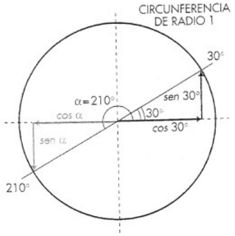
4 FUNCIONES Y FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

PARA CENTRARTE EN EL TEMA, PIENSA Y RESUELVE

1. En el tema anterior aprendimos a asignar las razones trigonométricas a ángulos obtusos. Para hacer lo mismo con ángulos de 180° o más, se procede de forma parecida:

- Situamos el ángulo sobre la circunferencia de radio 1.
- Comparamos sus razones trigonométricas con las de otro ángulo "similar" situado en el primer cuadrante.



Por ejemplo, en la figura adjunta:

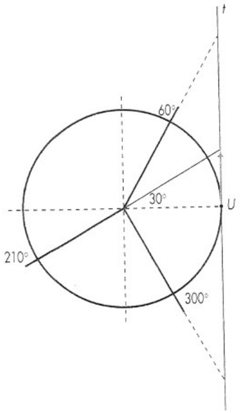
sen 210° es igual que *sen* 30°, pero con signo menos: $sen\ 210° = -0{,}5$

cos 210° es igual que *cos* 30°, pero con signo menos: $cos\ 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Procediendo de forma análoga, es decir, relacionándolos con ángulos del primer cuadrante, halla el seno y el coseno de los siguientes ángulos:

a) 225° b) 240° c) 270° d) 300° e) 315° f) 330°

2. Podemos hallar la tangente de un ángulo dividiendo su *seno* por su *coseno*, pero también se puede hacer relacionándola con un ángulo del primer cuadrante:



$tg\ 210° = tg\ 30°$, pues las rectas que definen a estos ángulos los cortan a la recta t en el mismo punto.

$tg\ 300° = -\ tg\ 60°$, pues las rectas que definen a estos ángulos los cortan a t en puntos simétricos respecto de U.

$$tg\ 210° = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \left(\frac{sen\ 210°}{cos\ 210°} = \frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

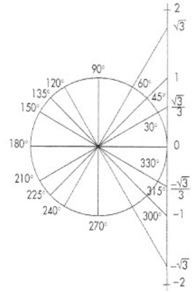
$$tg\ 300° = -\sqrt{3} \qquad \left(\frac{sen\ 300°}{cos\ 300°} = \frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} = -\sqrt{3} \right)$$

- Halla la tangente de cada uno de los siguientes ángulos:

a) 225° b) 240° c) 270° d) 315° e) 330°

relacionándolos con un ángulo del primer cuadrante y, también, mediante el cociente de su *seno* por su *coseno*.

3. Con los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores, completa la siguiente tabla:

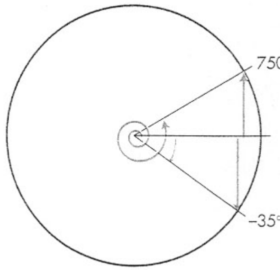


ÁNGULO	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	−1	

ÁNGULO	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
sen		$-\frac{1}{2}$						
cos		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$						
tg								

PANORAMA DEL TEMA

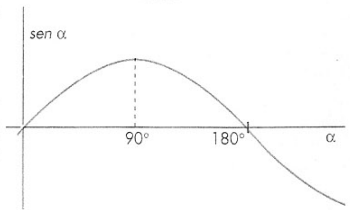
- En el tema anterior aprendimos a calcular razones trigonométricas de ángulos comprendidos entre 0° y 180°. Ahora lo haremos, en primer lugar, con ángulos comprendidos entre 180° y 360°; después, con ángulos cualesquiera.



- Si a cada ángulo le asignamos su *seno*, obtenemos una función.

  Análogamente con el *coseno* y la *tangente*.

  Sin embargo, para que estas funciones sean cómodas de manejar, debemos expresar el ángulo en una nueva unidad: se llama **radián** y relaciona la medida del ángulo con la longitud del arco que sustenta.



- Conociendo las razones trigonométricas de α y β, aprenderemos a hallar las razones de $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, 2α, $\alpha/2$, etc.

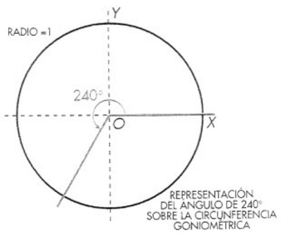
  Estas fórmulas serán útiles, no sólo para hallar las razones trigonométricas de nuevos ángulos (lo cual se realiza de forma inmediata con la calculadora) sino, sobre todo, para transformar y simplificar expresiones trigonométricas.

- ¿Cuánto ha de valer el ángulo x para que se verifique la igualdad $sen\ 2x = -\sqrt{3}\ cos\ x$? Esto es una ecuación, evidentemente. Aprenderemos a resolver ecuaciones de este tipo.

1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUALESQUIERA ENTRE 0° Y 360°

Circunferencia goniométrica

Trazamos una circunferencia de radio 1 (es decir, trazamos una circunferencia de radio cualquiera y tomamos como unidad de longitud su radio). Tomamos un sistema de coordenadas con el origen en el centro de la circunferencia.



Situamos los ángulos sobre ella del siguente modo:

- Su vértice, en el centro.
- Uno de los lados coincidiendo con el semieje positivo de las X.
- El otro lado se sitúa donde corresponda, abriéndose el ángulo en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.

Tal circunferencia, sobre la cual se sitúan los ángulos como queda descrito, se llama **circunferencia goniométrica.** Con ella resulta muy sencillo definir y visualizar las razones trigonométricas de ángulos cualesquiera.

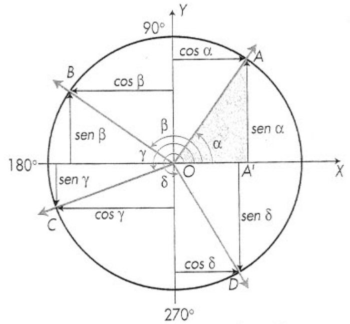
Seno y coseno de un ángulo entre 0° y 360°

Si situamos un ángulo agudo, α, sobre la circunferencia goniométrica, $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\alpha$ son las coordenadas del punto A en el que el segundo lado del ángulo corta a la circunferencia.

Análogamente ocurre con un ángulo obtuso, β.

Por extensión, definimos:

> **($\cos\phi$, $\operatorname{sen}\phi$)** son las coordenadas del punto en el que el segundo lado de un ángulo cualquiera, ϕ, corta a la circunferencia goniométrica.
> Se cumple, en todos los casos, que $\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi = 1$.



La dirección de las flechas indica el signo:

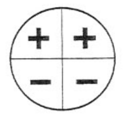
cos: $\begin{cases}\text{derecha} \to +\\ \text{izquierda} \to -\end{cases}$ sen: $\begin{cases}\text{arriba} \to +\\ \text{abajo} \to -\end{cases}$

EJERCICIOS

1 Razonando sobre el triángulo sombreado de arriba, y teniendo en cuenta que su hipotenusa es $\overline{OA} = 1$, justifica que los segmentos $\overline{OA'}$ y $\overline{A'A}$ corresponden, efectivamente, a las razones trigonométricas $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$.

2 Aplicando el teorema de Pitágoras en el correspondiente triángulo rectángulo, justifica que $\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$. (Ten en cuenta que $(-a)^2 = a^2$)

3 Di el valor de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ para ángulos de 0°, 90°, 180°, 270° y 360°.

4 

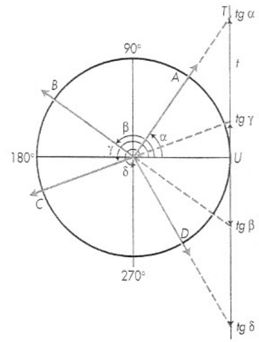
En este círculo se da el signo de $\operatorname{sen}\phi$ según el cuadrante en el que se halle situado el ángulo ϕ. Comprueba que es correcto y haz algo similar para $\cos\phi$.

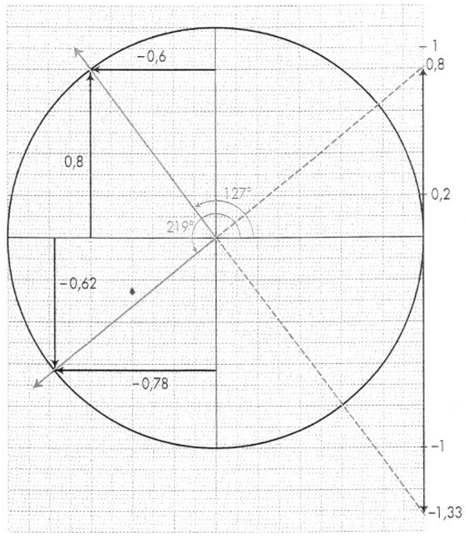
Tangente de un ángulo entre 0° y 360°

Situamos el ángulo sobre la circunferencia goniométrica. Trazamos la recta t tangente a la circunferencia en U. El segundo lado del ángulo, o su prolongación, corta a la recta t en el punto T. La *tangente* del ángulo es igual al segmento $\overline{UT}$, con el signo correspondiente. En todos los casos se cumple la relación

$$tg\,\phi = \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi}$$

Los ángulos de 90° y 270° no tienen *tangente.*





Ejemplo

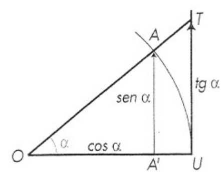
Hemos situado sobre la circunferencia goniométrica los ángulos de 127° y 219°.

Puesto que la circunferencia está trazada sobre papel milimetrado, tomando 5 cm = 1 unidad, es fácil valorar, aproximadamente, las razones trigonométricas.

$\operatorname{sen} 127° = 0{,}8$	$\operatorname{sen} 219° = -0{,}62$
$\cos 127° = -0{,}6$	$\cos 219° = -0{,}78$
$tg\ 127° = -1{,}33$	$tg\ 219° = 0{,}8$

EJERCICIOS

1 Teniendo en cuenta la semejanza de los triángulos $OA'A$ y OUT, y que $\overline{OU} = 1$, demuestra que $\operatorname{sen}\alpha / \cos\alpha = tg\,\alpha$



2 Construye una circunferencia de 10 cm de radio sobre papel milimetrado. (Las hojas de este papel suelen tener 19 cm de ancho. Corta de arriba una tira de 1 cm y pégala en el lateral; así podrás dibujar la circunferencia completa.) Señala ángulos diversos: 27°, 71°, 113°, 162°, 180°, 211°, 270°, 280°, 341°, con transportador. Lee sobre la cuadrícula el *seno* y el *coseno* de cada uno, cuidando dar correctamente el signo.

.2 ÁNGULOS DE MEDIDAS CUALESQUIERA

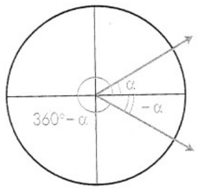
Los valores comprendidos entre 0° y 360° nos permiten medir cualquier ángulo. Sin embargo, podemos darle sentido al ángulo de 400° = 360° + 40° al situarlo sobre la circunferencia goniométrica, el segundo lado dará una vuelta completa (360°) más un ángulo de 40°:

400° = 360° + 40° = 40°

> En general, $\alpha = \alpha + 360° \cdot n$, donde n es un número entero cualquiera (positivo o negativo).

Ángulos negativos

El ángulo de 300° puede expresarse así: 300° = 300° − 360° = −60°. Por eso, con frecuencia, los ángulos que quedan situados bajo el eje *X*, es decir, los comprendidos entre 180° y 360°, se designan con una medida negativa.



Ejemplo

Expresar con valores comprendidos entre −180° y 180° los ángulos siguientes:
a) 775° *b) 1400°*

a) 775 ÷ 360 → cociente 2, resto 55

$775° = 360° \cdot 2 + 55° = 55°$

b) 1 400 ÷ 360 → cociente 3, resto 320

$1\,400° = 360° \cdot 3 + 320° = 320° = 320° - 360° = -40°$

Calculadora

La calculadora da directamente el valor de *sen, cos, tg* de cualquier ángulo comprendido entre −1440° y 1440° (es decir, −4 · 360° y 4 · 360°). Los demás no los interpreta como ángulos y da mensaje de error [algunas calculadoras tienen una gama de valores distinta].

Por ejemplo:
280 [sin] → -0.98480775
1 370 [tan] → -2.74747741
1 591 [cos] → E

Si le preguntamos a la calculadora cuál es el ángulo cuya razón trigonométrica es un cierto número, responde del siguiente modo:

PARA	DA UN VALOR ENTRE		
seno	−180° y 180°	−0,5 [INV] [sin] → -30,	0,8 [INV] [sin] → 53.13010...
coseno	0° y 360°	−0,5 [INV] [cos] → 120,	0,8 [INV] [cos] → 36.8698...
tangente	−180° y 180°	−4 [INV] [tan] → -75.963...,	1 [INV] [tan] → 45

4.3 RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

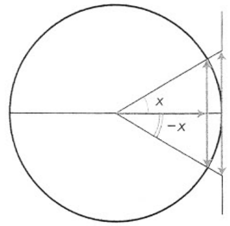
Las siguientes relaciones son muy útiles. No es necesario que las aprendas de memoria, sólo que las visualices. Si consigues verlas con claridad (lo cual es muy fácil) podrás repetirlas cuando las necesites.

Ángulos opuestos: x y -x

$sen\,(-x) = -sen\,x$

$cos\,(-x) = cos\,x$

$tg\,(-x) = -tg\,x$

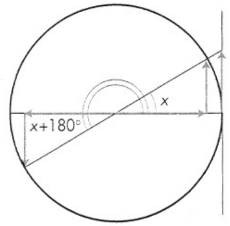


Ángulos que difieren en 180°: x y x + 180°

$sen\,(x + 180°) = -sen\,x$

$cos\,(x + 180°) = -cos\,x$

$tg\,(x + 180°) = tg\,x$

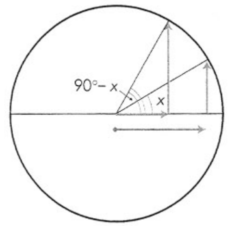


Ángulos complementarios: x y 90° - x

$sen\,(90° - x) = cos\,x$

$cos\,(90° - x) = sen\,x$

$$tg\,(90° - x) = \frac{cos\,x}{sen\,x} = \frac{1}{tg\,x}$$

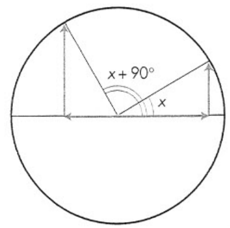


Ángulos que difieren en 90°: x y x + 90°

$sen\,(90° + x) = cos\,x$

$cos\,(90° + x) = -sen\,x$

$$tg\,(90° + x) = \frac{cos\,x}{-sen\,x} = \frac{-1}{tg\,x}$$

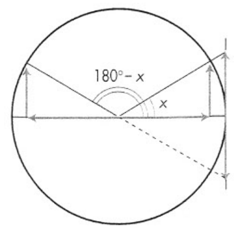


Ángulos suplementarios: x y 180° - x

$sen\,(180° - x) = sen\,x$

$cos\,(180° - x) = -cos\,x$

$tg\,(180° - x) = -tg\,x$



4.4 UNA NUEVA UNIDAD PARA MEDIR ÁNGULOS: EL RADIÁN

La unidad de medida de ángulos que has utilizado hasta ahora, el grado, proviene de la antigua Babilonia. Los babilonios supusieron, en un principio, que el año tenía 360 días y tomaron como unidad de medida angular "el recorrido diario del Sol alrededor de la Tierra". Esta forma de medir ha perdurado hasta nuestros días y su influencia se ha dejado notar, también, en la medición del tiempo.

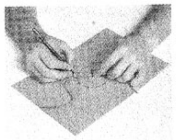
Ahora vamos a aprender una nueva unidad de ángulos.

Idea intuitiva de la nueva unidad

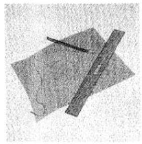
Haz lo siguiente (o imagina que lo haces):

Dibuja una circunferencia con un vaso.

Pon el vaso sobre la circunferencia, enrolla la cuerda a su alrededor y señala en el papel los dos puntos de la cuerda que marcaste.

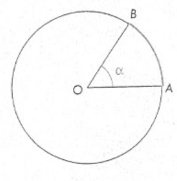


Localiza el centro y sobre una cuerda fina señala, mediante dos puntos, la longitud del radio.



Traza los radios correspondientes a esos dos puntos. Obtendrás un ángulo de unos 57°.

Ese ángulo de unos 57° se llama radián y, en adelante, va a ser otra unidad de medida de ángulos.



Se llama **radián** a un ángulo tal que el arco que abarca tiene la misma longitud que el radio con el que se ha trazado.

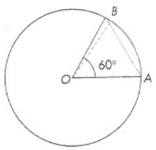
Es decir, α es un radián porque la longitud del arco AB es igual a la del radio:

$$\text{longitud de } \widehat{AB} = \overline{OA}$$

Si la circunferencia fuera el doble de grande, el radio también sería el doble, por lo que el ángulo correspondiente a *un arco que mida como el radio* sería el mismo.

Una regla práctica para recordar el valor aproximado de un radián

Si el hilo de longitud **1 radio**, en vez de apoyarlo en la circunferencia (1 radián) lo tensamos a lo largo de una cuerda, abarcará 60°, es decir, algo más que antes. Quizá esto te sirva para recordar que **1 radián mide algo menos de 60°**.



EJERCICIOS

1 Aunque el método para resolver las siguientes propuestas se sistematiza en la página siguiente, puedes resolverlas ahora, antes de que se explique:

a) ¿Cuántos radianes corresponden a los 360° de una circunferencia?

b) ¿Cuántos grados mide 1 radián?

c) ¿Cuántos grados mide un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes?

Paso de radianes a grados, y viceversa

La longitud de la circunferencia es $2\pi r$. Por tanto, el número de radianes de un ángulo completo es 2π.

Sabemos que el número de grados de un ángulo completo es 360. Por tanto:

$$360° = 2\pi \text{ radianes}$$

Esta igualdad nos permite pasar de grados a radianes y de radianes a grados.

PASO DE GRADOS A RADIANES: $\alpha \text{ grados} = \frac{2\pi}{360} \cdot \alpha \text{ radianes}$

PASO DE RADIANES A GRADOS: $n \text{ radianes} = \frac{360}{2\pi} \cdot n \text{ grados}$

El valor de un radián es: $\frac{360}{2\pi} = \frac{180}{3,1416} \approx 57°\ 17'\ 45''$

Utilidad de los radianes

Para los problemas de trigonometría, astronomía, navegación, resolución de triángulos en general, se usan las medidas de los ángulos en grados. Así lo seguiremos haciendo; la ventaja de los radianes se verá en la representación y el estudio de las funciones trigonométricas

$$y = \operatorname{sen} x \qquad y = \cos x \qquad y = \operatorname{tg} x$$

Éste será el objetivo del próximo apartado.

Calculadora

Para hallar las razones trigonométricas de un ángulo dado en radianes hay que empezar poniendo la calculadora en el modo correspondiente (MODE RAD)

Por ejemplo: *sen* (1 radián): (RAD) 1 (sin) → 0.841470984 → *sen* (1 RAD) = 0,84

tg (π/4 radianes): (RAD) (π) (÷) 4 (=) (tan) → 1 → $tg\left(\frac{\pi}{4}\text{ RAD}\right) = 1$

EJERCICIOS

1 Pasa a radianes los siguientes ángulos:

a) 30° b) 72° c) 90° d) 127° e) 200° f) 300°

Expresa el resultado en función de π, y luego ponlo en forma decimal. Por ejemplo:

$$30° = 30 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \approx 0,52 \text{ rad}$$

2 Pasa a grados los siguientes ángulos:

a) 2 rad b) 0,83 rad c) $\frac{\pi}{5}$ rad d) $\frac{5\pi}{6}$ rad e) 3,5 rad f) 6 rad

3 Completa la siguiente tabla:

GRADOS	0	30		60	90		135	150		210	225		270			330	360
RADIANES			$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2}{3}\pi$			π			$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$		

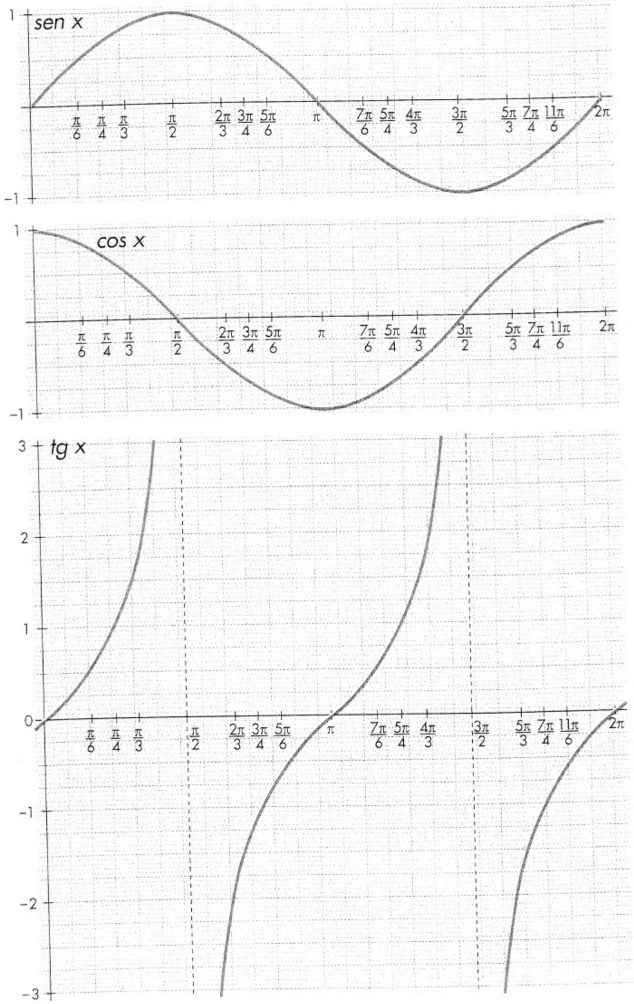
Pásala a tu cuaderno y añade *sen, cos,* y *tg* de cada uno de estos ángulos. Te será útil para el próximo apartado.

4.5 FUNCIONES CIRCULARES

Vamos a construir unas funciones que asocien a cada ángulo, expresado en radianes, su *seno*, su *coseno* y su *tangente*:

$y = \operatorname{sen} x \qquad y = \cos x \qquad y = \operatorname{tg} x$

Se las llama **funciones trigonométricas** o **funciones circulares**.



Funciones circulares definidas en todo $\mathbb{R}$

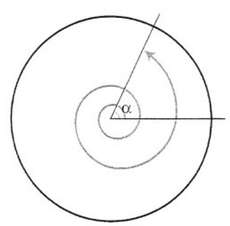
Hay muchas ocasiones en las que las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, tienen sentido para valores de x fuera del intervalo $[0, 2\pi]$.

Puesto que dos ángulos α y α' relacionados así:

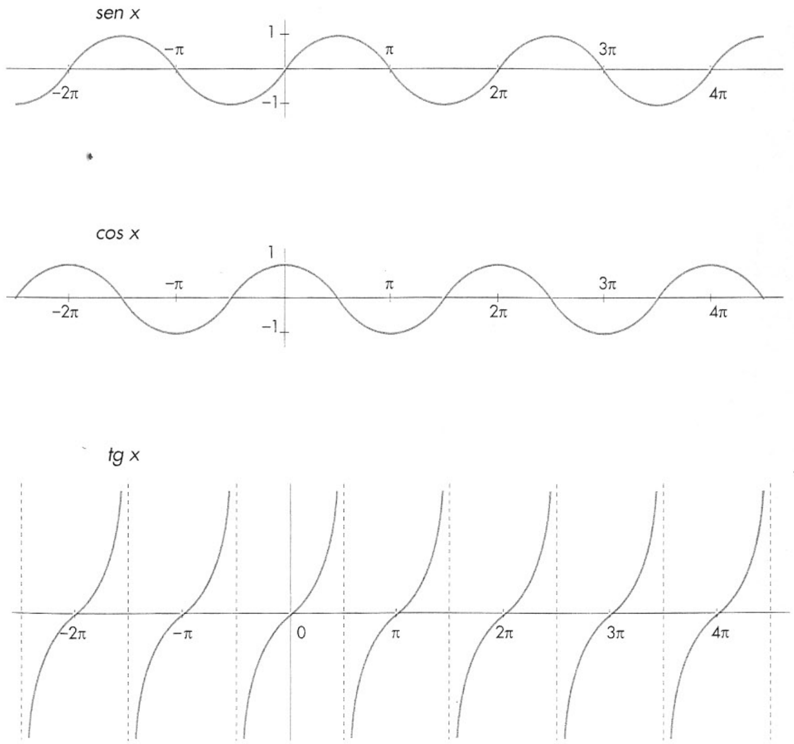
$\alpha' = \alpha + 360° \cdot n$ (α' y α en grados y n entero)

$\alpha' = \alpha + 2\pi \cdot n$ (α' y α en radianes y n entero)

$\alpha' = \alpha + 360° \cdot n = \alpha + 2\pi n$ rad



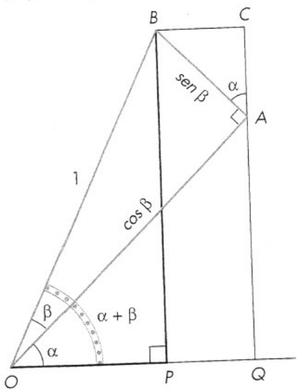
se sitúan en la misma posición, tienen las mismas razones trigonométricas. Eso quiere decir que las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ repiten periódicamente sus valores en cada intervalo de longitud 2π.



6 FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos

Pretendemos obtener las razones trigonométricas del ángulo $\alpha + \beta$ en función de las razones trigonométricas de α y de β. Para ello nos valdremos de la siguiente figura, en la que hemos representado α, β y $\alpha + \beta$:



- En el triángulo rojo OAB, cuya hipotenusa $\overline{OB}$ mide 1, es claro que $\cos\beta = \overline{OA}$ y $\operatorname{sen}\beta = \overline{AB}$.
- En el triángulo OPB observamos que

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{\overline{PB}}{\overline{OB}} = \overline{PB} \qquad (1)$$

- Además, podemos expresar $\overline{PB}$ como $\overline{QA} + \overline{AC}$:

$\overline{QA}$ es la altura del triángulo OQA:

$$\overline{QA} = \overline{OA}\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta \operatorname{sen}\alpha$$

$\overline{AC}$ es la proyección de $\overline{AB}$ sobre la vertical:

$$\overline{AC} = \overline{AB}\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

Por tanto: $\overline{PB} = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad (2)$

Igualando las expresiones (1) y (2), obtenemos:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad (*)$$

A partir de esta fórmula vamos a obtener fácilmente las demás:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}[90^\circ + (\alpha + \beta)] = \operatorname{sen}[(90^\circ + \alpha) + \beta] = \qquad \text{(aplicamos *)}\\ &= \operatorname{sen}(90^\circ + \alpha)\cos\beta + \cos(90^\circ + \alpha)\operatorname{sen}\beta = \\ &= \cos\alpha\cos\beta + (-\operatorname{sen}\alpha)\operatorname{sen}\beta = \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} = \qquad \text{[Dividimos numerador y denominador por } \cos\alpha\cos\beta\text{]}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Hemos obtenido, pues, las siguientes fórmulas:

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO SUMA

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \textbf{(I. 1)}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \textbf{(I. 2)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \textbf{(I. 3)}$$

Razones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos

Si en la primera de las fórmulas anteriores ponemos $-\beta$ en lugar de β, obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen}[\alpha + (-\beta)] = \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta) = \\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha(-\operatorname{sen}\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

Análogamente, procederíamos con $\cos(\alpha - \beta)$ y $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, obteniendo:

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DIFERENCIA

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \textbf{(II. 1)}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad \textbf{(II. 2)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \textbf{(II. 3)}$$

Razones trigonométricas del ángulo doble

Si en las fórmulas (I) hacemos $\alpha = \beta$, obtendremos las razones trigonométricas de 2α en función de α:

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \qquad \textbf{(III. 1)}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \qquad \textbf{(III. 2)}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \textbf{(III. 3)}$$

EJERCICIOS

1 Demuestra la fórmula **II. 2** a partir de la **I. 2.**

2 Demuestra la fórmula **II. 3** a partir de la **I. 3.**

3 Demuestra la fórmula **II. 3** a partir de **II. 1** y **II. 2.**

4 Si $\operatorname{sen}12^\circ = 0{,}2$ y $\operatorname{sen}37^\circ = 0{,}6$, halla $\cos 12^\circ$, $\operatorname{tg}12^\circ$, $\cos 37^\circ$ y $\operatorname{tg}37^\circ$. Calcula, después, a partir de ellos, las razones trigonométricas de 49° y de 25°, utilizando las fórmulas (I) y (II).

5 Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{\cos(a + b) + \cos(a - b)}{\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b)} = \frac{1}{\operatorname{tg}a}$$

6 Demuestra las tres fórmulas **(III. 1)**, **(III. 2)** y **(III. 3)** haciendo $\alpha = \beta$ en las fórmulas (I).

7 Halla las razones trigonométricas de 60° a partir de las de 30°.

8 Halla las razones trigonométricas de 90° a partir de las de 45°.

9 Demuestra que:

$$\frac{2\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}2\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

Razones trigonométricas del ángulo mitad

Vamos a obtener las razones trigonométricas de $\frac{\alpha}{2}$ en función de $\cos\alpha$.

Teniendo en cuenta que $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$ y aplicando **(III. 2)**, $\cos\alpha = \cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \text{sen}^2\frac{\alpha}{2} \qquad \text{(esta es una igualdad fundamental).}$$

Sumando y restando ambas igualdades se obtiene, respectivamente:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \\ 1 - \cos\alpha = 2\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} \end{array}\right\}$$

De estas igualdades se despeja, respectivamente, $\cos\frac{\alpha}{2}$ y $\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}$. A partir de ellas se obtiene $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD		
	$\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$	**(IV. 1)**
	$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$	**(IV. 2)**
	$\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$	**(IV. 3)**

En cada caso, el signo será **+** o **–** según el cuadrante en que se encuentre el ángulo $\frac{\alpha}{2}$.

EJERCICIOS

1 Siguiendo las indicaciones que se dan, demuestra detalladamente las fórmulas **IV. 1, IV. 2** y **IV. 3.**

2 Sabiendo que $\cos 78° = 0{,}2$, halla $\text{sen}\,78°$ y $\text{tg}\,78°$. Averigua las razones trigonométricas de 39° aplicando las fórmulas del ángulo mitad.

3 Halla las razones trigonométricas de 30° a partir de $\cos 60° = 0{,}5$.

4 Halla las razones trigonométricas de 45° a partir de $\cos 90° = 0$.

5 Demuestra que

$$2\,\text{tg}\,\alpha \cdot \text{sen}^2\frac{\alpha}{2} + \text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha$$

6 Demuestra que

$$\frac{2\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,2\alpha}{2\,\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,2\alpha} = \text{tg}^2\frac{\alpha}{2}$$

Sumas y diferencias de senos y de cosenos

A veces conviene expresar una suma o una diferencia en forma de producto. Vamos a deducir las siguientes fórmulas:

SUMAS Y DIFERENCIAS DE SENOS Y DE COSENOS		
	$\text{sen}\,A + \text{sen}\,B = 2\,\text{sen}\,\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$	**(V. 1)**
	$\text{sen}\,A - \text{sen}\,B = 2\cos\frac{A+B}{2}\,\text{sen}\,\frac{A-B}{2}$	**(V. 2)**
	$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$	**(V. 3)**
	$\cos A - \cos B = -2\,\text{sen}\,\frac{A+B}{2}\,\text{sen}\,\frac{A-B}{2}$	**(V. 4)**

Vamos a deducir las dos primeras fórmulas:

$$\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$
$$\text{sen}\,(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

Sumando $\rightarrow$ $\text{sen}\,(\alpha+\beta) + \text{sen}\,(\alpha-\beta) = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\beta$ (1)

Restando $\rightarrow$ $\text{sen}\,(\alpha+\beta) - \text{sen}\,(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$ (2)

Llamando $\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta = A\\ \alpha-\beta = B\end{array}\right\}$ y resolviendo el sistema, se tiene: $\alpha = \frac{A+B}{2}$, $\beta = \frac{A-B}{2}$

Sustituyendo en (1) y (2) se obtienen **V. 1** y **V. 2**.

EJERCICIOS

1 Para demostrar las fórmulas **(V. 3)** y **(V. 4)**, da los siguientes pasos:

- Expresa en función de α y β:

  $\cos(\alpha+\beta) = \ldots\ldots$

  $\cos(\alpha-\beta) = \ldots\ldots$

- Suma y resta como hemos hecho arriba y obtendrás dos expresiones.
- Sustituye en las expresiones anteriores

  $\alpha+\beta = A$ $\qquad$ $\alpha-\beta = B$

  $\alpha = \frac{A+B}{2}$ $\qquad$ $\beta = \frac{A-B}{2}$

2 Transforma en producto y calcula:

a) $\text{sen}\,75° - \text{sen}\,15°$

b) $\cos 75° + \cos 15°$

c) $\cos 75° - \cos 15°$

3 Expresa en forma de producto el numerador y el denominador de esta fracción y simplifica el resultado:

$$\frac{\text{sen}\,4a + \text{sen}\,2a}{\cos 4a + \cos 2a}$$

7 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ecuaciones trigonométricas son aquellas en las que aparecen funciones trigonométricas actuando sobre un ángulo incógnita que, como en todas las ecuaciones, hay que despejar.

Salvo que se pida expresamente, el valor de la incógnita puede darse indistintamente en grados o en radianes.

Las soluciones que se obtengan deben ser comprobadas sobre la ecuación inicial, pues es frecuente que aparezcan soluciones extrañas.

Suele ser suficiente dar las soluciones comprendidas entre 0° y 360°.

Ejemplos

1. *Resolver la ecuación* $\cos(30° + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

En el primer miembro de la ecuación hay un coseno de una suma. Lo desarrollamos aplicando **(I. 2)**:

$$\cos 30° \cos\alpha - \operatorname{sen} 30° \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha \rightarrow \sqrt{3}\cos\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha$$

Dividimos los dos miembros por $\cos\alpha$:

$$\sqrt{3} = 3\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \sqrt{3} = 3\operatorname{tg}\alpha \rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Posibles soluciones: 30° y 210°. Al comprobarlas sobre la ecuación inicial vemos que las dos son válidas.

Por tanto, las soluciones son: $\boxed{\alpha_1 = 30° \text{ y } \alpha_2 = 210°}$

2. *Resolver la ecuación* $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{tg}\alpha$.

Expresamos $\operatorname{sen} 2\alpha$ **(III. 1)** y $\operatorname{tg}\alpha$ en función de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$:

$$2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$ Multiplicamos todo por $\cos\alpha$ y pasamos al primer miembro:

$$2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha - \operatorname{sen}\alpha = 0 \xrightarrow{\text{sacando factor común}} \operatorname{sen}\alpha\,(2\cos^2\alpha - 1) = 0$$

Posibles soluciones

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = 0 \rightarrow \boxed{\alpha_1 = 0°,\ \alpha_2 = 180°} \\ \cos^2\alpha = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{\alpha_3 = 45°,\ \alpha_4 = 315°} \\ \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{\alpha_5 = 135°,\ \alpha_6 = 225°} \end{cases} \end{cases}$$

Al comprobarlas sobre la ecuación inicial, vemos que las seis soluciones son válidas.

3. *Resolver la ecuación* $\cos 3\alpha + \cos\alpha = 0$.

Puesto que el segundo miembro es 0, la resolución se simplificaría mucho si el primer miembro se pudiera poner en forma de producto. Para ello aplicamos la fórmula **V. 3**.

$$2\cos\frac{3\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha-\alpha}{2} = 0 \rightarrow \cos 2\alpha\cdot\cos\alpha = 0 \rightarrow \begin{cases}\cos 2\alpha = 0 \\ \cos\alpha = 0\end{cases}$$

Si $\cos\alpha = 0 \rightarrow \boxed{\alpha_1 = 90°,\ \alpha_2 = 270°}$

(*) Si $\cos 2\alpha = 0 \xrightarrow{\text{(III. 2)}} \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 0 \rightarrow \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow 2\cos^2\alpha - 1 = 0 \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{\alpha_3 = 45°,\ \alpha_4 = 315°}$$

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{\alpha_5 = 135°,\ \alpha_6 = 225°}$$

Se comprueba que las seis soluciones son válidas.

Observa que a partir de (*) podríamos haber actuado de esta otra forma:

$$(*)\ \cos 2\alpha = 0 \begin{cases} 2\alpha = 90° \longrightarrow \alpha_3 = 45° \\ 2\alpha = 270° \longrightarrow \alpha_5 = 135° \\ 2\alpha = 90° + 360° = 450° \longrightarrow \alpha_6 = 225° \\ 2\alpha = 270° + 360° = 630° \longrightarrow \alpha_4 = 315° \end{cases}$$

Si sumáramos a los valores de 2α múltiplos de 360°, obtendríamos para α soluciones equivalentes a estas cuatro.

EJERCICIOS

1 Resuelve las ecuaciones:

a) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

b) $2\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$

c) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$

d) $2\operatorname{sen}^2 x + 3\cos x = 3$

2 Resuelve:

a) $4\cos 2x + 3\cos x = 1$

b) $\operatorname{tg} 2x + 2\cos x = 0$

c) $\sqrt{2}\cos(x/2) - \cos x = 1$

d) $2\operatorname{sen} x\cos^2 x - 6\operatorname{sen}^3 x = 0$

3 Transforma en producto $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x$ y resuelve después la ecuación $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 0$.

4 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}(\pi - x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\pi$

b) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sqrt{2}\operatorname{sen} x = 0$

5 Escribe, en radianes, la expresión general de todos los ángulos que verifican:

a) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

b) $\operatorname{sen} x = \cos x$

c) $\operatorname{sen}^2 x = 1$

d) $\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$

4 EJERCICIOS DEL TEMA

PRACTICA

1 Sabiendo que $sen\,x = 2/3$ y que x es un ángulo del primer cuadrante, calcula:

a) $sen\,2x$ b) $tg\,\frac{x}{2}$ c) $cos\,(30° - x)$

2 Si $tg\,\alpha = -4/3$ y $90° < \alpha < 180°$, calcula:

a) $sen\left(\frac{\pi}{2}\text{ rad} - \alpha\right)$

b) $cos\left(180° - \frac{\alpha}{2}\right)$

c) $tg\,(900° + \alpha)$

3 Resuelve las ecuaciones:

a) $2\,sen\,x = tg\,2x$

b) $2 + sen\,x = 3\,cos\,2x$

4 Demuestra que:

$$\frac{sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{cos^2\alpha - sen^2\alpha} = \frac{tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

5 Si $cos\,78° = 0{,}2$ y $sen\,37° = 0{,}6$, calcula $sen\,41°$, $cos\,41°$ y $tg\,41°$.

6 Halla, con ayuda de la calculadora, el ángulo α en los siguientes casos:

a) $sen\,\alpha = -0{,}75$; $\alpha < 270°$

b) $cos\,\alpha = -0{,}37$; $\alpha > 180°$

c) $tg\,\alpha = 1{,}38$; $sen\,\alpha < 0$

d) $cos\,\alpha = 0{,}23$; $sen\,\alpha < 0$

7 Sabemos que $cos\,x = -\frac{3}{4}$ y $sen\,x < 0$.

Sin hallar el valor de x, calcula:

a) $sen\,x$ b) $cos\,(\pi + x)$ c) $cos\,2x$

d) $tg\,\frac{x}{2}$ e) $sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ f) $cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$

PIENSA Y RESUELVE

8 Dibuja un ángulo α cuyo *seno* sea el doble del *coseno*. ¿Qué ángulos comprendidos entre 0° y 360° cumplen esa condición? Escribe la expresión general de todos los ángulos cuya tangente es igual a 2.

9 ¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas de los ángulos que miden $\pi/5$ y $4\pi/5$ radianes?

10 Demuestra las siguientes igualdades:

a) $cos\,(\alpha + \beta) \cdot cos\,(\alpha - \beta) = cos^2\alpha - sen^2\beta$

b) $sen^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = sen\,\alpha \cdot sen\,\beta$

c) $cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = sen\,\alpha \cdot sen\,\beta$

11 Calcula el valor de: $sen\,195° + sen\,75°$ sin utilizar la parte trigonométrica de la calculadora.

12 Resuelve las ecuaciones:

a) $sen\,x + cos\,x = 1/cos\,x$

b) $1 + cos\,x = \sqrt{3}\,sen\,x$

c) $2\,sen\,x - cos\,x = 2$

d) $sen\,5x + sen\,x = sen\,3x$

e) $3\,sen^2x - 2\,sen\,x\,cos\,x - cos^2x = 0$

Ayuda: divide los dos miembros por $sen\,x\,cos\,x$.

13 Expresa $sen\,4\alpha$ y $cos\,4\alpha$ en función de $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$.

14 Demuestra que:

$$\frac{cos\,x + sen\,x}{cos\,x - sen\,x} - \frac{cos\,x - sen\,x}{cos\,x + sen\,x} = 2\,tg\,2x$$

15 Simplifica la expresión:

$$2\,tg\,x\,cos^2\frac{x}{2} - sen\,x$$

16 Resuelve la ecuación:

$sen\,2x = -\sqrt{3}\,cos\,x$

17 Comprueba que

$$tg\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - tg\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 2\,tg\,2a$$

18 Si $tg\,(\alpha + \beta) = 4$ y $tg\,\alpha = -2$, halla $tg\,2\beta$.

19 Expresa $cos\,3x$ en función de $cos\,x$.

Ayuda: Desarrolla $cos\,3x = cos\,(2x + x) = \ldots$

20 Resuelve las ecuaciones:

a) $cos\,3x + cos\,x = cos\,2x$

b) $sen\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 2$

21 Demuestra que:
$sen\,(a + b) \cdot sen\,(a - b) = sen^2a - sen^2b$

22 Calcula $sen\,3x$ en función de $sen\,x$ y $cos\,x$.

23 Demuestra que:

$$sen\,x = \frac{2\,tg\,\frac{x}{2}}{1 + tg^2\,\frac{x}{2}}$$

$$cos\,x = \frac{1 - tg^2\,\frac{x}{2}}{1 + tg^2\,\frac{x}{2}}$$

$$tg\,x = \frac{2\,tg\,\frac{x}{2}}{1 - tg^2\,\frac{x}{2}}$$

24 Si $sen\,\alpha = 3/5$ y $\pi/2 < \alpha < \pi$, calcula, sin hallar α, el valor de:

a) $cos\,\alpha$ b) $sen\,2\alpha$ c) $tg\,\frac{\alpha}{2}$

d) $sen\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$ e) $cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$

PROFUNDIZA

25 Resuelve la ecuación:

$$sen\,2x + sen^2x - \frac{2}{3} = 0$$

26 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:

a) $\begin{cases} x + y = 120 \\ sen\,x - sen\,y = \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} sen\,x + sen\,y = \sqrt{3} \\ cos\,x + cos\,y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} sen^2x + cos^2y = \frac{3}{4} \\ cos^2x - sen^2y = \frac{1}{4} \end{cases}$

d) $\begin{cases} cos\,(x + y) = \frac{1}{2} \\ sen\,(x - y) = \frac{1}{2} \end{cases}$

27 Demuestra que para cualquier ángulo α se verifica $sen\,\alpha + cos\,\alpha = \sqrt{2}\,cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

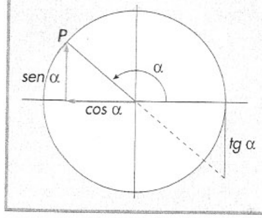
28 Demuestra que en un triángulo cualquiera ABC se verifica

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{tg\,\frac{A - B}{2}}{tg\,\frac{A + B}{2}}$$

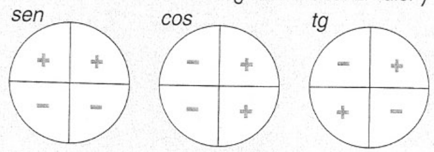
Ayuda: Por el teorema de los senos: $\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B}$ y aplicando como propiedad de las proporciones podemos poner $\frac{a - b}{a + b} = \frac{sen\,A - sen\,B}{sen\,A + sen\,B}$. Transforma en producto la suma y diferencia de senos.

4 FUNCIONES Y FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUALESQUIERA



$P(\cos \alpha, \, sen\, \alpha)$ son las coordenadas del punto de intersección del segundo lado del ángulo α con la circunferencia goniométrica. El valor y el signo de $\cos \alpha$, $sen\, \alpha$ y $tg\, \alpha$ dependen del cuadrante en el que esté P.

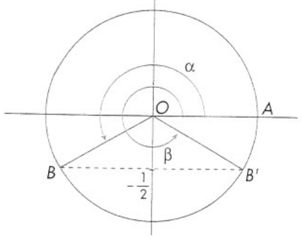


EJERCICIO RESUELTO

Representa los dos ángulos menores que 360° que cumplen la siguiente condición: $sen\, \alpha = -\frac{1}{2}$.

Resolución

Dibujamos la circunferencia goniométrica y representamos en el eje de ordenadas el valor $-\frac{1}{2}$.



Trazamos una recta paralela al eje de abscisas.

Los puntos B y B' determinan los ángulos α y β pedidos.

$\alpha = \widehat{AOB}$ termina en el tercer cuadrante.

$\beta = \widehat{AOB'}$ termina en el cuarto cuadrante.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 Dibuja en cada caso los dos ángulos comprendidos entre 0° y 360° que cumplen la condición dada:

a) $sen\, \alpha = \frac{3}{4}$ b) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ c) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ d) $tg\, \alpha = \frac{3}{2}$ e) $tg\, \alpha = -1$

2 Representa el ángulo comprendido entre 0° y 360° que cumple las dos condiciones dadas:

a) $sen\, \alpha = -\frac{3}{5}$; $tg\, \alpha < 0$

b) $\cos \alpha = 0{,}4$; $sen\, \alpha < 0$

c) $tg\, \alpha = 2$; $sen\, \alpha > 0$

d) $tg\, \alpha = -\frac{3}{2}$; $sen\, \alpha > 0$

3 Calcula las razones trigonométricas de cada uno de los ángulos del ejercicio anterior.

4 Dibuja los ángulos comprendidos entre 0° y 360° tales que $\cos \alpha = -0{,}75$. Representa el *seno* y la *tangente* de cada uno y halla sus valores.

5 Sin utilizar la calculadora, halla el valor de las siguientes expresiones:

a) $\frac{2}{3}\, sen\, 90° + 3\, sen\, 180° - 4\, sen\, 270° - \frac{5}{3}\, sen\, 90°$

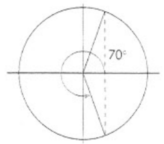
b) $5 \cos 90° - 3 \cos 0° + 2 \cos 180° - \cos 270° + 4 \cos 360°$

c) $5\, tg\, 180° + 3 \cos 90° - 2\, tg\, 0° + sen\, 270° - 2\, sen\, 360°$

☛ *Observa la circunferencia goniométrica.*

6 Si $\cos 70° = 0{,}34$, halla otro ángulo menor que 360° que tenga el mismo coseno.

☛ *Los ángulos del cuarto cuadrante también tienen el coseno positivo.*



7 Si $\cos \alpha = 0{,}34$, ¿qué ángulos tienen el *coseno* igual a $-0{,}34$?

8 Sabiendo que $tg\, 138° = -0{,}9$, halla los ángulos cuya *tangente* sea igual a 0,9.

9 Halla, con la calculadora, los ángulos α del intervalo [0°, 360°] tales que $tg\, \alpha = \pm 3$.

10 En cada uno de los siguientes casos, busca un ángulo del primer cuadrante cuyas razones trigonométricas coincidan en valor absoluto con las del ángulo dado:

a) 124° b) 214° c) 318° d) 100° 20'

e) 190° 50' f) 290° 25' g) −54° h) −130°

☛ *Representa el ángulo dado y ten en cuenta las relaciones del ángulo α con los ángulos $180° - \alpha$, $180° + \alpha$, $360° - \alpha$, $-\alpha$.*

En a), $\alpha = 180° - 124° = 56°$.

11 Halla el valor exacto de las siguientes expresiones:

a) $sen\, 120° - \cos 210° + tg\, 60° - tg\, 30°$

b) $sen\, 225° + \cos 135° - sen\, 315°$

c) $\cos 300° + tg\, 240° - tg\, 210°$

d) $\sqrt{3} \cos 30° + sen\, 30° - \sqrt{2} \cos 45° - 2\sqrt{3}\, sen\, 60°$

12 Prueba que:

a) $4a\, sen\, 30° + b\sqrt{2} \cos 45° + a \cos 180° = a + b$

b) $2a\sqrt{3}\, sen\, 120° + 4b\, sen\, 30° + \frac{b}{\cos 120°} = 3a$

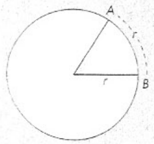
c) $\dfrac{sen\, 90° + \cos 240° + \frac{\sqrt{3}}{2}\, sen\, 120°}{2 \cos 0° - \frac{1}{2}\, sen\, 30° - \cos 60°} = 1$

13 Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

a) 3 720° b) 1 935° c) 2 040° d) 3 150°

☛ *Ten en cuenta que $3\,720° = 360° \cdot 10 + 120°$.*

2 EL RADIÁN



Este ángulo mide **un radián** porque la longitud del arco AB es igual al radio r.

$360° = 2\,\pi$ rad ; $180° = \pi$ rad (poco más de 3 rad)

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 En una circunferencia de 16 cm de radio, un arco mide 20 cm. Halla el ángulo central en grados y en radianes.

☛ *Halla la longitud de la circunferencia y escribe la proporción entre las longitudes de los arcos y la medida de los ángulos:*

$$\frac{2\pi \cdot 16}{20} = \frac{360°}{x}$$

Hazlo también en radianes.

2 Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos dados en radianes:

a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{4\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{4}$ d) $\frac{7\pi}{6}$ e) $\frac{9\pi}{2}$

☛ *Hazlo mentalmente teniendo en cuenta que: π radianes = 180°.*

3 Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos dados en radianes:

a) 1,5 b) 3,2 c) 5 d) 2,75

4 Pasa a radianes los siguientes ángulos dados en grados. Exprésalos en función de π:

a) 40° b) 108° c) 135° d) 240°
e) 270° f) 126° g) 67° 30'

☛ *Simplifica la expresión que obtengas sin multiplicar por 3,14… a) $\frac{40\,\pi}{180} = \frac{2\,\pi}{9}$.*

5 Indica, sin pasar a grados, en qué cuadrante está cada uno de los siguientes ángulos:

a) 2 rad b) 3,5 rad c) 5 rad

☛ *Ten en cuenta que:*

$\frac{\pi}{2} \simeq 1{,}57$; $\pi \simeq 3{,}14$; $\frac{3\pi}{2} \simeq 4{,}7$.

6 Halla, en radianes, el ángulo comprendido entre 0 y 2π tal que sus razones trigonométricas coincidan con las de $\frac{11\pi}{4}$.

7 Halla, en radianes, el ángulo α tal que $sen\ \alpha = 0{,}72$ y $cos\ \alpha < 0$.

8 Relaciona estas expresiones con el ángulo α:

a) $sen\ (\pi - \alpha)$; $cos\ (\pi - \alpha)$; $tg\ (\pi - \alpha)$
b) $sen\ (\pi + \alpha)$; $cos\ (\pi + \alpha)$; $tg\ (\pi + \alpha)$
c) $sen\ (2\pi - \alpha)$; $cos\ (2\pi - \alpha)$; $tg\ (2\pi - \alpha)$

9 Expresa $A(x)$ en función de $sen\ x$ y $cos\ x$:

a) $A(x) = sen\ (-x) - sen\ (\pi - x)$
b) $A(x) = cos\ (-x) + cos\ (\pi + x)$
c) $A(x) = sen\ (\pi + x) + cos\ (2\pi - x)$

10 Halla el valor de A sin utilizar la calculadora:

a) $A = sen\ \frac{\pi}{4} + sen\ \frac{\pi}{2} + sen\ \pi$

b) $A = sen\ \frac{2\pi}{3} + sen\ \frac{4\pi}{3} - sen\ 2\,\pi$

c) $A = cos\ \pi - cos\ 0 + cos\ \frac{\pi}{2} - cos\ \frac{3\pi}{2}$

11 Completa la siguiente tabla:

x(rad)	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
2 sen x									
sen 2x									
sen $\frac{x}{2}$									

3 FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

$sen\ (\alpha \pm \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta \pm cos\ \alpha\ sen\ \beta$ $\qquad sen\ 2\alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$ $\qquad sen\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}}$

$cos\ (\alpha \pm \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta \mp sen\ \alpha\ sen\ \beta$ $\qquad cos\ 2\alpha = cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha$ $\qquad cos\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}}$

$tg\ (\alpha \pm \beta) = \frac{tg\ \alpha \pm tg\ \beta}{1 \mp tg\ \alpha\ tg\ \beta}$ $\qquad tg\ 2\alpha = \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha}$ $\qquad tg\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 Sabiendo que $sen\ x = \frac{3}{5}$ y que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcula, sin hallar previamente el valor de x:

a) $sen\ 2x$ b) $tg\ \frac{x}{2}$ c) $sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

d) $cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ e) $cos\ \frac{x}{2}$ f) $tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

☛ *Tienes que calcular $cos\ x = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$ y $tg\ x = -\frac{3}{4}$ y aplicar las fórmulas.*

2 Halla las razones trigonométricas del ángulo de 15° de dos formas, considerando que:

$$15° = 45° - 30° \quad \text{y} \quad 15° = \frac{30°}{2}$$

3 Demuestra que:

$$tg\ (45° + \alpha) - tg\ (45° - \alpha) = 2\ tg\ 2\alpha.$$

☛ *Desarrolla el primer miembro:*

$$\frac{tg\ 45° + tg\ \alpha}{1 - tg\ 45°\ tg\ \alpha} - \frac{tg\ 45° - tg\ \alpha}{1 + tg\ 45°\ tg\ \alpha} =$$

$$= \frac{1 + tg\ \alpha}{1 - tg\ \alpha} - \frac{1 - tg\ \alpha}{1 + tg\ \alpha}$$

Efectúa la resta y comprueba que el resultado coincide con $2\ tg\ 2\alpha$.

4 Demuestra que:

$$\frac{sen\ (\alpha + \beta)}{sen\ (\alpha - \beta)} = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{tg\ \alpha - tg\ \beta}$$

☛ *Aplica las fórmulas de $sen(\alpha + \beta)$ y $sen(\alpha - \beta)$. Divide el numerador y el denominador entre $cos\ \alpha\ cos\ \beta$ y simplifica.*

5 Demuestra que:

$$\frac{cos\ x + sen\ x}{cos\ x - sen\ x} \cdot cos\ 2x = 1 + sen\ 2x$$

☛ *Ten en cuenta que: $cos\ 2x = cos^2\ x - sen^2\ x = (cos\ x + sen\ x)(cos\ x - sen\ x)$.*

Sustituye en el primer miembro, simplifica y al hacer $(cos\ x + sen\ x)^2$, obtienes el segundo miembro.

6 Prueba que $2\ tg\ x\ cos^2\ \frac{x}{2} - sen\ x = tg\ x$.

☛ *Sustituye $cos^2\ \frac{x}{2} = \frac{1 + cos\ x}{2}$.*

7 Demuestra que:

$$cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = cos\ x.$$

☛ *Desarrolla y sustituye las razones de $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}$.*

8 Demuestra que:

$$cos\ \alpha\ cos\ (\alpha - \beta) + sen\ \alpha\ sen\ (\alpha - \beta) = cos\ \beta$$

☛ *Aplica las fórmulas de la diferencia de ángulos, simplifica y extrae factor común.*

9 Prueba que: $\frac{2\ sen\ \alpha - sen\ 2\alpha}{2\ sen\ \alpha + sen\ 2\alpha} = tg^2\ \frac{\alpha}{2}$

10 Simplifica: $\frac{2\ cos\ (45° + \alpha)\ cos\ (45° - \alpha)}{cos\ 2\alpha}$

☛ *Al desarrollar el numerador obtendrás una diferencia de cuadrados.*

11 Demuestra: $\frac{cos\ (\alpha - \beta)}{cos\ (\alpha + \beta)} = \frac{1 + tg\ \alpha\ tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta}$

12 Simplifica la expresión $\frac{sen\ 2\alpha}{1 - cos^2\ \alpha}$ y calcula su valor para $\alpha = 90°$.

13 Simplifica: $\cos(360° - \alpha) \cdot \operatorname{sen}(90° + \beta) + \operatorname{sen}(180° + \alpha) \cdot \cos(90° + \beta)$.

☛ $\operatorname{sen}(90° + \beta) = \cos\beta$; $\cos(90° + \beta) = -\operatorname{sen}\beta$

14 Las siguientes expresiones son iguales a un número. Simplifícalas y compruébalo:

a) $\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta - \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$

b) $\frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} - tg\,\frac{\alpha - \beta}{2}$

c) $\frac{2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}$

4 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ecuaciones trigonométricas son aquellas en las que la incógnita es un ángulo que aparece bajo una o varias razones trigonométricas.
Las fórmulas trigonométricas nos permiten expresar el ángulo con sólo una razón y despejarla.
Debes comprobar las soluciones en la ecuación inicial, pues es frecuente que aparezcan soluciones no válidas.

4.1 ECUACIONES QUE SE RESUELVEN CON LAS RELACIONES FUNDAMENTALES

EJERCICIOS RESUELTOS

1 *Resuelve la ecuación* $3\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$.

Resolución

Sustituimos $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$ (pues $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$)

$3(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x + \cos x = 0$

$$2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0 \to \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \begin{cases} 3/2 \text{ (No vale, ya que debe ser } |\cos x| \le 1) \\ -1 \to \boxed{\begin{array}{l} x = 180° + 360°\,k \\ \quad\text{o} \\ x = \pi + 2\pi k \end{array} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

2 *Resuelve la ecuación* $tg\,x = \sqrt{2}\cos x$

Resolución

Hacemos $tg\,x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \to \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sqrt{2}\cos x \to \operatorname{sen} x = \sqrt{2}\cos^2 x$

Pasamos todo al primer miembro y hacemos $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$:

$\sqrt{2}\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - \sqrt{2} = 0$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}} = \begin{cases} -2/\sqrt{2} \text{ (No vale)} \\ 1/\sqrt{2} \to \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 45° + 360°\,k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x_2 = 135° + 360°\,k = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{array} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

3 *Resuelve la ecuación* $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$.

Resolución

Dividimos por $\cos x$ (observa que $\cos x$ no puede ser igual a 0. Si fuese $\cos x = 0$, entonces $\operatorname{sen} x = 0$ y no hay ningún ángulo cuyo *seno* y *coseno* sea 0) y obtenemos $tg\,x + 1 = 0$.

$$tg\,x = -1 \to \begin{cases} x_1 = 135° + 360°\,k = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ x_2 = 315° + 360°\,k = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

También se puede resolver haciendo $\operatorname{sen} x = -\cos x$.

4 *Resuelve la ecuación* $2\cos x - 1 + \operatorname{sen} x = 0$.

Resolución

Despejamos $\operatorname{sen} x$ y elevamos al cuadrado para poder aplicar $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

$\operatorname{sen} x = 1 - 2\cos x \to \operatorname{sen}^2 x = 1 - 4\cos x + 4\cos^2 x$

$$1 - \cos^2 x = 1 - 4\cos x + 4\cos^2 x \to 5\cos^2 x - 4\cos x = 0 \to \cos x\,(5\cos x - 4) = 0 \begin{cases} \cos x = 0 \\ \quad\text{o} \\ \cos x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \cos x = 0 \to x_1 = 90°,\ x_2 = 270° \\ \text{Si } \cos x = \frac{4}{5} \to x_3 = 36°\,52'\,11'',\ x_4 = 323°\,7'\,48'' \end{array}\right\}$$

Al comprobar estos valores de x en la ecuación dada, 270° y 36° 52' 11" no la verifican.

Las soluciones son: $\boxed{\begin{array}{l} x = 90° + 360°\,k \\ x = 323°\,7'\,48'' + 360°\,k \end{array} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1 $2\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$

2 $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$

☛ *Saca factor común e iguala a 0 cada factor.*

3 $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$

4 $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$

5 $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 0$

6 $2\cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$

7 $3\,tg^2 x - \sqrt{3}\,tg\,x = 0$

8 $4\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 2\cos^2 x - 2 = 0$

☛ *Al hacer* $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, *resulta una ecuación bicuadrada:* $2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 = 0$.

Haz $\cos^2 x = z$ *y comprueba si son válidas las seis soluciones que obtienes.*

9 $1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \cos x = 0$

10 $4\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x - 3\cos^2 x = 0$ ☛ *Divide por* $\cos^2 x$ *y obtendrás una ecuación con* $tg\,x$. *¿Por qué* $\cos^2 x \neq 0$*?*

11 $\cos x = \sqrt{3}\,(1 - \operatorname{sen} x)$ ☛ *Eleva al cuadrado y comprueba las soluciones.*

12 $\operatorname{sen} x + tg\,x = 3\cos x \operatorname{sen} x$ ☛ *Haz* $tg\,x = \operatorname{sen} x/\cos x$. *Quita denominadores, pasa al primer miembro y saca factor común.*

4.2 ECUACIONES QUE SE RESUELVEN CON MÁS FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

EJERCICIO RESUELTO

5 *Resuelve la ecuación* $sen\ 2x + \sqrt{3}\cos x = 0$

Resolución

Desarrollamos $sen\ 2x$: $\quad 2\ sen\ x \cos x + \sqrt{3}\cos x = 0$

Sacamos factor común: $\quad \cos x\,(2\ sen\ x + \sqrt{3}\,) = 0$

Igualando a 0 cada factor:

$$\cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360°\,k \rightarrow x_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\,k \\[2ex] x_2 = 270° + 360°\,k \rightarrow x_2 = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi\,k \end{cases}$$

$$2\ sen\ x + \sqrt{3} = 0 \rightarrow sen\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 240° + 360°\,k = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi\,k \\[2ex] x_4 = 300° + 360°\,k = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi\,k \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

6 *Resuelve la ecuación* $\cos 2x - sen\ 2x + 2\ sen^2 x = 0$

Resolución

Desarrollando: $\cos^2 x - sen^2 x - 2\ sen\ x \cos x + 2\ sen^2 x = 0$

$1 - sen^2 x - sen^2 x - 2\ sen\ x \cos x + 2\ sen^2 x = 0 \overset{*}{\rightarrow} 2\ sen\ x \cos x = 1$

Sustituimos $\cos x = \sqrt{1 - sen^2 x}$ y nos queda $2\ sen\ x\sqrt{1 - sen^2 x} = 1$

Elevamos al cuadrado: $4\ sen^2 x\,(1 - sen^2 x) = 1 \rightarrow 4\ sen^4 x - 4\ sen^2 x + 1 = 0$

$$sen^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow sen\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} x_1 = 45° + 360°\,k \\ x_2 = 135° \ \text{(no vale)} \\ x_3 = 225° + 360°\,k \\ x_4 = 315° \ \text{(no vale)} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

(*) También podemos resolver así:

$$sen\ 2x = 1 \begin{cases} 2x = 90° \rightarrow x_1 = 45° + 360°\,k \\ 2x = 90° + 360° \rightarrow x_2 = 225° + 360°\,k \end{cases}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resuelve las siguientes ecuaciones:

13 $sen\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2}\ sen\ x = 0$

☛ *Desarrolla y pon el valor de* $sen\ \frac{\pi}{4}$ *y* $\cos \frac{\pi}{4}$; *obtendrás la ecuación* $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\ sen\ x = 0$. *Divide por* $\sqrt{2}$ *y resuelve la ecuación.*

14 $sen\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \dfrac{1}{2}$

15 $sen\ 2x + 2\cos^2 x = 0$

☛ *Desarrolla* $sen\ 2x$ *y saca factor común.*

16 $\cos 2x - 3\ sen\ x + 1 = 0$

☛ *Desarrolla* $\cos 2x$ *y sustituye* $\cos^2 x = 1 - sen^2 x$.

17 $\cos^2 \dfrac{x}{2} + \cos x - \dfrac{1}{2} = 0$

☛ *Ten en cuenta que* $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$

18 $tg^2 \dfrac{x}{2} + 1 = \cos x$

19 $2\ sen^2 \dfrac{x}{2} + \cos 2x = 0$

20 $sen\,(\pi - x) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) + \cos \pi$

21 $\cos 2x + 3\ sen\ x = 2$

22 $tg\ 2x \cdot tg\ x = 1$

☛ *Expresa* $tg\ 2x$ *en función de* $tg\ x$.

23 $\cos x \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$

24 $2\ sen\ x = tg\ 2x$

☛ *Haz* $tg\ 2x = \frac{sen\ 2x}{\cos 2x}$ *y desarrolla.*

25 Expresa $sen\ 3x$ en función de $sen\ x$ y $\cos x$ y resuelve la ecuación $sen\ 3x - 2\ sen\ x = 0$.

☛ $sen\ 3x = sen\,(2x + x) = sen\ 2x \cos x + \cos 2x\ sen\ x =$
$= 2\ sen\ x \cos x \cos x + (\cos^2 x - sen^2 x)\ sen\ x = 3\ sen\ x \cos^2 x - sen^3 x$

Para resolver la ecuación, sustituye $sen\ 3x$ *por la expresión anterior y saca factor común.*

26 $sen\ 3x - sen\ x \cos 2x = 0$

27 $\cos 3x - 2\cos(\pi - x) = 0$

☛ *Expresa* $\cos 3x$ *en función de* $sen\ x$ *y* $\cos x$ *haciendo* $\cos 3x = \cos(2x + x)$.

28 $\cos 3x + sen\ 2x - \cos x = 0$

29 $tg\ \dfrac{x}{2} - sen\ x = 0$

30 $\sqrt{3}\ sen\ \dfrac{x}{2} + \cos x - 1 = 0$

31 $sen\ 2x \cos x = 6\ sen^3 x$

32 $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + tg\ x = 1$

33 $sen\ 4x - \cos 2x = 0$

☛ *Haz* $sen\ 4x = sen\ 2\,(2x) = 2\ sen\ 2x \cos 2x$. *Sustituye y saca factor común* $\cos 2x$.

5 OTRAS FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS: TRANSFORMACIÓN DE SUMAS O DIFERENCIAS EN PRODUCTOS

$$sen\ x + sen\ y = 2\ sen\ \frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \qquad \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$sen\ x - sen\ y = 2\cos\frac{x+y}{2}\ sen\ \frac{x-y}{2} \qquad \cos x - \cos y = -2\ sen\ \frac{x+y}{2}\ sen\ \frac{x-y}{2}$$

EJERCICIO RESUELTO

Resuelve la ecuación $sen\ 5x + sen\ x = 0$

Resolución

Transformamos la suma en producto: $2\ sen\ \dfrac{5x + x}{2}\cos\dfrac{5x - x}{2} = 0 \rightarrow 2\ sen\ 3x \cos 2x = 0$

Este producto es igual a 0 si lo es algún factor. Hacemos $sen\ 3x = 0$ y $\cos 2x = 0$

$$sen\ 3x = 0 \begin{cases} 3x = 0° & x_1 = 0° + 360°\,k & 3x = 540° & x_4 = 180° + 360°\,k \\ 3x = 180° & x_2 = 60° + 360°\,k & 3x = 720° & x_5 = 240° + 360°\,k \\ 3x = 360° & x_3 = 120° + 360°\,k & 3x = 900° & x_6 = 300° + 360°\,k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Busca las cuatro soluciones que se obtienen al hacer $\cos 2x = 0$ en el intervalo $[0°, 720°]$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1 $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = \cos 2x$

2 $\dfrac{\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$

3 $\operatorname{sen} 3x - \cos 3x = \operatorname{sen} x - \cos x$

4 $\cos 4x + \cos 2x - \cos 3x = 0$

5 $\operatorname{sen} 4x + \cos 3x - \operatorname{sen} 2x = 0$

6 $\dfrac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x}{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{3}$

7 Prueba que $\cos 160° + \cos 80° + \cos 40° = 0$

☛ *No utilices la calculadora. Transforma en producto $\cos 160° + \cos 80°$.*

8 Simplifica: $\dfrac{\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x}{\cos 5x + \cos 3x}$

6 SISTEMAS DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

EJERCICIO RESUELTO

Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 3/2 \\ \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = 1/2\end{array}\right\}$ *dando las soluciones del intervalo* $[0°, 360°]$.

Resolución

Por sustitución, $\operatorname{sen} x = \dfrac{3}{2} - \operatorname{sen} y$ (*) $\rightarrow \left(\dfrac{3}{2} - \operatorname{sen} y\right) \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2} \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 y - 3 \operatorname{sen} y + 1 = 0$

$$\operatorname{sen} y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \begin{cases} 1 \longrightarrow y = 90° \\ \dfrac{1}{2} \begin{cases} y = 30° \\ y = 150° \end{cases} \end{cases}$$

Sustituyendo en (*) obtenemos las soluciones $(90°, 30°)$, $(90°, 150°)$, $(30°, 90°)$ y $(150°, 90°)$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resuelve los siguientes sistemas:

1 $\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = 1 \\ \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 1\end{array}\right\}$

☛ *Haz $\cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y$ y $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$.*

2 $\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} x + \cos y = 1 \\ x + y = 90°\end{array}\right\}$

☛ *Despeja x o y en la segunda ecuación y sustituye en la primera.*

3 $\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}(x+y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(x-y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}$

☛ *De la primera ecuación se deduce que $x + y = 45°$ o $x + y = 135°$.*

De la segunda, $x - y = 45°$ o $x - y = 315°$.

Combinando estas posibilidades, obtendrás cuatro sistemas de ecuaciones lineales.

4 Calcula k y α de modo que

$$3 \cos x + 4 \operatorname{sen} x = k \cos(x - \alpha)$$

☛ *Desarrolla $\cos(x - \alpha) = \cos x \cos \alpha + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \alpha$.*

Por tanto:

$$3 \cos x + 4 \operatorname{sen} x = k \cos \alpha \cos x + k \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} x$$

De esta igualdad se deduce:

$\left.\begin{array}{l}3 = k \cos \alpha \\ 4 = k \operatorname{sen} \alpha\end{array}\right\}$ *y resolviendo este sistema, obtendrás k y α.*

5 Calcula k y α de modo que:

$$k \operatorname{sen}(x + \alpha) = 2 \cos x + 3 \operatorname{sen} x$$

6 Resuelve el sistema:

$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \\ \cos x - \cos y = 1\end{array}\right\}$

☛ *Transforma en producto cada ecuación y divide después la primera entre la segunda.*

CUESTIONES TEÓRICAS

1 Demuestra que si α, β y γ son los tres ángulos de un triángulo, se verifica :

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen} \gamma = 0$

b) $\cos(\alpha + \beta) + \cos \gamma = 0$

c) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg} \gamma = 0$

☛ *Ten en cuenta que $\alpha + \beta = 180° - \gamma$ y las relaciones que existen entre las razones trigonométricas de los ángulos suplementarios.*

2 Demuestra que si $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, se verifica: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$.

☛ *Desarrolla $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ y ten en cuenta que:*

$$\alpha + \beta = 180° - \gamma$$

3 Demuestra que si α, β y γ son los ángulos de un triángulo, se verifica:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos \gamma = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

☛ *Desarrolla $\cos(\alpha - \beta)$ y ten en cuenta que:*

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta).$$

4 Estudia si existe algún triángulo isósceles tal que el coseno del ángulo distinto sea igual a la suma de los cosenos de los ángulos iguales.

5 Resuelve las siguientes inecuaciones trigonométricas:

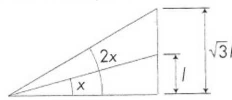
a) $0 < \operatorname{sen} x < 1$

b) $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$

c) $0 < \operatorname{tg} x < 1$

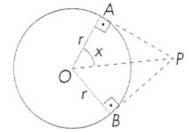
d) $|\operatorname{sen} x| < \dfrac{1}{2}$

6 Calcula x en esta figura:



7 Al duplicarse un ángulo, ¿se duplica su seno? Estudia si se verifica $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x$ para cualquier x.

8 Dada la circunferencia de centro O y radio r, determina un punto exterior P de modo que, trazando desde P las tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ a la circunferencia, el perímetro del cuadrilátero $APBO$ sea igual a $5r$.

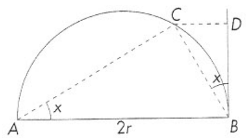


☛ *Haz $\widehat{AOP} = x°$. Ten en cuenta que los triángulos AOP y BOP son rectángulos e iguales y expresa los lados $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ en función de r y x. Obtendrás una ecuación trigonométrica.*

9 Sobre una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$, determina un punto C tal que

$$\overline{AC} + \overline{CD} = \frac{5}{2} r$$

siendo D la proyección del punto C sobre la tangente trazada en B.



☛ *Uniendo C con B formamos dos triángulos rectángulos ACB y BCD.*

Haz $\widehat{BAC} = x°$. Justifica que $\widehat{CBD} = x°$.

Expresa $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$ en función de x y r y resuelve la ecuación trigonométrica que obtienes.