

1. Sean los vectores $\vec{a} = -3\vec{i}$ y $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$. Demostrar que

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$$

donde φ es el ángulo que forma el vector \vec{b} con el eje X.

2. Una barca, que lleva una velocidad de 3 m/s, cruza un río perpendicularmente a la dirección del agua. El río fluye a 5 m/s y su cauce tiene 60 metros de ancho. Hallar el ángulo y la distancia desviada. Determina la velocidad resultante y el tiempo empleado en cruzar el río.
3. El vector de posición de un cuerpo viene dado por

$$\vec{r} = (t^2 + t + 1)\vec{i} + (1 - 3t)\vec{j}$$

- a) Obtener la ecuación de la trayectoria; b) La velocidad media entre los instantes $t_1 = 2$ s y $t_2 = 4$ s; c) Velocidad y aceleración instantáneas en $t = 3$ s.
4. Un avión ha de alcanzar 350 km/h para despegar partiendo desde el reposo. Si necesita una pista de 2 km para despegar, calcula cuánto tiempo le costará despegar. ¿Qué distancia recorrerá en el último segundo?
5. Desde el suelo lanzamos hacia arriba un cuerpo a 24 m/s. Calcular: a) altura máxima alcanzada y tiempo empleado en alcanzarla; b) el tiempo total de vuelo; c) Una vez en el punto más alto el cuerpo vuelve a caer y se queda encalado a 20 metros del suelo. Halla la velocidad justo antes de encalarse.

Resolución de los problemas

Problema 1 Vamos a hallarlo por partes. Como se trata de una igualdad, calcularemos primero el miembro de la izquierda y luego el de la derecha y comprobaremos que dan lo mismo.

En la parte de la izquierda tenemos $|\vec{a} + \vec{b}|^2$. Empecemos por hallar $\vec{a} + \vec{b}$ y luego su módulo

$$\vec{a} + \vec{b} = (-3, 0) + (2, 5) = (-1, -5) \text{ y su módulo } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$$

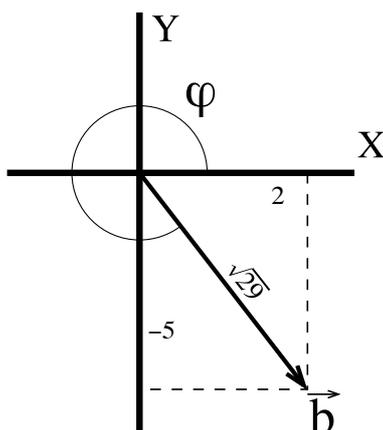
de donde

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 26 \quad (1)$$

En la parte de la derecha tenemos $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$. Vamos a determinar cada uno de ellos.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3 \quad |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29} \text{ luego } |\vec{a}|^2 = 9 \quad |\vec{b}|^2 = 29$$

Ahora queda por saber lo que vale $\cos\varphi$, el ángulo que forma el vector \vec{b} con el eje X. La siguiente figura muestra como hallarlo. El coseno de un ángulo es igual al cateto contiguo dividido por la hipotenusa, siendo la hipotenusa por definición $|\vec{b}|$.



Como vemos pues en la figura

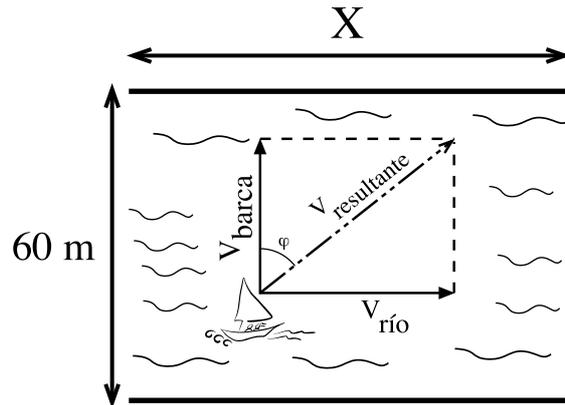
$$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

Ahora ya estamos en condiciones de sustituir todo en $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, quedando

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 9 + 29 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = 9 + 29 - 12 = 26$$

resultado que coincide con la ecuación 1.

Problema 2 Conviene hacer un dibujo para aclarar la posición del sistema de referencia o de nuestros ejes coordenados.



El origen del sistema de referencia lo tomamos en la barca. El eje X a lo largo del río y el eje Y perpendicular y según la dirección que lleva la barca. Con esta elección las componentes de los vectores velocidad es muy fácil. El vector velocidad del río forma un ángulo de 0° y el vector velocidad de la barca 90° . Las componentes las hallamos con las expresiones para el paso de componentes polares a cartesianas,

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = (v_r \cdot \cos \varphi, v_r \cdot \sin \varphi)$$

Para el vector velocidad del río tendremos

$$\vec{v}_r = (5 \cdot \cos 0, 5 \cdot \sin 0) = (5 \cdot 1, 5 \cdot 0) = (5, 0) \text{ m/s}$$

Y para la barca cuya dirección forma 90°

$$\vec{v}_b = (v_b \cdot \cos \varphi, v_b \cdot \sin \varphi) = (3 \cdot \cos 90, 3 \cdot \sin 90) = (3 \cdot 0, 3 \cdot 1) = (0, 3) \text{ m/s}$$

La velocidad resultante será pues la suma vectorial de la velocidad del río y de la barca,

$$\vec{v}_{resultante} = \vec{v}_{rio} + \vec{v}_{barca} = (5, 0) + (0, 3) = (5, 3) \text{ m/s}$$

Y su módulo $|\vec{v}_{resultante}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} = 5,83 \text{ m/s}$.

Para calcular el ángulo desviado, si nos fijamos en el dibujo anterior, se trata de determinar el ángulo φ . A partir del triángulo que forman los vectores velocidad podemos calcular el valor de $\tan \varphi$.

$$\tan \varphi = \frac{v_{rio}}{v_{barca}} = \frac{5}{3} = 1,66.. \text{ por lo tanto } \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{5}{3} \right) = 59,03^\circ$$

Así pues el ángulo que se desvía la barca de su trayectoria inicial es $59,03^\circ$

Para saber la distancia que se desvía la barca respecto de la otra orilla, al ser las velocidades constantes tenemos

$$\vec{v} = \frac{\vec{e}}{t} \text{ y entonces } \vec{e} = \vec{v} \cdot t$$

donde \vec{v} es ahora la velocidad resultante. El vector \vec{e} representa a las distancias que recorre la barca a lo largo de los ejes X e Y.

$$\vec{e} = (x, y) = \vec{v} \cdot t = (5, 3) \cdot t$$

En la ecuación anterior podemos identificar lo que valen las distancias x e y

$$x = 5 \cdot t \quad y = 3 \cdot t$$

De acuerdo con la figura del principio del problema la distancia y la podemos identificar con la anchura del río y con ella averiguar el tiempo empleado por la barca en cruzar el río,

$$60 = 3 \cdot t \text{ y despejando el tiempo } t = \frac{60}{3} = 20 \text{ segundos}$$

La distancia desviada respecto de la otra orilla vendrá dada por x , que por lo dicho antes es

$$x = 5 \cdot t = 5 \cdot 20 = 100 \text{ metros}$$

Problema 3

a) Para la ecuación de la trayectoria hemos de identificar lo que es la componente X e Y, que a partir de lo que vale \vec{r} son

$$\vec{r} = (x, y) = (t^2 + t + 1, 1 - 3t)$$

obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = 1 - 3t \end{cases}$$

en el que hay que eliminar t . Parece más fácil despejar t de la segunda de ellas y sustituir en la primera. (Recordamos que el procedimiento siempre es igual, se despeja en una de ellas y se sustituye **siempre** en la otra).

$$t = \frac{y - 1}{-3} = -\frac{y - 1}{3} = \frac{-y + 1}{3} = \frac{1 - y}{3}$$

y sustituyendo en la primera

$$x = t^2 + t + 1 = \left(\frac{1 - y}{3}\right)^2 + \frac{1 - y}{3} + 1 = \frac{(1 - y)^2}{3^2} + \frac{1 - y}{3} + 1$$

operando

$$\frac{1 + y^2 - 2y}{9} + \frac{1 - y}{3} + 1 = \frac{1 + y^2 - 2y + 3(1 - y) + 9}{9} = \frac{1 + y^2 - 2y + 3 - 3y + 9}{9}$$

llegamos por fin a

$$x = \frac{y^2 - 5y + 13}{9}$$

La ecuación obtenida expresa x en función de y en este caso y corresponde a la ecuación de una parábola.

b) Para la velocidad media partimos de su definición

$$v_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$

donde \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son los valores del vector de posición en los instantes $t_1 = 2$ s y $t_2 = 4$ s que nos dan en el problema. Sustituyéndolos

$$\begin{aligned}\vec{r}_2 &= (4^2 + 4 + 1, 1 - 3 \cdot 4) = (21, -11) \\ \vec{r}_1 &= (2^2 + 2 + 1, 1 - 3 \cdot 2) = (7, -5)\end{aligned}$$

y la velocidad media será

$$v_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(21, -11) - (7, -5)}{4 - 2} = \frac{(21 - 7, -11 - (-5))}{2} = \frac{(14, -6)}{2} = (7, -3)$$

siendo sus unidades m/s.

c) La velocidad y aceleraciones instantáneas las hallamos haciendo las derivadas del vector de posición. Para la velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 + t + 1, 1 - 3t) = (2t + 1, -3)$$

y para $t=3$ s

$$\vec{v} = (2 \cdot 3 + 1, -3) = (7, -3) \text{ m/s}$$

Por fin para la aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(2t + 1, -3) = (2, 0) \text{ m/s}^2$$

La aceleración obtenida es constante e independiente por tanto del tiempo.

Problema 4

Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA). Las fórmulas son

$$\begin{aligned}e &= e_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2 \\ v &= v_0 + a \cdot t \\ v^2 &= v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (e - e_0)\end{aligned}$$

De la lectura del problema se deduce que $v_0 = 0$ y $v=350 \text{ km/h}=97,2 \text{ m/s}$, $e_0=0$ y $e=2 \text{ km}=2000 \text{ m}$. Nos piden el tiempo y lo podemos calcular con la primera o segunda de las ecuaciones anteriores, pero para ello hemos de calcular la aceleración, que la despejamos de la tercera,

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(e - e_0)} = \frac{(97,2)^2 - 0^2}{2 \cdot (2000 - 0)} = 2,36 \text{ m/s}^2$$

y con la segunda sabemos el tiempo

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{97,2 - 0}{2,36} = 41,15 \text{ s}$$

Para hallar la distancia recorrida en el último segundo, sabemos por lo hecho antes que para $t=41,15 \text{ s}$ el espacio es obviamente, $e=2000 \text{ m}$, luego para 1 segundo antes el espacio que llevará recorrido será con el tiempo $t'=41.15-1=40,15 \text{ s}$. Con la fórmula del espacio, la primera de las tres

$$e' = e_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2 = 0 + 0 \cdot 40,15 + \frac{1}{2} \cdot 2,36 \cdot (40,15)^2 = 1902,18 \text{ m}$$

y en el último segundo habrá recorrido la diferencia entre e y e'

$$e - e' = 2000 - 1902,18 = 97,82 \text{ m}$$

Los valores numéricos pueden diferir ligeramente según los decimales que se usen en el cálculo.

Problema 5

Las fórmulas son las mismas que antes pero ahora poniendo la aceleración de la gravedad, $g = -9,8 \text{ m/s}^2$, y el espacio es ahora la altura h . Del problema deducimos $h_0=0$, $v_0=24 \text{ m/s}$.

$$\begin{aligned}h &= h_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}g \cdot t^2 \\v &= v_0 + g \cdot t \\v^2 &= v_0^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0)\end{aligned}$$

a) En el punto más alto la velocidad final es nula, $v=0$, luego de la tercera ecuación podemos despejar la altura final

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot (h - h_0), \quad h - h_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2g}, \quad h = h_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2g}$$

sustituyendo

$$h = 0 + \frac{0 - 24^2}{2 \cdot (-9,8)} = \frac{-576}{-19,6} = 29,38 \text{ m}$$

b) Para calcular el tiempo total de vuelo hemos de tener en cuenta que el espacio inicial y final son nulos, ya que sale y vuelve al suelo. Podemos usar la primera ecuación, con lo que nos quedará una ecuación de segundo grado para la t , ecuación fácil de resolver ya que no tiene término independiente y puede factorizarse.

$$\begin{aligned}h &= h_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}g \cdot t^2 \\0 &= 0 + 24 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-9,8) \cdot t^2, \quad 0 = 24t - 4,9t^2 \\0 &= t \cdot (24 - 4,9t) \quad \text{cuyas soluciones son} \\t &= 0 \text{ y } 0 = 24 - 4,9t, \quad t = \frac{24}{4,9} = 4,89 \text{ s}\end{aligned}$$

c) Todo consiste en hallar la velocidad que tendrá el cuerpo a 20 m del suelo. Tomando como condiciones iniciales las del principio y usando la tercera ecuación, ahora tenemos $h_0=0$, $h=20 \text{ m}$ y $v_0=24 \text{ m/s}$

$$\begin{aligned}v^2 &= 24^2 + 2 \cdot (-9,8) \cdot (20 - 0) = 576 - 392 = 184 \\v &= \sqrt{184} = \pm 13,56 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Sólo basta puntualizar que de la velocidad obtenida anteriormente hemos de quedarnos con la negativa ya que el cuerpo baja.