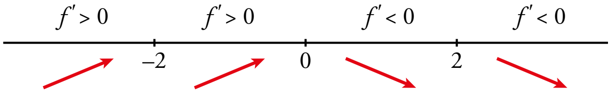
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\[2ex] \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{Ramas parabólicas.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(4 - x^2)^2}} \to f(x) \text{ no es derivable en } x = -2, \text{ ni en } x = 2.$$

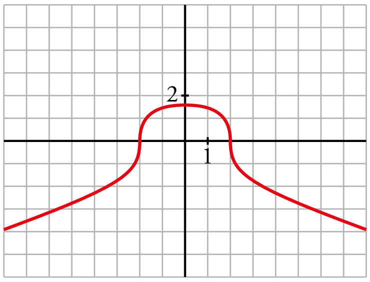
$f'(x) = 0 \to -2x = 0 \to x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$. Es decreciente en $(0, +\infty)$. Tiene un máximo en $(0, \sqrt[3]{4})$.

- Corta al eje X en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.
- Gráfica:



b) $y = \sqrt{x^2 - x}$

- Dominio: $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$
- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + x} - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + x} - x]\,[\sqrt{x^2 + x} + x]}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2}$$

$y = -x + \dfrac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $\left(f(x) < -x + \dfrac{1}{2}\right)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - x} - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 - x} - x]\,[\sqrt{x^2 - x} + x]}{(\sqrt{x^2 - x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \frac{-1}{2}$$

$y = x - \frac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $\left(f(x) < x - \frac{1}{2}\right)$.

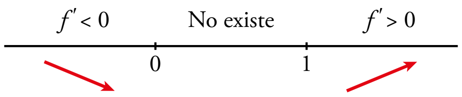
- Puntos singulares:

  $$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

  $$f'(x) = 0 \;\to\; 2x - 1 = 0 \;\to\; x = \frac{1}{2}$$

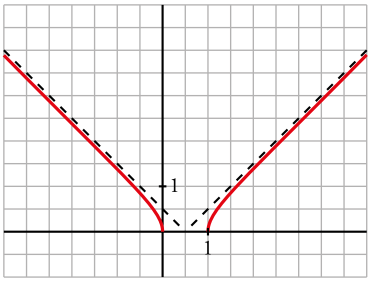
  No tiene puntos singulares (en $x = \frac{1}{2}$ no está definida $f(x)$).

  Signo de $f'(x)$:



  $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0]$. Es creciente en $[1, +\infty)$.

- Pasa por (0, 0) y (1, 0).
- Gráfica:



c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

- Dominio: $x^2 - 4x + 5 = 0 \;\to\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \;\to$ no tiene solución.

  $f(x) > 0$ para todo x.

  Dominio = $\mathbb{R}$.

- Asíntotas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

  $$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{-x} = -1$$

  $$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)\,(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)}{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)} =$$

  $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \frac{4}{2} = 2$$

  $y = -x + 2$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -x + 2)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x)}{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} = \frac{-4}{2} = -2$$

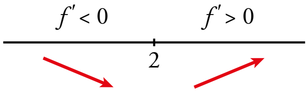
$y = x - 2$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > x - 2)$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$$

$f'(x) = 0 \to x - 2 = 0 \to x = 2$

Signo de $f'(x)$:

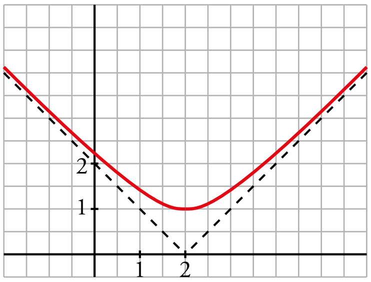


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2)$.

Es creciente en $(2, +\infty)$.

Tiene un mínimo en $(2, 1)$.

- Gráfica:



d) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

- Dominio: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Simetrías: $f(-x) = f(x) \to f(x)$ es par: simétrica respecto al eje Y.
- Asíntotas:

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \to x = -1$ es asíntota vertical.

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \to x = 1$ es asíntota vertical.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 - x\sqrt{x^2-1})(x^2 + x\sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2-1})(x^2 + x\sqrt{x^2-1})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2-1)}{(\sqrt{x^2-1})(x^2 + x\sqrt{x^2-1})} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2-1} + x(x^2-1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2-1} + x^3 - x} = 0$$

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 1$$

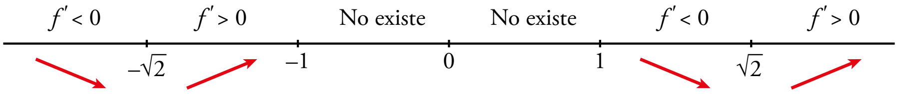
Como $f(x)$ es par, la recta $y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > x)$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2-1} - x^2 \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{(x^2-1)} = \frac{2x(x^2-1) - x^3}{\sqrt{(x^2-1)^3}} = \frac{2x^3 - 2x - x^3}{\sqrt{(x^2-1)^3}} = \frac{x^3 - 2x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x(x^2-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\text{(no vale)} \\ x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

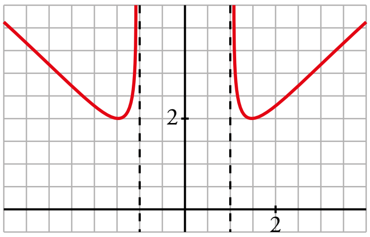


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, \sqrt{2})$.

Es creciente en $(-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

Tiene un mínimo en $(-\sqrt{2}, 2)$ y otro en $(\sqrt{2}, 2)$.

- Gráfica:



15 Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$ **b)** $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **c)** $y = x \ln x$ **d)** $y = (x-1)\,e^x$

e) $y = e^{-x^2}$ **f)** $y = x^2\, e^{-x}$ **g)** $y = \dfrac{x^3}{\ln x}$ **h)** $y = \ln(x^2-1)$

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$

- Dominio: $\mathbb{R}$ (ya que $e^x \neq 0$ para todo x).

- Asíntotas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \ \to \ \text{Rama parabólica.}$$

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

  $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

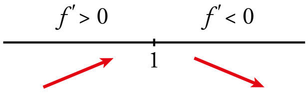
  (1) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos la regla de L'Hôpital (**H**).

- Puntos singulares:

  $$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

  $f'(x) = 0 \ \to \ 1 - x = 0 \ \to \ x = 1$

  Signo de $f'(x)$:

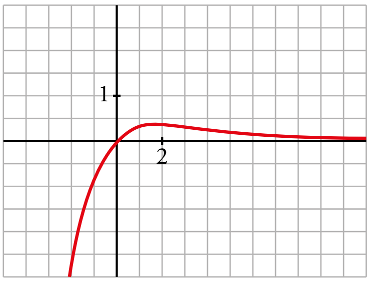
  $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$.

  Es decreciente en $(1, +\infty)$

  Tiene un máximo en $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

- Corta a los ejes en el punto (0, 0).

- Gráfica:

b) $y = \frac{ln\, x}{x}$

- Dominio: $(0, +\infty)$

- Asíntotas:

  $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \ \to \ x = 0$ es asíntota vertical.

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln\, x}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

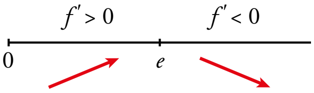
  $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- Puntos singulares:

  $$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - ln\, x}{x^2} = \frac{1 - ln\, x}{x^2}$$

  $f'(x) = 0 \ \to \ ln\, x = 1 \ \to \ x = e$

Signo de $f'(x)$:

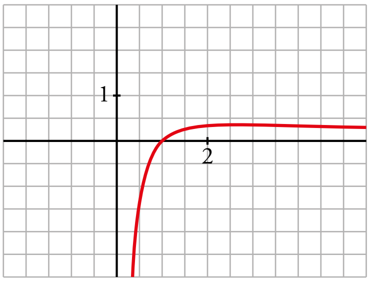


$f(x)$ es creciente en $(0, e)$.

Es decreciente en $(e, +\infty)$

Tiene un máximo en $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.
- Gráfica:



c) $y = x\ ln\ x$

- Dominio: $(0, +\infty)$
- Asíntotas:

$$\underset{x \to 0^+}{lím}\ x\ ln\ x = \underset{x \to 0^+}{lím}\ \frac{ln\ x}{1/x} \overset{(\mathbf{H})}{=} \underset{x \to 0^+}{lím}\ \frac{1/x}{-1/x^2} = \underset{x \to 0^+}{lím}\ -x = 0$$

No tiene asíntotas verticales.

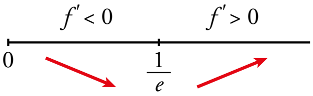
$$\underset{x \to +\infty}{lím}\ f(x) = +\infty;\ \underset{x \to +\infty}{lím}\ \frac{f(x)}{x} = +\infty \ \to \text{ Rama parabólica.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = ln\ x + x \cdot \frac{1}{x} = ln\ x + 1$$

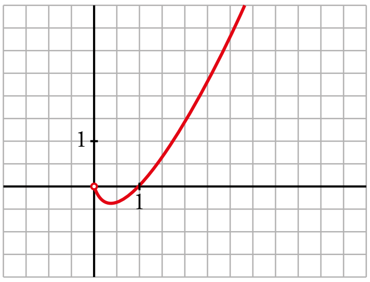
$$f'(x) = 0 \ \to\ ln\ x = -1 \ \to\ x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es de creciente en $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$. Es creciente en $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$. Tiene un mínimo en $\left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e}\right)$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.
- Gráfica:



d) $y = (x-1)e^{x}$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Asíntotas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x-1)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-1}{e^{x}} \overset{(\mathbf{H})}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^{x}} = 0$$

  $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

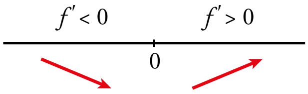
  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \;\to\; \text{Rama parabólica.}$$

- Puntos singulares:

  $f'(x) = e^{x} + (x-1)e^{x} = e^{x}(1 + x - 1) = xe^{x}$

  $f'(x) = 0 \;\to\; x = 0$

  Signo de $f'(x)$:



  $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$. Es creciente en $(0, +\infty)$.

  Tiene un mínimo en $(0, -1)$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.
- Gráfica:

e) $y = e^{-x^2}$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Asíntotas:

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

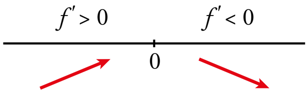
  $y = 0$ es asíntota horizontal $(f(x) > 0$ para todo $x)$.

- Puntos singulares:

  $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

  $f'(x) = 0 \;\to\; -2x = 0 \;\to\; x = 0$

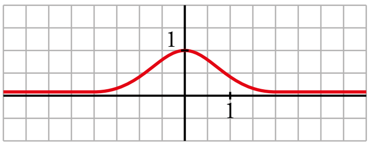
  Signo de $f'(x)$:



  $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$. Es creciente en $(0, +\infty)$.

  Tiene un mínimo en $(0, 1)$.

- Gráfica:



f) $y = x^2 e^{-x}$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad \to \text{ Rama parabólica.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{(\mathbf{H})}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{(\mathbf{H})}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

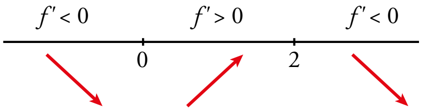
- Puntos singulares:

$$y = \frac{x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{2x\, e^x - x^2 e^x}{e^x} = \frac{e^x\,(2x - x^2)}{e^x} = \frac{2x - x^2}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = 0 \to 2x - x^2 = 0 \to x(2 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

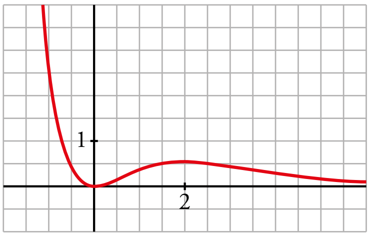


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

Es creciente en $(0, 2)$.

Tiene un mínimo en $(0, 0)$ y un máximo en $\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$

- Gráfica:



g) $y = \dfrac{x^3}{ln\ x}$

- Dominio:

$ln\ x = 0 \to x = 1$. Además, ha de ser $x > 0$.

Dominio $= (0, 1) \cup (1, +\infty)$

- Asíntotas:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \ x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

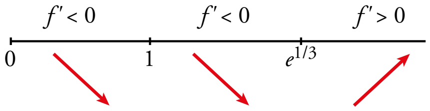
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \ \to \ \text{Rama parabólica.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot ln\, x - x^3 \cdot (1/x)}{(ln\, x)^2} = \frac{3x^2 \cdot ln\, x - x^2}{(ln\, x)^2} = \frac{x^2 (3ln\, x - 1)}{(ln\, x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \ \to \ x^2(3ln\, x - 1) = 0 \ \begin{cases} x = 0 \ \text{(no vale)} \\ ln\, x = 1/3 \ \to \ x = e^{1/3} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

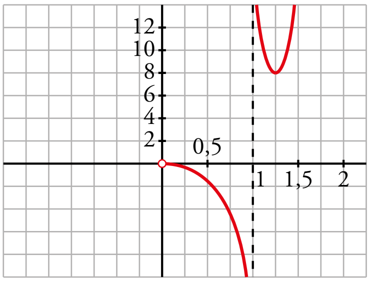


$f(x)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (1, e^{1/3})$.

Es creciente en $(e^{1/3}, +\infty)$.

Tiene un mínimo en $(e^{1/3}, 3e)$.

- Gráfica:



h) $y = ln(x^2 - 1)$

- Dominio: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Asíntotas:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \ \to \ x = -1 \ \text{es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \ \to \ x = 1 \ \text{es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \to \ \text{Ramas parabólicas.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = 0 \ \to \ 2x = 0 \ \to \ x = 0$$

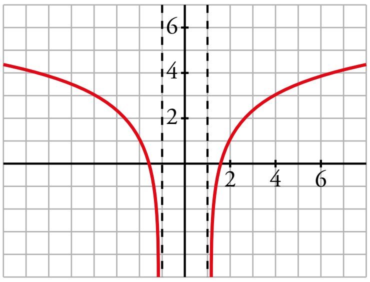
No hay puntos singulares ($x = 0$ no pertenece al dominio).

- Puntos de corte con el eje X:

$$ln(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1 \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Puntos: $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$

- Gráfica:



16 Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = sen\ x + cos\ x$

b) $y = 2sen\ x - cos\ 2x$

c) $y = cos\ 2x - cos\ 4x$

d) $y = 3sen\ \pi x + 2$

e) $y = sen\ \pi x - 2$

f) $y = tg\ \pi x + cos\ 2\pi x$

a) • El dominio de definición es $\mathbb{R}$. Es una función periódica de período 2π.

- Punto de corte con el eje Y: $x = 0$, $y = 1$.

Puntos de corte con el eje X:

$$sen\ x + cos\ x = 0 \rightarrow sen\ x = -cos\ x \rightarrow tg\ x = -1 \ \text{(ya que } cos\ x \neq 0) \rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \ \text{con} \ k \in \mathbb{Z}.$$

- Máximos y mínimos:

$$y' = cos\ x - sen\ x, \ y' = 0 \rightarrow cos\ x - sen\ x = 0 \rightarrow sen\ x = cos\ x \rightarrow$$

$$\rightarrow tg\ x = 1 \ \text{(ya que } cos\ x \neq 0) \rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ \text{con} \ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \ \text{con} \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

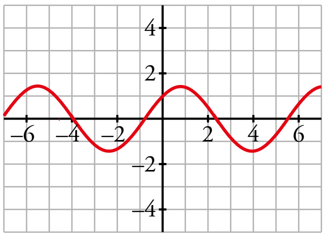
$$y'' = -sen\ x - cos\ x$$

$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow y'' = -sen\frac{\pi}{4} - cos\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} < 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \ y = \sqrt{2}$$

$\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \sqrt{2}\right)$ son máximos relativos.

$$x = \frac{5\pi}{4} \rightarrow y'' = -sen\frac{5\pi}{4} - cos\frac{5\pi}{4} = \sqrt{2} > 0 \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \ y = -\sqrt{2}$$

$\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, -\sqrt{2}\right)$ son mínimos relativos.



b) • El dominio de definición es $\mathbb{R}$. Es una función periódica de período 2π.

- Puntos de corte con el eje Y: $x = 0$, $y = -1$.

  Puntos de corte con el eje X:

$$2sen\ x - cos\ 2x = 0 \ \to\ 2sen\ x - cos^2\ x + sen^2\ x = 0 \ \to\ 2sen\ x - 1 + sen^2\ x + sen^2\ x = 0 \ \to$$

$$\to\ 2sen^2\ x + 2sen\ x - 1 = 0 \ \to\ sen\ x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \ \to$$

$$\to\ x \approx 0{,}37 + 2k\pi,\ \ x \approx 2{,}77 + 2k\pi$$

- Máximos y mínimos:

$$y' = 2\ cos\ x + 2sen\ 2x$$

$$y' = 0 \ \to\ 2cos\ x + 4sen\ x \cdot cos\ x = 0 \ \to\ 2cos\ x(1 + sen\ x) = 0 \ \begin{cases} cos\ x = 0 \ \to\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ sen\ x = \dfrac{-1}{2} \ \to\ x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$y'' = 4cos\ 2x - 2sen\ x$$

$$x = \frac{\pi}{2} \ \to\ y'' = 4cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 2sen\ \frac{\pi}{2} = -6 < 0 \ \to\ x = \frac{\pi}{2},\ y = 2sen\ \frac{\pi}{2} - cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 3$$

$\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, 3\right)$ son máximos relativos.

$$x = \frac{3\pi}{2} \ \to\ y'' = 4cos\left(2 \cdot \frac{3\pi}{2}\right) - 2sen\ \frac{3\pi}{2} = -2 < 0 \ \to\ x = \frac{3\pi}{2},\ y = 2sen\ \frac{3\pi}{2} - cos\left(2 \cdot \frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

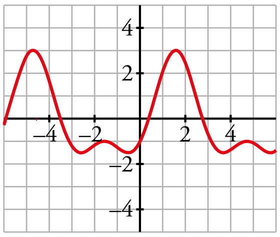
$\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, -1\right)$ son máximos relativos.

$$x = \frac{7\pi}{6} \ \to\ y'' = 4cos\left(2 \cdot \frac{7\pi}{6}\right) - 2sen\ \frac{7\pi}{6} = 3 > 0 \ \to\ x = \frac{7\pi}{6},\ y = 2sen\ \frac{7\pi}{6} - cos\left(2 \cdot \frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$$

$\left(\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, -\dfrac{3}{2}\right)$ son mínimos relativos.

$$x = \frac{11\pi}{6} \ \to\ y'' = 4cos\left(2 \cdot \frac{11\pi}{6}\right) - 2sen\ \frac{11\pi}{6} = 3 > 0 \ \to\ x = \frac{11\pi}{6},\ y = 2sen\ \frac{11\pi}{6} - cos\left(2 \cdot \frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2}$$

$\left(\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, -\dfrac{3}{2}\right)$ son mínimos relativos.



c) • El dominio de definición es $\mathbb{R}$. Es una función periódica de período π.

- Punto de corte con el eje Y: $x = 0$, $y = 0$.

  Puntos de corte con el eje X:

$$cos\ 2x - cos\ 4x = 0 \ \to\ cos\ 2x - cos^2\ 2x + sen^2\ 2x = 0 \ \to\ cos\ 2x - cos^2\ 2x + 1 - cos^2\ 2x = 0 \ \to$$

$$\to\ \begin{cases} cos\ x = 1 \ \to\ x = 0 + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ cos\ x = -\dfrac{1}{2} \ \to\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- Extremos relativos:

$$y' = 2(-sen\ 2x + 2sen\ 4x),\ y' = 0 \ \to\ -sen\ 2x + 4sen\ 2x \cdot cos\ 2x = 0 \ \to\ sen\ 2x(-1 + 4cos\ 2x) = 0$$

$$y'' = 4(4cos\ 4x - cos\ 2x)$$

$x = 0 \to y'' = 4(4\cos 0 - \cos 0) = 12 > 0 \to x = 0,\ y = 0;\ (0 + 2k\pi, 0)$ son mínimos relativos.

$x = \frac{\pi}{2} \to y'' = 4(4\cos 2\pi - \cos \pi) = 20 > 0 \to x = 0,\ y = \cos \pi - \cos 2\pi = -2$

$\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -2\right)$ son mínimos relativos.

$x = 0{,}65 \to y'' = 4(4\cos(4 \cdot 0{,}65) - \cos(2 \cdot 0{,}65)) = -14{,}78 < 0 \to$

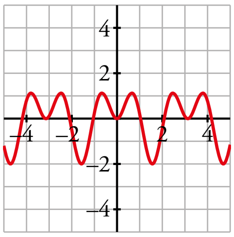
$\to x = 0,\ y = \cos(2 \cdot 0{,}65) - \cos(4 \cdot 0{,}65) = 1{,}12$

$(0{,}65 + 2k\pi;\ 1{,}12)$ son máximos relativos.

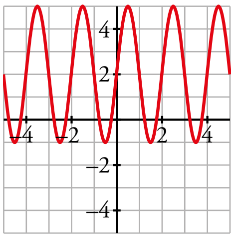
$x = 2{,}48 \to y'' = 4(4\cos(4 \cdot 2{,}48) - \cos(2 \cdot 2{,}48)) = -15{,}058 < 0 \to$

$\to x = 0,\ y = \cos(2 \cdot 2{,}48) - \cos(4 \cdot 2{,}48) = 1{,}12$

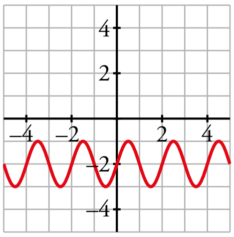
$(2{,}48 + 2k\pi;\ 1{,}12)$ son máximos relativos.



d) El dominio de definición es $\mathbb{R}$. Es una función periódica de período 2. Se obtiene desplazando 2 unidades hacia arriba la función $y = sen\ x$, dilatándola verticalmente 3 veces y contrayendo su período.



e) El dominio de definición es $\mathbb{R}$. Es una función periódica de período 2. Se obtiene desplazando 2 unidades hacia abajo la función $y = sen\ x$ y contrayendo su periodo.



f) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2} + k\right\}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Es una función periódica de período 1.

Por tanto, basta estudiarla en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y extender los resultados usando la periodicidad.

- Corta al eje Y en el punto (0, 1).
- Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -(1/2)^+} (tg\ \pi x + \cos 2\pi x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to (1/2)^-} (tg\ \pi x + \cos 2\pi x) = +\infty \end{array}\right\} \text{ Las rectas } y = \frac{1}{2} + k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}, \text{ son asíntotas verticales.}$$

- Extremos relativos:

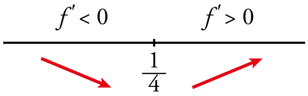
$$y' = \frac{\pi}{cos^2\, \pi x} - 2\pi \cdot sen\; 2\pi x = 0 \;\to\; \frac{1}{cos^2\, \pi x} - 4sen\; \pi x \cdot cos\; \pi x = 0 \;\to$$

$$\to\; 1 - 4sen\; \pi x \cdot cos^3\, \pi x = 0 \;\underset{(t\, =\, cos\, \pi x)}{\longrightarrow}\; 1 - 4\sqrt{1 - t^2}\, t^3 = 0 \;\to\; \sqrt{1 - t^2}\, t^3 = \frac{1}{4}$$

$$\to\; (1 - t^2)\, t^6 = \frac{1}{16} \;\to\; t^6 - t^8 = \frac{1}{16} \;\to\; t = -\frac{\sqrt{2}}{2},\; t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\; \pi x = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\to\; \pi x = \frac{\pi}{4} \;\to\; x = \frac{1}{4} \;\to\; \frac{1}{cos^2\, (\pi/4)} - 4sen\, \frac{\pi}{4} \cdot cos\, \frac{\pi}{4} = 0$$

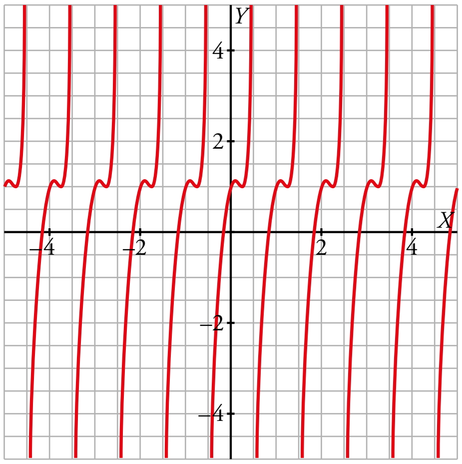
$$cos\; \pi x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\to\; \pi x = \frac{3\pi}{4} \;\to\; x = \frac{3}{4} \;\to\; \frac{1}{cos^2\, (3\pi/4)} - 4sen\, \frac{3\pi}{4} \cdot cos\, \frac{3\pi}{4} = 4 \;\; \text{(no vale)}$$



$$x = \frac{1}{4},\; f\left(\frac{1}{4}\right) = tg\, \frac{\pi}{4} + cos\, \frac{\pi}{2} = 1 \;\to\; \left(\frac{1}{4}, 1\right) \;\; \text{es un mínimo relativo.}$$

Debido al comportamiento de la función en las asíntotas verticales, debe tener un máximo para algún valor de $x < \frac{1}{4}$.

Por otro lado, $f'(0) = \pi > 0$. Así, entre $x = 0$ y $x = \frac{1}{4}$ estaría el máximo, que solo se puede calcular por aproximación.



Funciones con valor absoluto y funciones a trozos

17 Representa esta función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus extremos relativos. ¿Tiene algún punto de inflexión?

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Si $x < 0$, es una parábola abierta hacia abajo:

  Vértice: $f'(x) = -2x - 2$; $-2x - 2 = 0 \;\to\; x = -1,\; f(-1) = 3$

  Cortes con el eje: $-x^2 - 2x + 2 = 0 \;\to\; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{-2} \left\langle \begin{array}{l} x \approx 0{,}73 \;\; \text{(no vale por ser } 0{,}73 > 0) \\ x \approx -2{,}73 \end{array} \right.$

- Si $x \geq 0$, es una parábola abierta hacia arriba:

  Vértice: $f'(x) = 2x - 2$; $2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$, $f(1) = 1$

  Cortes con el eje X: $x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$ → No tiene solución. No corta al eje X.

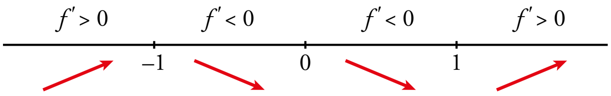
  Corte con el eje Y: $0 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 \rightarrow (0, 2)$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$f'(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

  $f'(0^-) = -2 = f'(0^+) \rightarrow$ Es derivable en $x = 0$.

- Signo de $f'(x)$:



  Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

  Decrece en $(-1, 1)$.

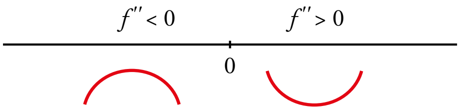
  Tiene un máximo en $(-1, 3)$ y un mínimo en $(1, 1)$.

- Puntos de inflexión:

  $$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

  $f''(0^-) \neq f''(0^+)$. No existe $f''(0)$.

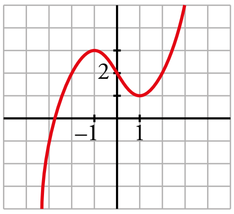
  Signo de $f''(x)$:



  La función es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$.

  En $(0, 2)$ tiene un punto de inflexión.

- Representación:



18 **Representa la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudia sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento, sus extremos relativos y su curvatura.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Continuidad:

  Si $x \neq 0$, f es continua por estar definida por polinomios.

Si $x = 0$:

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x \to 0^-} x^3 - 3x + 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x-1)^2 = 1 \\ f(0) = (0-1)^2 = 1 \end{matrix}\right\} \text{ Como } \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0),\ f \text{ es continua en } x = 0.$$

- Crecimiento y decrecimiento:

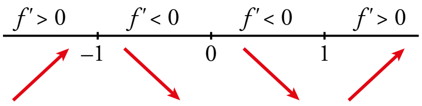
$$f'(x) = \left.\begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si } x < 0 \\ 2(x-1) & \text{si } x > 0 \end{cases}\right\} \left.\begin{matrix} f'(0^-) = -3 \\ f'(0^+) = -2 \end{matrix}\right\}$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, f no es derivable en $x = 0$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 & \begin{cases} x = 1 \text{ (no vale porque tiene que ser } x < 0) \\ x = -1,\ f(-1) = 3 \end{cases} \\ 2(x-1) = 0 & \rightarrow\ x = 1,\ f(1) = 0 \end{cases}$$

Signo de f':



Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Decrece en $(-1, 1)$.

Máximo en $(-1, 3)$.

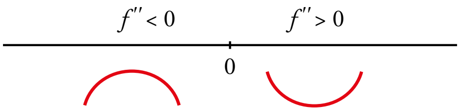
Mínimo en $(1, 0)$.

- Curvatura:

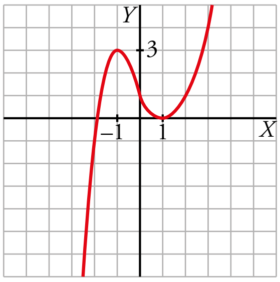
$$f''(x) = \left.\begin{matrix} 6x & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} f''(0^-) = 0 \\ f''(0^+) = 2 \end{matrix}\right\}$$

$f''(0^-) \neq f''(0^+)$. Por tanto, no existe $f''(0)$.

Signo de f'':



Hay un punto de inflexión en $(0, 1)$.



19 Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \boldsymbol{sen\ x} & \textbf{si } x \in [-2\pi, 0) \\ x^2 - 2x & \textbf{si } x \in [0, 3] \end{cases}$$

Determina los puntos de corte con los ejes y sus extremos relativos. Dibuja su gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} sen\ x & \text{si } x \in [-2\pi, 0) \\ x^2 - 2x & \text{si } x \in [0, 3] \end{cases}$$

- Cortes con los ejes:

$x = 0,\ f(0) = 0$

$$y = 0 \left\langle \begin{array}{l} sen\ x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -2\pi \to (-2\pi, 0) \\ x = -\pi \to (-\pi, 0) \end{array} \right. \\ x^2 - 2x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \to (0, 0) \\ x = 2 \to (2, 0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Extremos relativos:

$$f'(x) = \begin{cases} cos\ x & \text{si } x \in [-2\pi, 0) \\ 2x - 2 & \text{si } x \in (0, 3] \end{cases}$$

$f'(0^-) = cos\ 0 = 1$

$f'(0^+) = 2 \cdot 0 - 2 = -2$

$f'(0^-) \neq f'(0^+)$ → No existe $f'(0)$.

$$f'(x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} cos\ x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2},\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \\ x = -\frac{3\pi}{2},\ f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \end{array} \right. \\ 2x - 2 = 0 \to x = 1,\ f(1) = 1 - 2 = -1 \end{array} \right.$$

Comprobamos si son máximos o mínimos en $f''(x)$:

$$f''(x) = \begin{cases} -sen\ x & \text{si } x \in [-2\pi, 0) \\ 2 & \text{si } x \in (0, 3] \end{cases}$$

$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$

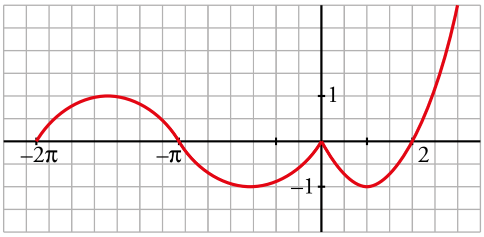
$f''\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -1 < 0$

$f''(1) = 2 > 0$

Máximo en $\left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right)$.

Mínimos en $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$ y $(1, -1)$.

- Representación:



20 Considera la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x<0\\ -x+1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty, 0]$, estudia si tiene puntos de corte con los ejes, si la función crece o decrece, los puntos de inflexión y si tiene asíntotas. Dibuja la gráfica en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x<0\\ -x+1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

- Si $x \in (-\infty, 0)$, $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

  Si $x = 0$, $y = -x + 1 = 1$

  Cortes con los ejes:

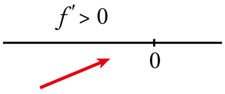
  $x = 0$, $y = 1 \rightarrow (0, 1)$

  $y = 0 \rightarrow \dfrac{1}{x^2+1} = 0 \rightarrow$ No tiene solución. No corta al eje Y.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $y' = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$; $\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$, $f(0) = 1$

  Signo de $f'(x)$:

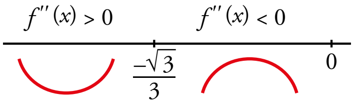
  

  La función es creciente.

- Puntos de inflexión:

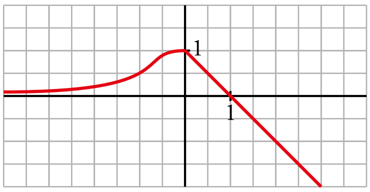
  $f''(x) = \dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$; $\dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow x^2 = \dfrac{1}{3} \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \text{ (no vale)} \\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

  Signo de $f''(x)$:

  Punto de inflexión: $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right) \approx (-0{,}58; 0{,}75)$

- Representación:

21 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables:

a) $y = x + |x + 2|$ **b)** $y = 2x - |x - 3|$

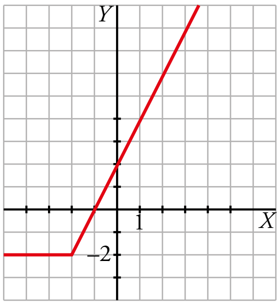
c) $y = |x| + |x - 3|$ **d)** $y = x|x - 1|$

a) $y = x + |x + 2|$

Como $|x + 2| = 0 \Leftrightarrow x = -2$, estudiamos f a la izquierda y a la derecha de –2 para definirla por intervalos.

$-x-2$		$x+2$
x	-2	x

Sumamos: $\begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ 2x + 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$



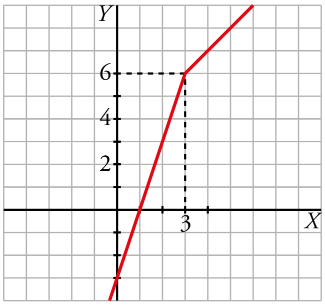
No es derivable en $x = -2$.

b) $2x - |x - 3|$

Estudiamos la función para valores menores y mayores que 3.

$-x+3$		$x-3$
$2x$	3	$2x$

Restamos: $\begin{cases} 2x - (-x + 3) = 3x - 3 \\ 2x - (x - 3) = x + 3 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{si } x < 3 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$



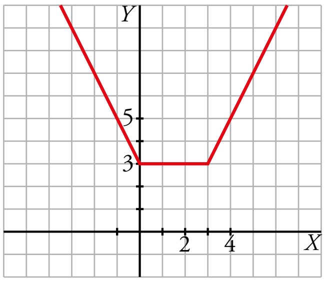
No es derivable en $x = 3$.

c) $y = |x| + |x - 3|$

Como $|x| = 0$ en $x = 0$ y $|x - 3| = 0$ en $x = 3$, estudiamos f a la izquierda y a la derecha de esos puntos.

$-x$		x		x
	0		3	
$-x+3$		$-x+3$		$x-3$

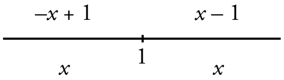
Sumamos: $\begin{cases} -x + (-x + 3) = -2x + 3 \\ x + (-x + 3) = 3 \\ x + (x - 3) = 2x - 3 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



No es derivable en $x = 0$ ni en $x = 3$.

d) $y = x|x - 1|$

Estudiamos f a la derecha y a la izquierda de $x = 1$.



Multiplicamos: $\begin{cases} x(-x+1) = -x^2 + x \\ x(x-1) = x^2 - x \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- $y = -x^2 + x$ es una parábola abierta hacia abajo:

  Vértice: $-2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

  Cortes con OX:

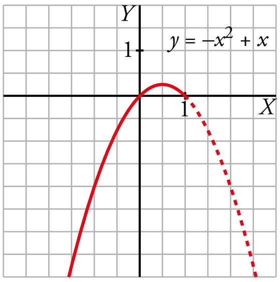
  $-x^2 + x = 0 \rightarrow x(-x + 1) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 1$

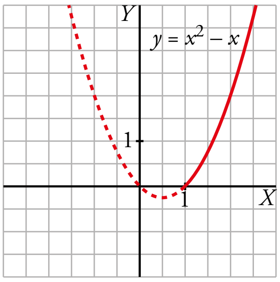
- $y = x^2 - x$ es una parábola abierta hacia arriba:

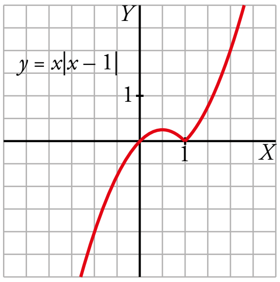
  Vértice: $2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ (no vale, ya que debe ser $x \geq 1$)

  Cortes con OX:

  $x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ x = 1 \end{cases}$







No es derivable en $x = 1$.

22 **Representa gráficamente cada una de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{1}{|x| - 2}$

b) $y = \dfrac{|2x|}{x^2 + 1}$

a) $y = \dfrac{1}{|x| - 2}$

Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{-x - 2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x - 2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si $x < 0$, $y = \dfrac{1}{-x - 2} = \dfrac{-1}{x + 2}$:

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-2\}$
- Asíntota vertical:

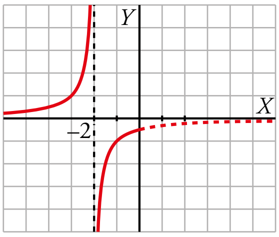
  $$\lim_{x \to -2} f(x) \begin{cases} \text{Si } x < -2,\ f(x) \to +\infty \\ \text{Si } x > -2,\ f(x) \to -\infty \end{cases}$$

  $x = -2$ es una asíntota vertical.

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x+2} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ $(f(x) > 0)$.



Si $x \geq 0$, $y = \dfrac{1}{x-2}$:

- Dominio: $\mathbb{R} - \{2\}$
- Asíntota vertical:

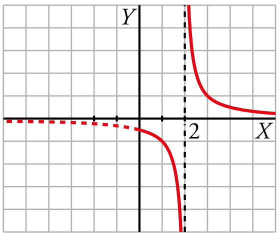
$$\lim_{x \to 2} f(x) \begin{cases} \text{Si } x < 2, & f(x) \to -\infty \\ \text{Si } x > 2, & f(x) \to +\infty \end{cases}$$

$x = -2$ es una asíntota vertical.

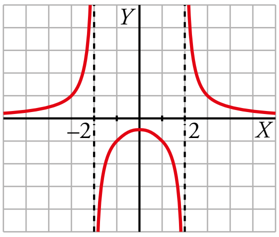
- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ $(f(x) > 0)$.



La gráfica de $y = \dfrac{1}{|x| - 2}$ es:



b) $y = \dfrac{|2x|}{x^2+1}$

Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si $x < 0$, $y = \dfrac{-2x}{x^2+1}$:

- Dominio: $\mathbb{R}$

- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{x^2+1} = 0$$

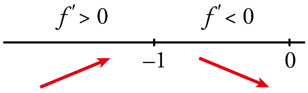
$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ $(y > 0)$.

- Puntos singulares:

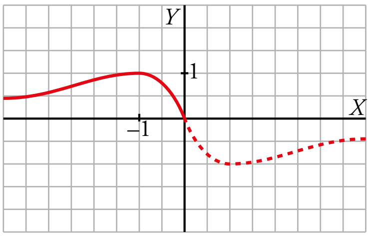
$$f'(x) = \frac{-2(x^2+1) + 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2 + 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2} = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 1 \;\; (\text{no vale, } 1 > 0) \\ x = -1, \;\; f(-1) = 1 \end{array} \right.$$

Signo de f':



Máximo en (–1, 1).



Si $x \geq 0$, $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$:

- Dominio: $\mathbb{R}$
- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$$

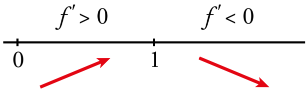
$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ $(y > 0)$.

- Puntos singulares:

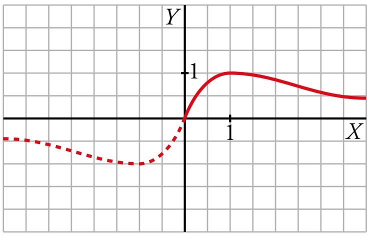
$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; -2x^2 + 2 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -1 \;\; (\text{no vale, } -1 < 0) \\ x = 1, \;\; f(1) = 1 \end{array} \right.$$

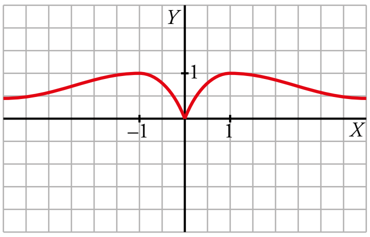
Signo de f':



Máximo en (1, 1).



La gráfica de $y = \dfrac{|2x|}{x^2+1}$ es:



23 **Considera la función $f(x) = x^2|x-3|$:**

a) Halla los puntos donde f no es derivable.

b) Calcula sus máximos y mínimos.

c) Represéntala gráficamente.

a) $$f(x) = \left\{\begin{matrix} x^2(-x+3) & \text{si } x < 3 \\ x^2(x-3) & \text{si } x \ge 3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} -x^3+3x^2 & \text{si } x < 3 \\ x^3-3x^2 & \text{si } x \ge 3 \end{matrix}\right.$$

Si $x \neq 3$, tenemos que $f(x)$ es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2+6x & \text{si } x < 3 \\ 3x^2-6x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{matrix} f'(3^-) = -9 \\ f'(3^+) = 9 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} f'(3^-) \neq f'(3^+) \\ f(x) \text{ no es derivable en } x = 3 \text{ (Punto } (3, 0)). \end{matrix}$$

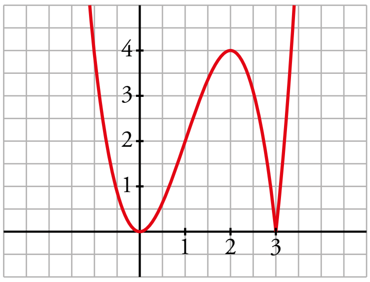
b) $$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} -3x^2+6x = 0 \quad \text{si } x < 3 \\ 3x(-x+2) = 0 \;<\; \begin{matrix} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow (2, 4) \end{matrix} \\ 3x^2-6x = 0 \quad \text{si } x > 3 \rightarrow \text{ninguno} \end{cases}$$

Como $f(x) \ge 0$ para todo x, tenemos que:

$f(x)$ tiene un mínimo en (0, 0) y otro en (3, 0), y tiene un máximo en (2, 4).

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Uniendo todo lo anterior, llegamos a la gráfica:



24 **Representa la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{|x+3|}{1+|x|}$$

$$|x+3| = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x < -3 \\ x+3 & \text{si } x \ge -3 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|x+3|}{1+|x|} = \begin{cases} \dfrac{-x-3}{1-x} & \text{si } x < -3 \\ \dfrac{x+3}{1-x} & \text{si } -3 \le x < 0 \\ \dfrac{x+3}{1+x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

- El dominio de definición es $\mathbb{R}$.
- Corte con el eje Y: $x = 0$, $y = 3$

  Cortes con el eje X:

  $y = 0 \rightarrow \dfrac{|x+3|}{1+|x|} = 0 \rightarrow |x+3| = 0 \rightarrow x = -3$
- No tiene asíntotas verticales.

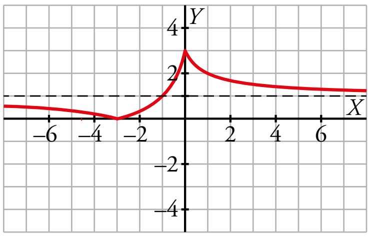
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|x+3|}{1+|x|} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{1+x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x+3|}{1+|x|} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x-3}{1-x} = 1 \end{array}\right\}$$

La recta $y = 1$ es la asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

- $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-4}{(1-x)^2} & \text{si } x < -3 \\ \dfrac{4}{(1-x)^2} & \text{si } -3 < x < 0 \\ \dfrac{-2}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$f(x)$ es creciente en el intervalo $(-3, 0)$.

$f(x)$ es decreciente en los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(0, +\infty)$.



25 **Representa la función: $f(x) = -|x^3 - x^2 + 2|$**

Para representarla, dibujamos la gráfica de la función $y = x^3 - x^2 + 2$. La gráfica de $f(x)$ coincidirá con la de y en la zona donde esta esté por debajo del eje X y con su simétrica respecto del eje X si la de y está por encima del mismo.

Analicemos la función polinómica $y = x^3 - x^2 + 2$:

- Corte con el eje Y: $x = 0$, $y = 2$

  Cortes con el eje X: $x^3 - x^2 + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

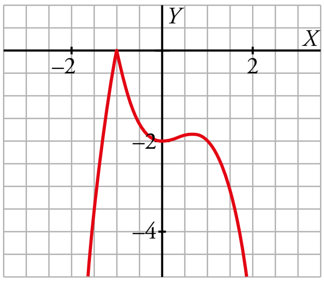
$y' = 3x^2 - 2x,\ \ y' = 0 \ \rightarrow\ 3x^2 - 2x = 0 \ \rightarrow\ x = 0,\ \ x = \dfrac{2}{3}$

$y'' = 6x - 2$

$x = 0 \ \rightarrow\ y'' = -2 < 0$ (0, 2) es un máximo relativo.

$x = \dfrac{2}{3} \ \rightarrow\ y'' = 2 > 0 \ \rightarrow\ y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + 2 = \dfrac{50}{27} \approx 1,85;\ \left(\dfrac{2}{3}; 1,85\right)$ es un mínimo relativo.

Ahora tomamos el módulo de esta función y cambiamos el signo.



Página 323

Para resolver

26 **Estudia el dominio de definición, las asíntotas y los extremos de cada una de estas funciones y, con esa información, relaciónalas con sus respectivas gráficas:**

a) $y = \dfrac{1}{sen\ x}$

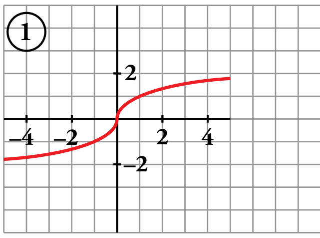
b) $y = xe^x$

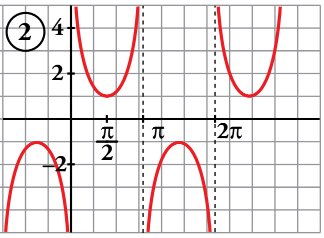
c) $y = sen\ \dfrac{x}{2}$

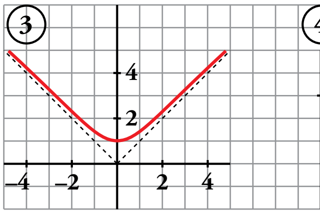
d) $y = \sqrt[3]{x}$

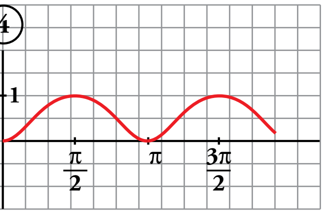
e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

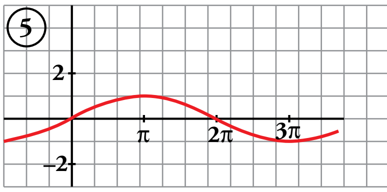
f) $y = sen^2\ x$

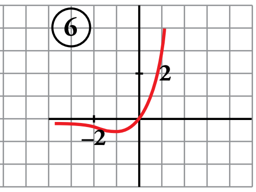












a) $y = \dfrac{1}{sen\ x}$

- Dominio: $sen\ x = 0 \ \rightarrow\ x = 0 + \pi k;\ \ k \in \mathbb{Z}$

  $Dominio = \mathbb{R} - \{\pi k\},\ \ k \in \mathbb{Z}$
- Asíntotas:

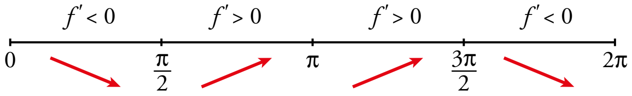
  $x = \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$ son asíntotas verticales.

  No hay más asíntotas.
- Extremos:

  $f'(x) = \dfrac{-cos\ x}{sen^2\ x}$

  $f'(x) = 0 \ \rightarrow\ cos\ x = 0 \begin{cases} x = \pi/2 + 2\pi k \\ x = 3\pi/2 + 2\pi k \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$

Signo de $f'(x)$ en $(0, 2\pi)$:



$f(x)$ es periódica de período 2π.

$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Es creciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Tiene un mínimo en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Tiene un máximo en $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$

- Gráfica → ②.

b) $y = xe^x$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

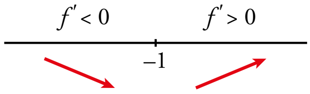
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \to \text{Rama parabólica.}$$

- Extremos:

$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$f'(x) = 0 \to 1 + x = 0 \to x = -1$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciene en $(-\infty, -1)$.

Es creciente en $(-1, +\infty)$.

Tiene un mínimo en $\left(-1, \frac{-1}{e}\right)$.

- Gráfica → ⑥.

c) $y = sen\ \frac{x}{2}$

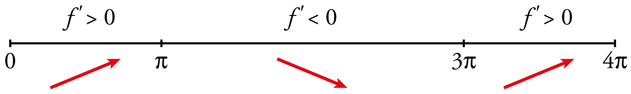
- Dominio: $\mathbb{R}$
- Asíntotas: No tiene.
- Extremos:

$$f'(x) = \frac{1}{2} cos\ \frac{x}{2}$$

$$f'(x) = 0 \to cos\ \frac{x}{2} = 0 \to \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \to x = \pi + 2\pi k$$

$f(x)$ es periódica de período 4π.

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$.

Es decreciente en $(\pi, 3\pi)$.

Tiene un máximo en $(\pi, 1)$.

Tiene un mínimo en $(3\pi, -1)$.

- Gráfica → ⑤.

d) $y = \sqrt[3]{x}$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Asíntotas: No tiene.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \to \text{Ramas parabólicas.}$$

- Extremos:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \to f(x) \text{ no es derivable en } x = 0.$$

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

$f(x)$ es creciente.

- Gráfica → ①.

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Simetría:

$f(-x) = f(x) \to f(x)$ es par: simétrica respecto al eje Y.

- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2+1} - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

$y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > x)$.

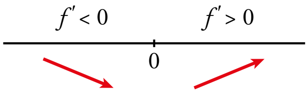
Por simetría, $y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -x)$.

- Extremos:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$f'(x) = 0 \to x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$.

Es creciente en $(0, +\infty)$.

Tiene un mínimo en $(0, 1)$.

- Gráfica → ③.

f) $y = sen^2\, x$

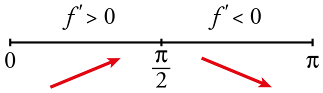
- Dominio: $\mathbb{R}$
- Asíntotas: No tiene.
- Extremos:

$f'(x) = 2sen\, x \cos x = sen\, 2x$

$f'(x) = 0 \to sen\, 2x = 0 \to 2x = 0 + \pi k \to x = \frac{\pi}{2}k,\; k \in \mathbb{Z}$

$f(x)$ es periódica de período π.

Signo de $f'(x)$ en $(0, \pi)$:



$f(x)$ es creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Es decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Tiene un máximo en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(\pi, 0)$.

- Gráfica → ④.

27 Recuerda que el seno hiperbólico y el coseno hiperbólico se definían así:

$$senh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad cosh\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Estudia los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de estas funciones y represéntalas gráficamente.

$senh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

- $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$f'(x) = 0 \to e^x + e^{-x} = 0 \to$ No tiene solución, luego no hay máximos ni mínimos.

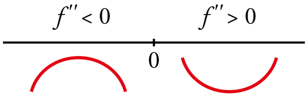
$f'(x) > 0$ Para todo x, $f(x)$ es creciente.

- $f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$f''(x) = 0 \to e^x - e^{-x} = 0 \to e^x - \frac{1}{e^x} = 0 \to e^{2x} - 1 = 0 \to$

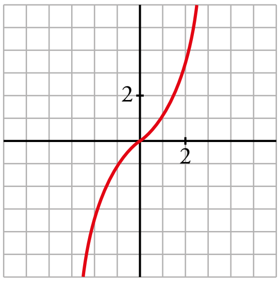
$\to e^{2x} = 1 \to 2x = 0 \to x = 0 \to y = 0$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en (0, 0).

- Gráfica:

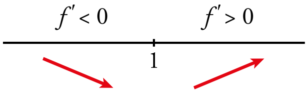


$cosh\ x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

- $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

  $f'(x) = 0 \to e^x - e^{-x} = 0 \to x = 0 \to y = 1$

  Signo de $f'(x)$:

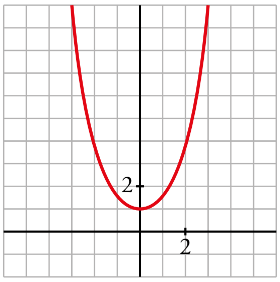


Hay un mínimo en (0, 1).

- $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

  $f''(x) = 0 \to$ no tiene solución, luego no hay puntos de inflexión.

- Gráfica:



28 **Determina las asíntotas de las siguientes funciones:**

a) $\boldsymbol{y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{3x}}$

b) $\boldsymbol{y = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{x}}$

a) Dominio: $(-\infty) \cup (0, 1]$

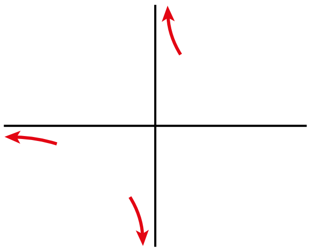
- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x}}{3x} = \pm\infty \begin{cases} \text{Si } x < 0 & y \to -\infty \\ \text{Si } x > 0 & y \to +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{3x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ $(y < 0)$.



b) Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x} = \pm\infty \begin{cases} \text{Si } x < 0 & y \to -\infty \\ \text{Si } x > 0 & y \to +\infty \end{cases}$$

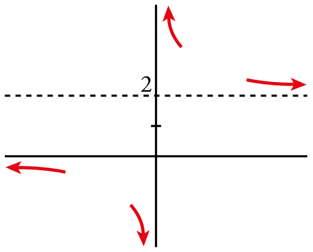
- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x} = 2$$

$y = 2$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ $(y > 2)$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2+1}}{-x} = 1 - 1 = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ $(y < 0)$.



29 **Realiza un estudio y representa cada una de las siguientes funciones:**

a) $y = ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ **b)** $y = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ **c)** $y = ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ **d)** $y = \dfrac{e^{|x-1|}}{x^2+2x-3}$

a) • Dominio de definición:

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0 \to x^2 - 1 > 0 \to (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

La función tiene simetría par. Podemos limitarnos a estudiarla en el intervalo $(1, +\infty)$.

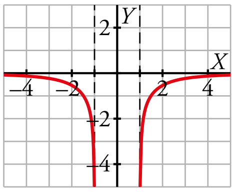
- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to 1^+} ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = -\infty \to \text{Las rectas } x = 1,\ x = -1 \text{ son las asíntotas verticales de la función.}$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = 0 \to \text{La recta } y = 0 \text{ es la asíntota horizontal cuando } x \to \pm\infty.$$

- $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2-1)(x^2+1)} \to f(x)$ es creciente en el intervalo $(1, +\infty)$.



b) • El dominio de definición es $\mathbb{R}$.

- Corte con el eje Y: $x = 0$, $y = 0$

Cortes con el eje X:

$$y = 0 \to \frac{e^x-1}{e^x+1} = 0 \to x = 0$$

- No tiene asíntotas verticales.

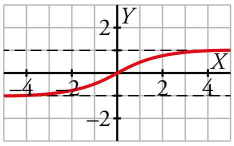
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-1/e^x}{1+1/e^x} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = -1$$

Las rectas $y = 1$ y $y = -1$ son las asíntotas horizontales cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, respectivamente.

- $y' = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2} \to y$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.



c) • Dominio de definición:

$$\frac{x}{x+1} > 0 \to (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to -1^-} ln \left(\frac{x}{x+1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} ln \left(\frac{x}{x+1}\right) = -\infty$$

Las rectas $x = -1$ y $x = 0$ son las asíntotas verticales de la función.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} ln \left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$$

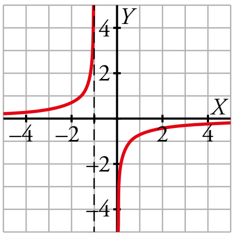
$$\lim_{x \to -\infty} ln \left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$$

La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal de la función.

- $y' = \dfrac{1}{x(x+1)}$

Si $x > 0 \to y' > 0 \to y$ es creciente en el intervalo $(0, +\infty)$.

Si $x < -1 \to y' > 0 \to y$ es creciente en el intervalo $(-\infty, -1)$



d) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$

Teniendo en cuenta la definición de valor absoluto, $y = \begin{cases} \dfrac{e^{-x+1}}{x^2+2x-3} & \text{si } x < 1 \text{ y } x \neq -3 \\ \dfrac{e^{x-1}}{x^2+2x-3} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

- Corte con el eje Y: $x = 0,\ y = -\dfrac{e}{3}$
- Asíntotas verticales:

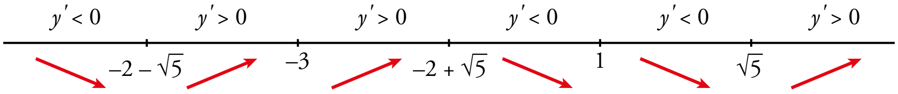
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -3^-} \frac{e^{-x+1}}{x^2+2x-3} &= +\infty \\ \lim_{x \to -3^+} \frac{e^{-x+1}}{x^2+2x-3} &= -\infty \end{aligned}\right\} x = -3 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} \frac{e^{-x+1}}{x^2+2x-3} &= -\infty \\ \lim_{x \to 1^+} \frac{e^{-x+1}}{x^2+2x-3} &= +\infty \end{aligned}\right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

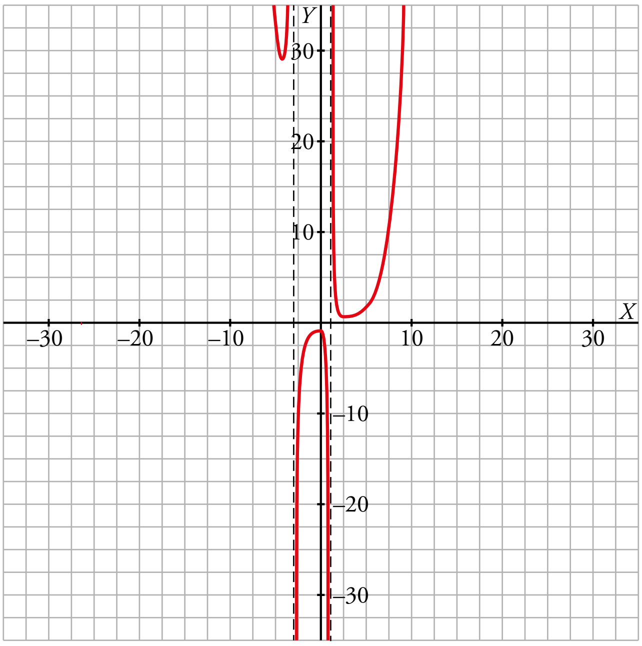
No tiene asíntotas horizontales ni oblicuas.

- $$y' = \begin{cases} \dfrac{e^{1-x}(-x^2-4x+1)}{(x^2+2x-3)^2} & \text{si } x < 1 \text{ y } x \neq -3 \\ \dfrac{e^{x-1}(x^2-5)}{(x^2+2x-3)^2} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

$$y' = 0 \to \begin{cases} \dfrac{e^{1-x}(-x^2-4x+1)}{(x^2+2x-3)^2} = 0 \to -x^2-4x+1=0 \to x=-2-\sqrt{5},\ x=-2+\sqrt{5} \\ \dfrac{e^{x-1}(x^2-5)}{(x^2+2x-3)^2} = 0 \to x^2-5=0 \to x=\sqrt{5} \end{cases}$$



Hallamos las ordenadas de los extremos relativos y se obtiene la gráfica:



30 **La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función:**

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x-k}$$

Halla el valor de k y representa la función así obtenida.

- Hallamos k:

Si $y = 2x + 6$ es asíntota oblicua, tenemos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = 6$$

Por tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-kx} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^2+1}{x-k} - 2x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+1-2x^2+2kx}{x-k} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2kx+1}{x-k} = 2k = 6 \to k = 3$$

También podríamos efectuar la división:

$$\begin{array}{rrl|l}
2x^2 + & & 1 & x-k \\ \cline{4-4}
-2x^2 + & 2kx & & 2x+2k \\
 & 2kx & +1 & \\
 & -2kx + & 2k^2 & \\
 & & 1+2k^2 &
\end{array}$$

La asíntota oblicua es $y = 2x + 2k$

$2x + 2k = 2x + 6 \;\to\; 2k = 6 \;\to\; k = 3$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x-3}$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{3\}$

- Asíntotas:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = 2x + 6$ es asíntota oblicua.

Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x + 6$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x + 6$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x(x-3)-(2x^2+1)}{(x-3)^2} = \frac{4x^2-12x-2x^2-1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-12x-1}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; 2x^2 - 12x - 1 = 0 \;\to\; x = \frac{12 \pm \sqrt{144+8}}{4} \begin{cases} x = 6,08 \\ x = -0,08 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
↗	–0,08	↘	3	↘	6,08	↗

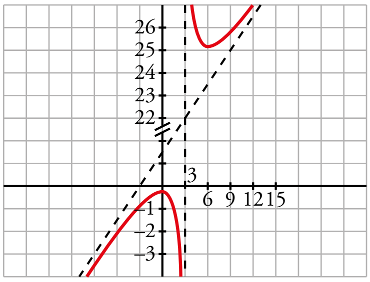
$f(x)$ es creciente en $(-\infty; -0{,}08) \cup (6{,}08; +\infty)$.

Es decreciente en $(-0{,}08; 3) \cup (3; 6{,}08)$.

Tiene un máximo en $(-0{,}08; -0{,}33)$.

Tiene un mínimo en $(6{,}08; 24{,}32)$.

- Gráfica:



31 **Sea la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-ax}$ con $a \neq 0$.**

a) Calcula el valor de a para que esta función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Clasifica los extremos relativos cuando $a = 2$.

a) $f(x) = x^2 \cdot e^{-ax}$

$f'(x) = 2x \cdot e^{-ax} - ax^2 \cdot e^{-ax} = x \cdot e^{-ax}(2 - ax)$

Para que tenga tal extremo relativo, debe ser:

$f'(2) = 0 \ \to \ 2e^{-2a} \cdot (2 - 2a) = 0 \ \to \ 2 - 2a = 0 \ \to \ a = 1$

b) $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$

$f'(x) = 2x \cdot e^{-2x} \cdot (1 - x),\ f'(x) = 0 \ \to \ x = 0,\ x = 1$

$f''(x) = 2e^{-2x} \cdot (2x^2 - 4x + 1)$

$f''(0) = 2 > 0 \ \to \ x = 0$ es un mínimo relativo.

$f''(1) = -2e^{-2} < 0 \ \to \ x = 1$ es un máximo relativo.

32 **Dada la función:**

$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$$

calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(-2, -6)$ y tenga, en ese punto, tangente horizontal. Para esos valores de a y b, represente la función.

$f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x};\ f'(x) = a - \dfrac{8}{x^2}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pasa por } (-2, -6),\ f(-2) = -6 \ \to \ -2a + b - 4 = -6 \\ \text{Tangente horizontal } \to \ f'(-2) = 0 \ \to \ a - 2 = 0\end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l}-2a + b = -2 \\ a = 2\end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{l}a = 2 \\ b = 2\end{array}\right\}$$

Para estos valores, queda: $f(x) = 2x + 2 + \dfrac{8}{x}$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Asíntotas:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \ x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$f(x) = 2x + 2 + \dfrac{8}{x} \ \to \ y = 2x + 2$ es asíntota oblicua.

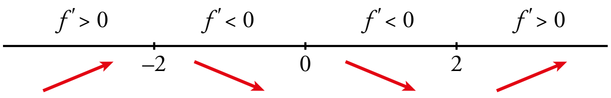
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x + 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x + 2$)

- Puntos singulares:

$f'(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \ \to \ 2x^2 - 8 = 0 \ \to \ x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

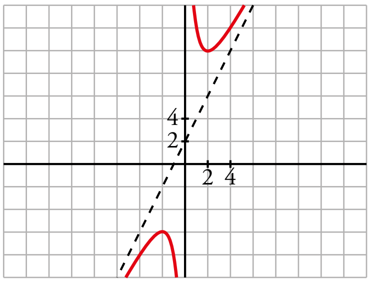
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

Tiene un máximo en $(-2, -6)$. Tiene un mínimo en $(2, 10)$.

- Gráfica:



33 **Halla los valores de a, b y c para los cuales la función:**

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$$

tiene como asíntota horizontal la recta $y = -1$ y un mínimo en el punto (0, 1).

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$$

Si $y = -1$ es asíntota horizontal $\rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4} = a \rightarrow a = -1$

Si tiene un mínimo en (0, 1), debe ser $f'(0) = 0$.

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x^2 - 4) - (ax^2 + bx + x)\,2x}{(x^2 - 4)^2} \rightarrow f'(0) = \frac{b(-4) - 0}{16} = \frac{-b}{4} = 0 \rightarrow b = 0$$

Además, $f(0) = 1 \rightarrow \frac{a \cdot 0 + b \cdot 0 + c}{-4} = 1 \rightarrow c = -4$

Por tanto, $f(x) = \frac{-x^2 - 4}{x^2 - 4}$

34 **Dada la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$$

a) Determina el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para ese valor de a, obtén los otros extremos relativos.

b) Obtén las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.

c) Esboza la gráfica de la función para $a = 1$.

a) $f(x) = \frac{a \cdot x^4 + 1}{x^3} = ax + \frac{1}{x^3}$

$f'(x) = a - \frac{3}{x^4}$

Como $x = 1$ es un extremo relativo, $f'(1) = 0 \rightarrow a - 3 = 0 \rightarrow a = 3$

$f'(x) = 3 - \frac{3}{x^4}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3 - \frac{3}{x^4} = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$

$f''(x) = \frac{12}{x^5}$

Si $x = -1 \rightarrow f''(-1) < 0 \rightarrow x = -1$ es un máximo relativo.

Si $x = 1 \rightarrow f''(1) > 0 \rightarrow x = 1$ es un máximo relativo.

b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^3}$

Veamos que la recta $x = 0$ es la asíntota vertical:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \left(x + \dfrac{1}{x^3}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x + \dfrac{1}{x^3}\right) = +\infty \end{array}\right\}$$

Como $f(x) = x + \dfrac{1}{x^3}$, es evidente que la recta $y = x$ es la asíntota oblicua de la función.

Posición:

Si $x \to +\infty$, entonces $f(x) - x = \dfrac{1}{x^3} > 0 \to$ La función queda por encima de la asíntota.

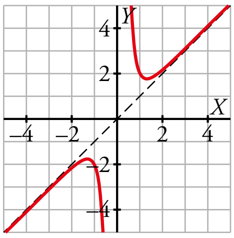
Si $x \to -\infty$, entonces $f(x) - x = \dfrac{1}{x^3} < 0 \to$ La función queda por debajo de la asíntota.

c) Para completar el estudio, podemos calcular los extrteremos relativos:

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x^4},\ f'(x) = 0 \to 1 - \frac{3}{x^4} = 0 \to x = -\sqrt[4]{3},\ x = \sqrt[4]{3}$$

$$x = -\sqrt[4]{3},\ y = -\sqrt[4]{3} - \frac{1}{\sqrt[4]{3}^3} \approx -1,76$$

$$x = \sqrt[4]{3},\ y = \sqrt[4]{3} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}^3} \approx 1,76$$



35 **Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva de ecuación $y = \dfrac{2x}{1 - x^2}$ para $x > 1$.**

En el punto $P\left(2, -\dfrac{4}{3}\right)$ la deja y se desplaza a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

a) Halla la ecuación de la tangente.

b) Si se desplaza de derecha a izquierda, halla el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P.

c) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, halla el punto en el que la partícula encuentra el eje X.

a) Pendiente de la recta tangente en $x = 2$:

$$f'(x) = \frac{2(1 - x^2) - 2x(-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{2x^2 + 2}{(1 - x^2)^2}$$

$$m = f'(2) = \frac{10}{9}$$

La ecuación de la recta tangente en P es:

$$y = -\frac{4}{3} + \frac{10}{9}(x - 2) \to y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$$

b) La asíntota vertical más próxima a P es $x = 1$. Tenemos que hallar el punto de intersección de $x = 1$ con la recta tangente anterior:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9} \\ x = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \frac{-22}{9} \\ x = 1 \end{array}\right\} \text{ El punto es } Q\left(1, \frac{-22}{9}\right).$$

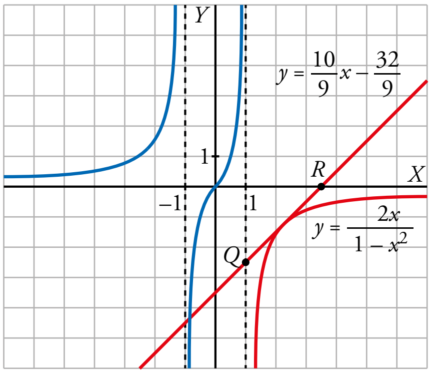
c) Tenemos que hallar el punto en el que la recta anterior corta al eje OX:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9} \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \frac{10}{9}x = \frac{32}{9} \to x = \frac{32}{10} = \frac{16}{5} \\ y = 0 \end{array}\right\} \text{ El punto es } R\left(\frac{16}{5}, 0\right).$$

Esta gráfica muestra la curva $y = \frac{2x}{1-x^2}$,

la recta tangente $y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$ y los

puntos $Q\left(1, \frac{-22}{9}\right)$ y $R\left(\frac{16}{5}, 0\right)$.



36 **La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo $t \in [0, +\infty)$ medido en segundos, por la función:**

$$N(t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$$

a) Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para qué t la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es esta concentración?

b) ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito?

a) $N(t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$

$N'(t) = \frac{120e^{-t}}{(2e^{-t}+1)^2}$ es siempre positivo para cualquier valor de t. Por tanto, $N(t)$ es creciente.

La concentración de nitrógeno es mínima para $t = 0$ y su valor es $N(0) = 20$.

b) $\lim_{t \to +\infty} \frac{60}{1 + 2e^{-t}} = 60$ es el valor al que tiende la concentración cuando el tiempo tiende a infinito.

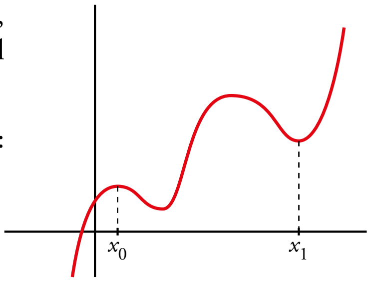
Página 324

Cuestiones teóricas

37 **¿Qué podemos decir del grado de una función polinómica con dos máximos y dos mínimos relativos? En esa función, ¿puede estar uno de los mínimos más alto que los máximos?**

- Si tiene dos máximos y dos mímimos relativos, y es polinómica, su derivada tiene, al menos, cuatro raíces; es decir, $f'(x)$ será, al menos, de grado 4. Por tanto, $f(x)$ será, al menos, de grado 5.
- Sí, podría haber un mínimo más alto que un máximo. Por ejemplo:

  El mínimo de x_1 está más alto que el máximo de x_0.



38 **Una función $f(x)$ tiene las siguientes características:**

$Dom\, f = \mathbb{R} - \{0\}$ y es continua y derivable en todo su dominio.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son seguras, cuáles son probables y cuáles son imposibles:

a) $f(x)$ es par.	**b) $f(x)$ es impar.**
c) No tiene máximos ni mínimos.	**d) Tiene un máximo y un mínimo.**
e) Corta al eje X en dos puntos.	**f) Corta el eje X al menos en dos puntos.**
g) Tiene, al menos, una asíntota vertical.	**h) Tiene solo una asíntota vertical.**
i) Tiene una asíntota oblicua.	**j) Es cóncava en $x < 0$ y convexa en $x > 0$.**

a) Imposible, porque, por ejemplo, en las proximidades de $x = 0$ no es simétrica respecto del eje vertical.

b) Probable, porque una función impar puede cumplir estas condiciones.

c) Probable, aunque esta afirmación no está relacionada con los datos del problema.

d) Probable, aunque esta afirmación no está relacionada con los datos del problema.

e) Probable, por su continuidad y su comportamiento a ambos lados del eje vertical.

f) Seguro. Por ser continua debe cortar al semieje negativo de las X al subir desde $-\infty$ (cuando $x \to -\infty$) hasta $+\infty$ (cuando $x \to 0^-$). Análogamente ocurre con el semieje positivo de las X.

g) Seguro. La recta $x = 0$ es una asíntota vertical de la función.

h) Seguro, ya que su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$ y es continua en él. Además, tiene una asíntota vertical, como hemos visto en el apartado anterior.

i) Probable. Puede ser también ramas parabólicas.

j) Probable.

39 **¿Cuántos puntos de inflexión puede tener, como máximo, una función polinómica de cuarto grado?**

Si $f(x)$ es un polinomio de cuarto grado, $f'(x)$ será un polinomio de tercer grado y $f''(x)$ será un polinomio de segundo grado.

Así, $f''(x)$ tendrá, a lo sumo, dos raíces.

Por tanto, $f(x)$ tendrá, como máximo, dos puntos de inflexión.

40 **Comprueba que la función $y = \dfrac{|x|}{x+1}$ tiene dos asíntotas horizontales.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\[2mm] \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

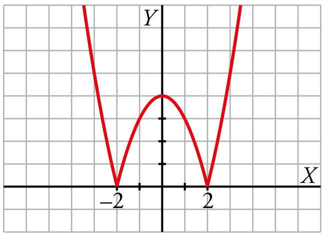
Por tanto:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1 \to y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1 \to y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

41 **Sobre la gráfica de $y = |x^2 - 4|$ indica los intervalos de concavidad y de convexidad. ¿Cuáles son sus puntos de inflexión?**

$$y = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



La gráfica es cóncava en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y es convexa en $(-2, 2)$. Los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ son puntos de inflexión (son también mínimos relativos). Podemos comprobarlo con f' y f'':

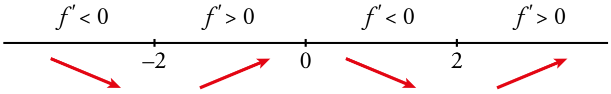
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases} \rightarrow f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

No existe $f''(-2)$ ni $f''(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -4 \\ f'(-2^+) = 4 \end{array}\right> \text{No existe } f'(-2).$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -4 \\ f'(2^+) = 4 \end{array}\right> \text{No existe } f'(2).$$

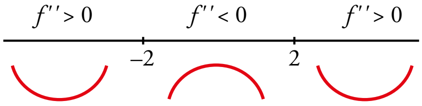
Signo de $f'(x)$: $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$



Mínimos en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.

Máximo en $(0, 4)$.

Signo de $f''(x)$:



Puntos de inflexión en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

42 **$y = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ no está definida en $x = 1$ ni en $x = -1$; sin embargo, tiene solo una asíntota vertical.**

Justifícalo.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

En $x = -1$ hay una discontinuidad evitable, no hay una asíntota.

43 **¿Cuántas asíntotas verticales puede tener una función? ¿Y horizontales?**

- Asíntotas verticales puede tener infinitas. (Como ejemplo, podemos considerar la función $y = \dfrac{1}{sen\ x}$, cuya gráfica está representada en el ejercicio 26, en la gráfica 2).
- Asíntotas horizontales puede tener, como máximo, dos: una cuando $x \to -\infty$ y otra cuando $x \to +\infty$.

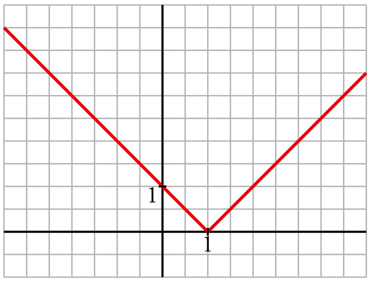
44 **Da un ejemplo de una función que tenga un mínimo en $x = 1$ y que no sea derivable en ese punto. Represéntala.**

$$y = |x - 1| = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

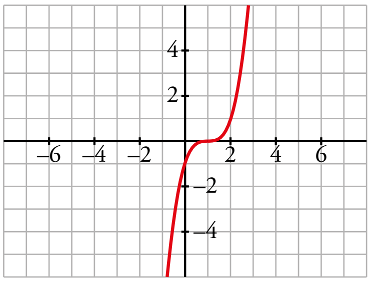
$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(x) > 0 \ \text{ para } \ x \neq 1 \end{array}\right\} \to \text{Hay un mínimo en } x = 1, \text{ en } (1, 0).$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 1$, pues $f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = 1$.

La gráfica es:



45 **Da un ejemplo de una función derivable en $x = 1$ con $f'(1) = 0$ que no tenga máximo ni mínimo en ese punto.**



Por ejemplo, $y = (x - 1)^3$.

$f'(x) = 3(x - 1)^2 \to f'(1) = 0$

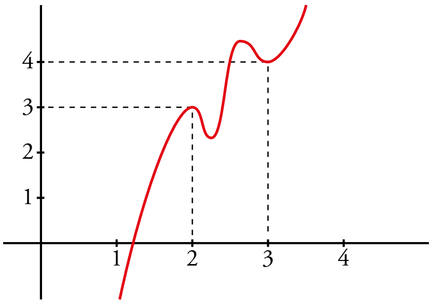
$f'(x) > 0$ para $x \neq 1 \to f(x)$ es creciente.

En $x = 1$ hay un punto de inflexión.

46 **Si es posible, dibuja una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga, al menos, un máximo relativo en (2, 3) y un mínimo relativo en (3, 4). Si la función fuera polinómica, ¿cuál debería ser, como mínimo su grado?**

$f(x)$ debe tener, al menos, dos máximos y dos mínimos en [0, 4], si es derivable.

Si $f(x)$ fuera un polinomio, tendría, como mínimo, grado 5 (pues $f'(x)$ se anularía, al menos, en cuatro puntos).



47 **¿Tiene $f(x) = x + e^{-x}$ alguna asíntota? Si es así, hállala.**

$f(x) = x + e^{-x}$

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- No tiene asíntotas verticales.
- $\lim_{x \to +\infty} (x + e^{-x}) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} (x + e^{-x}) = +\infty$

  No tiene asíntotas horizontales.
- Asíntotas oblicuas:

  $$m = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + e^{-x}}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x \cdot e^{x}} \right) = 1$$

  $$n = \lim_{x \to +\infty} (x + e^{-x} - x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

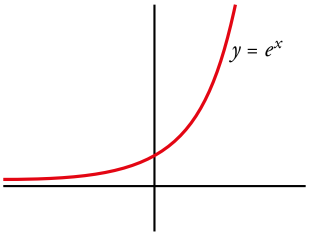
  $y = x$ es asíntota oblicua hacia $+\infty$.

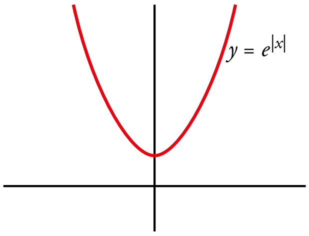
  No hay asíntota oblicua hacia $-\infty$ porque:

  $$m = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x + e^{-x}}{x} \right) = 1 + \infty = +\infty$$

48 **¿Son iguales las gráficas de $f(x) = e^{x}$ y $g(x) = e^{|x|}$? Justifica tu respuesta.**

No. Veamos sus gráficas:





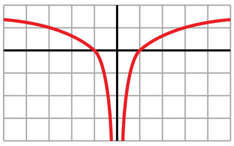
Por ejemplo, si $x = -3 \rightarrow e^{-3} \approx 0{,}048; \; e^{|-3|} \approx 20{,}08$

49 **Indica cuál de estas gráficas corresponde a $y = ln\,|x|$ y cuál a $y = |ln\,x|$. ¿Cuál es la ecuación de cada una de las otras dos?**

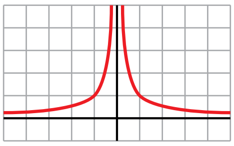
a)

b)

c)



d)



- $y = ln\,|x|$ es la c).
- $y = |ln\,x|$ es la a).

b) $y = |ln\,|x||$

d) $y = \dfrac{1}{|x|}$

50 **¿Qué tipo de simetría tienen las siguientes funciones?**

a) $y = sen^2\, x$ **b)** $y = |x| - 2$ **c)** $y = tg\, x$ **d)** $y = x^3 - x$

a) $y = sen^2\, x$

$f(-x) = sen^2\,(-x) = [sen\,(-x)]^2 \overset{(1)}{=} (-sen\, x)^2 = sen^2\, x$

(1) Porque $sen\,(-x) = -sen\, x$

Como $f(-x) = f(x)$, la gráfica de f es simétrica respecto al eje Y.

b) $y = |x| - 2$

$f(x) = |x| - 2 \to f(-x) = |-x| - 2 = |x| - 2$

Como $f(-x) = f(x)$, la gráfica de f es simétrica respecto al eje Y.

c) $y = tg\, x$

$f(x) = tg\, x;\ f(-x) = tg\,(-x) = -tg\, x = -f(x)$

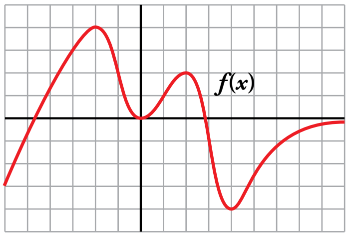
Como $f(-x) = -f(x)$, la gráfica de f es simétrica respecto al origen de coordenadas.

d) $y = x^3 - x$

$f(x) = x^3 - x \to f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$

Como $f(-x) = -f(x)$, la gráfica de f es simétrica respecto al origen de coordenadas.

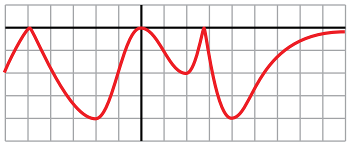
51 **Dada la función $f(x)$:**



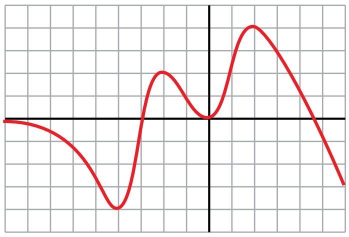
Indica qué gráfica corresponde a estas otras:

$f(-x)$ $f(|x|)$ $-|f(x)|$ $|f(x)|$

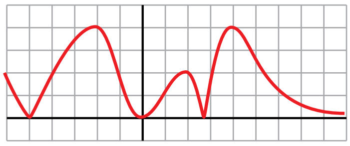
a)



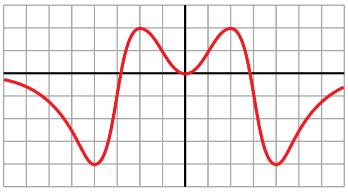
b)



c)



d)



a) $-|f(x)|$

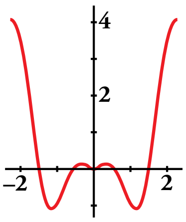
b) $f(-x)$

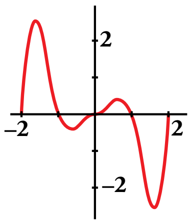
c) $|f(x)|$

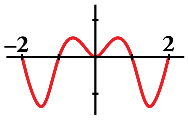
d) $f(|x|)$

Página 325

52 **Relaciona cada gráfica con su función.**







$f(x) = x \, sen\,(\pi x)$ $g(x) = x^2 \, sen\,(\pi x)$ $h(x) = x^2 \cos(\pi x)$

- $f(x)$ y $h(x)$ son funciones pares y $g(x)$ es impar.

  Por tanto, la gráfica de $g(x)$ ha de ser la b).

- $f(2) = 0 \rightarrow$ La gráfica de $f(x)$ es la c).

  Luego la gráfica de $h(x)$ es la a).

- Es decir: a) $h(x)$; b) $g(x)$; c) $f(x)$.

Para profundizar

53 **En el *Ejercicio resuelto 1* del apartado 10.5, vimos un sencillo procedimiento para calcular las asíntotas de la función $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ mediante los pasos siguientes:**

$$\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{(x-1)^2 - 1} \approx |x-1|$$

Averigua, de forma similar, las asíntotas de estas funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$

c) $y = \sqrt{x^2 + 4x}$

d) $y = \sqrt{4x^2 - x + 3}$

Indica la posición de cada curva respecto de las asíntotas.

a) $\sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1} = \sqrt{(x+1)^2 - 1} \approx \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$

La función $y = |x + 1|$ está formada por las dos asíntotas oblicuas de la función $y = \sqrt{x^2 + 2x}$.

b) $\sqrt{x^2 - 6x + 12} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 2} = \sqrt{(x-3)^2 + 2} \approx \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$

La función $y = |x - 3|$ está formada por las dos asíntotas oblicuas de la función $y = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$.

c) $y = \sqrt{x^2 + 4x} = \sqrt{x^2 + 4x + 4 - 4} = \sqrt{(x+2)^2 - 4} \approx \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$

La función es “un poco menor” que el valor absoluto porque se resta dentro del radiando. Por tanto, queda por debajo de las asíntotas oblicuas:

$y = x + 2$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

$y = -x - 2$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

d) $y = \sqrt{4x^2 - x + 3} = \sqrt{4x^2 - x + \frac{1}{16} + \frac{47}{16}} = \sqrt{\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{47}{16}} \approx \sqrt{\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2} = \left|2x - \frac{1}{4}\right|$

La función es “un poco mayor” que el valor absoluto porque se suma dentro del radicando. Por tanto, queda por encima de las asíntotas oblicuas:

$y = 2x - \frac{1}{4}$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

$y = -2x + \frac{1}{4}$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

54 **Aunque la palabra *asíntota* la hemos aplicado a rectas que se aproximan a una gráfica, tiene un significado más amplio: se dice que dos curvas son asintóticas cuando, al alejarse del origen, la distancia entre ellas tiende a cero.**

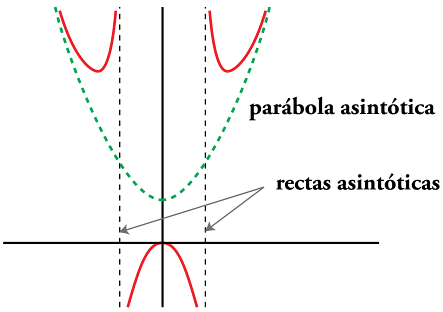
Por ejemplo, la parábola $y = x^2 + 1$ es asintótica a la función $y = \dfrac{x^4}{x^2-1}$ (revisa su gráfica en la página 310).

Es fácil comprobarlo efectuando el cociente:

$$\frac{x^4}{x^2-1} = x^2+1+\frac{1}{x^2-1}$$

La diferencia entre las dos ecuaciones, $\dfrac{1}{x^2-1}$, tiende a 0 cuando $x \to \pm\infty$. Además, toma valores positivos, por lo que la gráfica de $y = f(x)$ queda por encima de la parábola.

Este resultado permite representar la función de forma más precisa apoyándonos en la representación de la parábola:



a) Halla la parábola asintótica a $y = \dfrac{x^3-2x^2+x+8}{x}$. Determina la posición de la curva respecto de ella.

b) Representa la función utilizando esos datos, así como la asíntota vertical y el punto singular (único, en $x = 2$).

a) $y = \dfrac{x^3-2x^2+x+8}{x} = x^2-2x+1+\dfrac{8}{x}$

La parábola es $y = x^2 - 2x + 1$.

- Cuando $x \to -\infty$, la diferencia entre la función y la parábola, $\dfrac{8}{x}$, es negativa; luego la curva está por debajo de la parábola.
- Cuando $x \to +\infty$, la diferencia, $\dfrac{8}{x}$, es positiva; luego la curva está por encima de la parábola.

b) Asíntota vertical:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \displaystyle \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \; x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

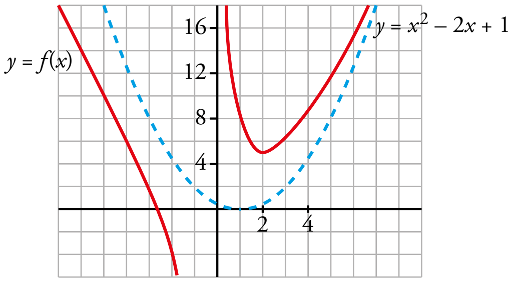
- Punto singular:

$$f'(x) = 2x-2-\frac{8}{x^2} = \frac{2x^3-2x^2-8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; 2x^3-2x^2-8 = 0 \;\to\; 2(x-2)(x^2+x+2) = 0 \;\to\; x = 2$$

Hay un mínimo en (2, 5).

- Gráfica:



55 **Estudia la posición relativa entre estas curvas y sus parábolas asintóticas. Representa la información obtenida:**

a) $y = \dfrac{x^4}{x^2+1}$ **b)** $y = \dfrac{x^3-1}{x}$ **c)** $y = \dfrac{x^4}{x^2-4}$

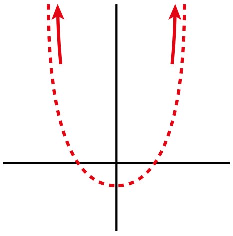
a) $y = \dfrac{x^4}{x^2+1}$ → Dividimos:

$$\begin{array}{ll} x^4 & \big|\,\underline{x^2+1} \\ \underline{-x^4-x^2} & \;\; x^2-1 \\ \quad -x^2 & \\ \quad \underline{x^2+1} & \\ \qquad 1 & \end{array}$$

Así, $y = \dfrac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \dfrac{1}{x^2+1}$

Parábola asintótica: $y = x^2 - 1$

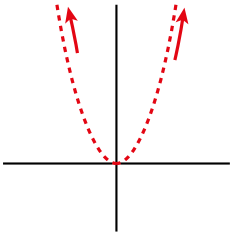
Posición:



b) $y = \dfrac{x^3-1}{x} = x^2 - \dfrac{1}{x}$

Parábola asintótica: $y = x^2$

Posición:



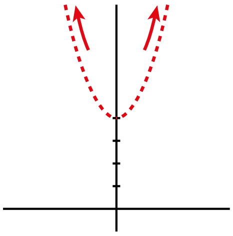
c) $y = \dfrac{x^4}{x^2-4}$ → Dividimos:

$$\begin{array}{ll} x^4 & \big|\,\underline{x^2-4} \\ \underline{-x^4+4x^2} & \;\; x^2+4 \\ \quad 4x^2 & \\ \quad \underline{-4x^2+16} & \\ \qquad 16 & \end{array}$$

Así: $y = \dfrac{x^4}{x^2-4} = x^2 + 4 + \dfrac{16}{x^2+4}$

Parábola asintótica: $y = x^2 + 4$

Posición:



Autoevaluación

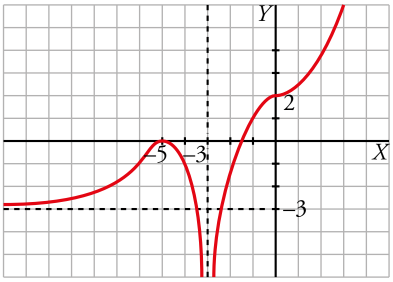
Página 325

1 Dibuja la gráfica de una función f de la que sabemos:

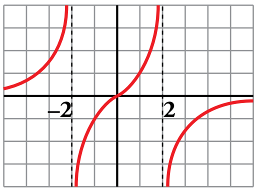
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -3, \quad \lim_{x \to -3} f(x) = -\infty$$

$$f'(-5) = 0; \ f'(0) = 0; \ f(-5) = 0; \ f(0) = 2$$

Tiene tangente horizontal en los puntos (–5, 0) y (0, 2). En el primero tiene un máximo, y en el segundo, un punto de inflexión.



2 Describe la gráfica de la siguiente función:



- El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

  Es una función impar, continua y derivable en su dominio.
- Tiene dos asíntotas verticales: las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

  $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

  $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

  La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal de la función cuando $x \to \pm\infty$.
- Es creciente en los intervalos $(-\infty, 2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$.

3 ¿Tiene $f(x) = x^3 + 2x + 4$ máximos y/o mínimos? ¿Y algún punto de inflexión? Estudia su curvatura y represéntala.

$f(x) = x^3 + 2x + 4$

- $f'(x) = 3x^2 + 2$

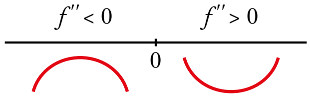
  $f'(x) = 0 \to 3x^2 = -2 \to$ no tiene solución.

  $f'(x) > 0$ para todo $x \to f(x)$ es creciente.

  No tiene máximos ni mínimos.
- $f''(x) = 6x$

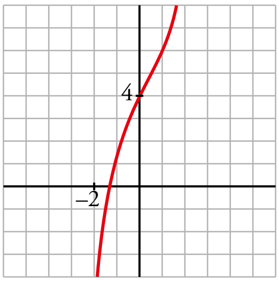
  $f''(x) = 0 \to 6x = 0 \to x = 6$

  Signo de $f''(x)$:



  Hay un punto de inflexión en (0, 4).
- Además, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- Gráfica:



4 Estudia las asíntotas y los puntos singulares de la función $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x+1}$ y represéntala gráficamente.

$$f(x) = \frac{(x+2)^2}{x+1}$$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-1\}$.
- Asíntota vertical: $x = 1$

Posición
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

- No tiene asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+2)^2}{x+1} = \pm\infty$$

- Asíntota oblicua:

$$\frac{(x+2)^2}{x+1} = x + 3 + \frac{1}{x+1}$$

La asíntota oblicua es $y = x + 3$.

Posición de la curva con respecto a la asíntota:

$$f(x) - (x+3) = \frac{1}{x+1} \begin{cases} \text{Si } x \to +\infty \ \to \ f(x) > x+3 \ \left(\text{porque } \dfrac{1}{x+1} > 0\right) \\ \text{Si } x \to -\infty \ \to \ f(x) < x+3 \ \left(\text{porque } \dfrac{1}{x+1} < 0\right) \end{cases}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2(x+2)(x+1) - (x+2)^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

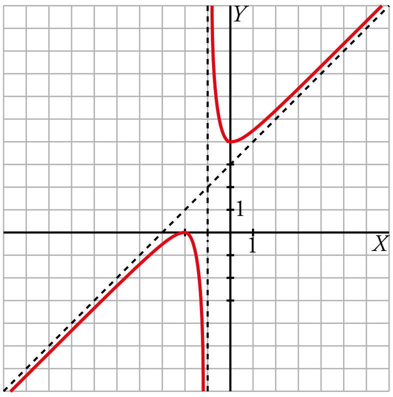
$$f'(x) = 0 \ \to \ x^2 + 2x = 0 \begin{cases} x = 0, \ f(0) = 4 \\ x = -2, \ f(-2) = 0 \end{cases}$$

Signo de f':

$f' > 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
↗	-2	↘	-1	↘	0	↗

Tiene un máximo en (–2, 0) y un mínimo en (0, 4).

- Gráfica:



5 **Representa la función $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$.**

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

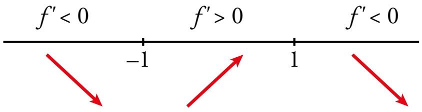
- Dominio = $\mathbb{R}$.
- No tiene asíntotas verticales, porque $e^x \neq 0$ para todo x.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal hacia $+\infty \rightarrow f(x) > 0$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota horizontal hacia $-\infty$.
- Puntos singulares:

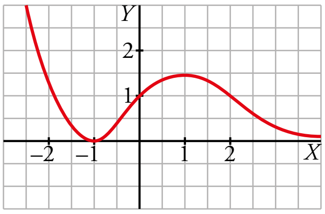
  $$f'(x) = \frac{2(x+1)e^x - (x+1)^2 e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x+2-(x+1)^2}{e^x} = \frac{-x^2+1}{e^x}$$

  $$f'(x) = 0 \rightarrow -x^2 + 1 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 1,\ f(1) = \dfrac{4}{e} \\ x = -1,\ f(-1) = 0 \end{array} \right.$$

  Signo de f':

  Mínimo: (–1, 0). Máximo: $\left(1, \dfrac{4}{e}\right)$
- Gráfica:

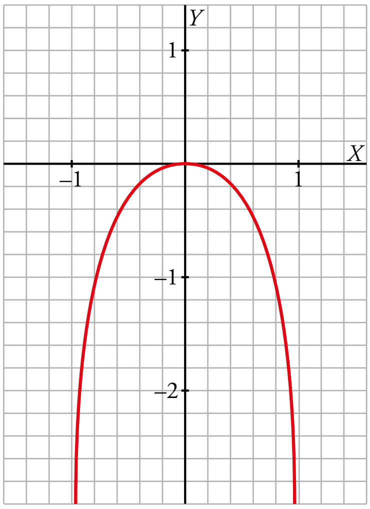
6 **Calcula los puntos de corte con los ejes y los puntos singulares de la función $y = ln(-x^2 + 1)$. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y esboza la gráfica.**

- *Dominio* = (–1, 1) $\rightarrow$ y es una función par.
- $f(x) = 0 \rightarrow f(x) = -x^2 + 1 = 1 \rightarrow x = 0$

  El único punto de corte con los ejes es (0, 0).
- $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0$

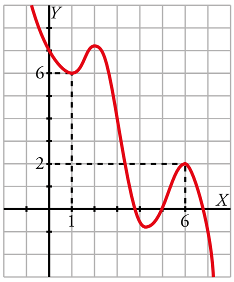
  $f''(x) = -\dfrac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0$ para todo x.

  Por tanto, (0, 0) es un máximo.
- f tiene dos asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 1$.



7 Dibuja una función continua en ℝ que tenga un mínimo relativo en (1, 6) y un máximo relativo en (6, 2). Si es un polinomio, ¿cuál será, como mínimo, su grado?

La función tendrá, como mínimo, cuatro puntos singulares, y para ello, su grado debe ser, al menos, 5.



8 Halla los máximos y los mínimos de $f(x) = x\sqrt{x+3}$. Indica si tiene asíntotas y represéntala gráficamente.

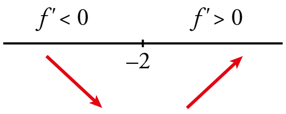
$f(x) = x\sqrt{x+3}$. Dominio = (–3, +∞)

- Hallamos los puntos singulares:

$$f'(x) = \sqrt{x+3} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2(x+3)+x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x+6=0 \;\rightarrow\; x=-2,\; f(-2)=-2$$

Signo de f':

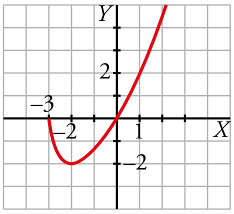


La función tiene un mínimo en (–2, –2).

- La función no tiene asíntotas:

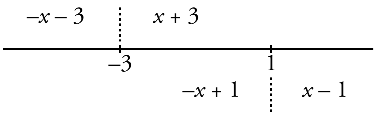
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

- Gráfica:



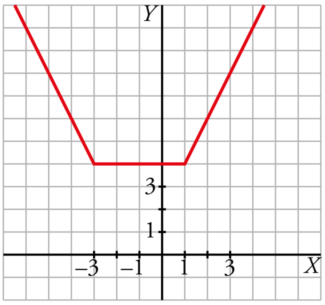
9 Dibuja la gráfica de $f(x) = |x+3| + |x-1|$.

$f(x) = |x+3| + |x-1|$



- Si $x < -3$: $-x-3-x+1 = -2x-2$
- Si $-3 \le x < 1$: $x+3-x+1 = 4$
- Si $x \ge 1$: $x+3+x-1 = 2x+2$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2 & \text{si } x < -3 \\ 4 & \text{si } -3 \le x < 1 \\ 2x+2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$



10 Estudia estas funciones y represéntalas gráficamente:

a) $y = sen\ 2x + 2cos\ x$

b) $y = 2sen\ \pi x + cos\ 2\pi x$

a) $y = sen\ 2x + 2cos\ x$

- Su dominio de definición es $\mathbb{R}$. Es periódica de período 2π.

- No tiene asíntotas.

- Cortes con los ejes:

$x = 0,\ y = 2 \ \to\ (0, 2)$

$y = 0 \ \to\ sen\ 2x + 2cos\ x = 0 \ \to\ 2sen\ x \cdot cos\ x + 2cos\ x = 0 \ \to\ 2cos\ x\ (sen\ x + 1) = 0 \ \to$

$$\to \begin{cases} cos\ x = 0 \\ sen\ x + 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- Puntos singulares:

$y' = 2cos\ 2x - 2sen\ x$

$y' = 0 \ \to\ 2cos\ 2x - 2sen\ x = 0 \ \to\ 2(cos^2 x - sen^2 x) - 2sen\ x = 0 \ \to$

$$\to\ 2(1 - 2sen^2 x) - 2sen\ x = 0 \ \to\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$$

$y'' = -2cos\ x - 4sen\ 2x$

$x = -\dfrac{\pi}{2} \ \to\ y'' = -2cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) - 4sen\ \pi = 0$

En $x = -\dfrac{\pi}{2}$ hay un punto de inflexión (estudiando el signo de y'' a ambos lados del valor $x = -\dfrac{\pi}{2}$).

$x = \dfrac{\pi}{6} \ \to\ y'' = -2cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - 4sen\ \dfrac{\pi}{3} = -3\sqrt{3} < 0 \ \to$ En $x = \dfrac{\pi}{6}$ hay un máximo relativo.

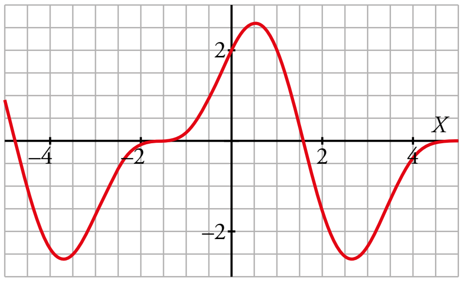
$x = \dfrac{5\pi}{6} \ \to\ y'' = -2cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) - 4sen\ \dfrac{5\pi}{3} = 3\sqrt{3} > 0 \ \to$ En $x = \dfrac{5\pi}{6}$ hay un mínimo relativo.

$x = -\dfrac{\pi}{2},\ y = sen\ (-\pi) + 2cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \ \to\ \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

$x = \dfrac{\pi}{6},\ y = sen\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + 2cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{2}\sqrt{3} \ \to\ \left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

$x = \dfrac{5\pi}{6},\ y = sen\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) + 2cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{3}{2}\sqrt{3} \ \to\ \left(\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

- Gráfica:



b) $y = 2sen\ \pi x + cos\ 2\pi x$

- Su dominio de definición es $\mathbb{R}$. Es periódica de período 2.
- No tiene asíntotas.
- Cortes con los ejes:

$x = 0,\ y = 1 \ \rightarrow\ (0, 1)$

$y = 0 \ \rightarrow\ 2sen\ \pi x + cos\ 2\pi x = 0 \ \rightarrow\ 2sen\ \pi x + cos^2\ \pi x - sen^2\ \pi x = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow\ 2sen\ \pi x + 1 - sen^2\ \pi x - sen\ \pi\ x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \ \rightarrow\ \begin{cases} x = arc\ sen\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + 2k \approx -0,12 + 2k, \ \text{con}\ \ k \in \mathbb{Z} \\ x \approx 1 + 0,12 + 2k = 1,12 + 2k, \ \text{con}\ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- Puntos singulares:

$y' = 2\pi\ cos\ \pi x - 2\pi\ sen\ 2\pi x$

$y' = 0 \ \rightarrow\ cos\ \pi x - sen\ 2\pi x = 0 \ \rightarrow\ cos\ \pi x - 2sen\ \pi x \cdot cos\ \pi x = 0 \ \rightarrow\ cos\ \pi x(1 - 2sen\ \pi x) = 0 \ \rightarrow$

$$\rightarrow\ \begin{cases} cos\ \pi x = 0 \\ sen\ \pi x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + 2k,\ \ x = \dfrac{3}{2} + 2k \\ x = \dfrac{1}{6} + 2k,\ \ x = \dfrac{5}{6} + 2k \end{cases}$$

$y'' = -2\pi^2\ sen\ \pi x - 4\pi^2\ cos\ 2\pi x$

$x = \frac{1}{6} \ \rightarrow\ y'' = -2\pi^2\ sen\ \frac{\pi}{6} - 4\pi^2\ cos\ \frac{\pi}{3} = -3\pi^2 < 0 \ \rightarrow$ En $x = \frac{1}{6}$ hay un máximo relativo.

$x = \frac{1}{2} \ \rightarrow\ y'' = -2\pi^2\ sen\ \frac{\pi}{2} - 4\pi^2\ cos\ \pi = 2\pi^2 > 0 \ \rightarrow$ En $x = \frac{1}{2}$ hay un mínimo relativo.

$x = \frac{5}{6} \ \rightarrow\ y'' = -2\pi^2\ sen\ \frac{5\pi}{6} - 4\pi^2\ cos\ \frac{5\pi}{3} = -3\pi^2 < 0 \ \rightarrow$ En $x = \frac{5}{6}$ hay un máximo relativo.

$x = \frac{3}{2} \ \rightarrow\ y'' = -2\pi^2\ sen\ \frac{3\pi}{2} - 4\pi^2\ cos\ 3\pi = 6\pi^2 > 0 \ \rightarrow$ En $x = \frac{3}{2}$ hay un mínimo relativo.

$x = \frac{1}{6} \ \rightarrow\ y = 2sen\ \frac{\pi}{6} + cos\ \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} \ \rightarrow\ \left(\frac{1}{6}, \frac{3}{2}\right)$

$x = \frac{1}{2} \ \rightarrow\ y = 2sen\ \frac{\pi}{2} + cos\ \pi = 1 \ \rightarrow\ \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$x = \frac{5}{6} \ \rightarrow\ y = 2sen\ \frac{5\pi}{6} + cos\ \frac{5\pi}{3} = \frac{3}{2} \ \rightarrow\ \left(\frac{5}{6}, \frac{3}{2}\right)$

$x = \frac{3}{2} \ \rightarrow\ y = 2sen\ \frac{3\pi}{2} + cos\ 3\pi = -3 \ \rightarrow\ \left(\frac{3}{2}, -3\right)$

- Gráfica: