Ejercicio 1.

Halla la matriz X que satisface la siguiente ecuación: $A\cdot X\cdot B-C=D$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-4&2&1\\3&-2&4\end{pmatrix}\ y\ D=\begin{pmatrix}3&4&-8\\2&0&-1\end{pmatrix}$$

$X\in M_{2\times 3}$. *La mejor forma de resolver esta ecuación matricial, dado que las matrices que intervienen en el producto tienen pocos ceros, es la siguiente:*

$$A\cdot X\cdot B-C=D\Rightarrow A\cdot X\cdot B=D+C\ \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot(D+C)\cdot B^{-1}$$

$\Rightarrow\ X=A^{-1}\cdot(D+C)\cdot B^{-1}$ *, entonces calculamos las inversas de A y B*

$$|A|=\begin{vmatrix}2&3\\-1&-2\end{vmatrix}=-4+3=-1$$

$$A_{11}=-2\qquad A_{21}=-3$$
$$A_{12}=-(-1)=1\qquad A_{22}=2$$
$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-2&-3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1&2&-1\\-1&0&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=1-1-2=-2$$

$$B_{11}=\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}=-1\qquad B_{21}=-\begin{vmatrix}2&-1\\1&-1\end{vmatrix}=1\qquad B_{31}=\begin{vmatrix}2&-1\\0&1\end{vmatrix}=2$$

$$B_{12}=-\begin{vmatrix}-1&1\\0&-1\end{vmatrix}=-1\qquad B_{22}=\begin{vmatrix}1&-1\\0&-1\end{vmatrix}=-1\qquad B_{32}=-\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$$

$$B_{13}=\begin{vmatrix}-1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1\qquad B_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=-1\qquad B_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix}=2$$

$$\Rightarrow B^{-1}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&-1&0\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&6&-7\\5&-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&-1&0\\-1&-1&2\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}13&6&-5\\-9&-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&-1&0\\-1&-1&2\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}-14&12&16\\10&-8&-16\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\ \Rightarrow\ X=\begin{pmatrix}7&-6&-8\\-5&4&8\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix} = 5$. Calcula, sin desarrollar, los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} b & 5 & 0 \\ 4 & c+2 & 2 \\ a+2 & 2a+1 & 2a \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 2-3a & b & 0 \\ 2 & b & 3 \\ 5 & 2b+5 & c+6 \end{vmatrix}$$

Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\left.\begin{vmatrix} b & 5 & 0 \\ 4 & c+2 & 2 \\ a+2 & 2a+1 & 2a \end{vmatrix}\right|_{trasponemos} = \left.\begin{vmatrix} b & 4 & a+2 \\ 5 & c+2 & 2a+1 \\ 0 & 2 & 2a \end{vmatrix}\right|_{\substack{intercambiamos \\ filas}} = -\left.\begin{vmatrix} b & 4 & a+2 \\ 0 & 2 & 2a \\ 5 & c+2 & 2a+1 \end{vmatrix}\right|_{\substack{intercambiamos \\ columnas\, 2\, veces}} =$$

$$= -\left.\begin{vmatrix} a+2 & b & 4 \\ 2a & 0 & 2 \\ 2a+1 & 5 & c+2 \end{vmatrix}\right|_{F_3=F_3-F_2} = -\left.\begin{vmatrix} a+2 & b & 4 \\ 2a & 0 & 2 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix}\right|_{\substack{sacamos\ factor \\ común\ en\ F_2}} = -2\cdot\left.\begin{vmatrix} a+2 & b & 4 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix}\right|_{F_1=F_1-F_2} = -2\cdot\begin{vmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix} = -2\cdot 5 = -10$$

$$\left.\begin{vmatrix} 2-3a & b & 0 \\ 2 & b & 3 \\ 5 & 2b+5 & c+6 \end{vmatrix}\right|_{\substack{intercambiamos \\ filas}} = -\left.\begin{vmatrix} 2 & b & 3 \\ 2-3a & b & 0 \\ 5 & 2b+5 & c+6 \end{vmatrix}\right|_{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-2F_1}} = -\left.\begin{vmatrix} 2 & b & 3 \\ -3a & 0 & -3 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix}\right|_{\substack{sacamos\ factor \\ común\ en\ F_2}} =$$

$$= -(-3)\cdot\begin{vmatrix} 2 & b & 3 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 5 & c \end{vmatrix} = 3\cdot 5 = 15$$

Ejercicio 3.

Sea H el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $u_1=(-1,2,1,0)$, $u_2=(2,-1,0,3)$, $u_3=(3,0,2,2)$, $u_4=(2,-1,2,a)$.

- Encontrar a sabiendo que $H \neq \mathbb{R}^4$
- Hallar la dimensión y una base de H y calcular el valor de b para que el vector $v=(b,5,7,7)$ pertenezca a H.

Como el subespacio generado por los cuatro vectores no coincide con el espacio total, éstos deben ser linealmente dependientes, puesto que en caso contrario serían base de $\mathbb{R}^4$ y generarían todo el espacio.

$$\textit{Entonces se tiene que cumplir}: \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}_{\substack{F_1=F_1+F_3 \\ F_2=F_2-2F_3}} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}_{\substack{desarrollamos \\ por\ C_1}} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & -4 & -5 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix} = -8a - 8 - 75 + 48 + 20 + 5a \;\Rightarrow\; -3a - 15 = 0 \;\Rightarrow\; a = 5$$

Ya sabemos que los cuatro vectores son linealmente dependientes, veamos cuántos de ellos son linealmente independientes:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix};\ \textit{buscamos menores distintos de cero}: \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \ , \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Las tres primeras columnas de la matriz son linealmente independientes $\Rightarrow$ *los vectores* $\{u_1, u_2, u_3\}$ *son linealmente independientes, entonces* $\{u_1, u_2, u_3\}$ *forman una base de* H *y* $\dim H = 3$

Para que el vector $v = (b,5,7,7)$ *pertenezca a* H, v *tiene que ser combinación lineal de* $\{u_1, u_2, u_3\}$.

$$\Rightarrow \textit{debe cumplirse} \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & b \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & b \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}_{\substack{F_1=F_1+F_3 \\ F_2=F_2-2F_3}} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & b+7 \\ 0 & -1 & -4 & -9 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}_{\substack{desarrollamos \\ por\ C_1}} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & b+7 \\ -1 & -4 & -9 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 10b - 50$$

$$10b - 50 = 0 \;\Rightarrow\; b = 5$$

Ejercicio 4.

- Sea A una matriz 3×3 tal que $|A| = 3$, calcula, justificando la respuesta:

  $|5A|$; $\left|2\left(A^2\right)^{-1}\right|$; $\left|M\cdot A\cdot M^{-1}\right|$; $\left|Adj\left(A\right)\right|$

- Si A es una matriz 3×3 que verifica la igualdad $A^2 = 2A$, ¿cuánto vale $|A|$?

$$* \; |5A| = 5^3\cdot|A| = 125\cdot 3 = 375 \quad \left(A \text{ es una matriz } 3\times 3\right)$$

$$Como \quad A\cdot A^{-1} = I \Rightarrow \left|A\cdot A^{-1}\right| = |I| \Rightarrow |A|\cdot\left|A^{-1}\right| = 1 \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

$$* \left|2\left(A^2\right)^{-1}\right| = (2)^3\cdot\left|\left(A^2\right)^{-1}\right| = \frac{8}{\left|A^2\right|} = \frac{8}{|A\cdot A|} = \frac{8}{|A|\cdot|A|} = \frac{8}{9}$$

$$* \left|M\cdot A\cdot M^{-1}\right| = |M|\cdot|A|\cdot\left|M^{-1}\right| = |M|\cdot|A|\cdot\frac{1}{|M|} = |A| = 3$$

$$Como \;\; A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\left[Adj\left(A\right)\right]^t \;\Rightarrow\; \left|A^{-1}\right| = \left|\frac{1}{|A|}\cdot\left[Adj\left(A\right)\right]^t\right| \;\Rightarrow\; \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|^3}\left|\left[Adj\left(A\right)\right]^t\right| \;\Rightarrow$$

$$* \left|Adj\left(A\right)\right| = \left|\left[Adj\left(A\right)\right]^t\right| = \left|A^{-1}\right|\cdot|A|^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 = 9$$

$$A\in M_{3x3} \;\; y \;\; A^2 = 2A \;\Rightarrow\; \left|A^2\right| = |2A| \;\Rightarrow |A|\cdot|A| = 2^3\cdot|A| \;\Rightarrow\; |A| = 8$$

Ejercicio 5.

Calcula para qué valor, o valores, de m no admite inversa la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Halla A^{-1} para m =0 y comprueba el resultado.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 4m + 3$$

$$A^{-1} \;\; existe \;\; \Leftrightarrow \;\; |A| \neq 0\,; \;\; m^2 + 4m + 3 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} m = -1 \\ m = -5 \end{cases} \Rightarrow A \text{ no admite inversa si } m = -1 \;\; o \;\; m = -3$$

$$para \;\; m=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\; ; \;\; |A|=3$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \qquad A_{31}=\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-3 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=4 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=12 \qquad \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=3$$

$$Comprobación: \; A\cdot A^{-1}=I \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 4/3 & 4 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6.

Probar que: $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & b & -c & 0 & 0 \end{vmatrix}=ac-bd$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & b & -c & 0 & 0 \end{vmatrix}_{C_2=C_2-C_1}=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ a & a & 0 & -d & 0 \\ 0 & b & -c & 0 & 0 \end{vmatrix}_{\substack{desarrollamos \\ por\ F_2}}=-\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & -d & 0 \\ b & -c & 0 & 0 \end{vmatrix}_{\substack{C_1=C_1+C_4 \\ C_3=C_3+C_4}}=$$

$$=-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ a & 0 & -d & 0 \\ b & -c & 0 & 0 \end{vmatrix}_{\substack{desarrollamos \\ por\ F_1}}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & 0 & -d \\ b & -c & 0 \end{vmatrix}_{C_3=C_3+C_2}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & -d \\ b & -c & -c \end{vmatrix}_{\substack{desarrollamos \\ por\ F_1}}=-\begin{vmatrix} a & -d \\ b & -c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & d \\ b & c \end{vmatrix}=ac-bd$$