REGLA DE L´HOPITAL: Indeterminaciónes $\dfrac{0}{0}$; $\dfrac{\infty}{\infty}$ Se aplica directamente

Otras indedeterminaciones , es necesario operar.

$$\boxed{\frac{0}{0},\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\quad 0\cdot(\pm\infty),\quad \infty-\infty,\quad 1^{\pm\infty},\quad (\pm\infty)^0,\quad 0^0}$$

Para aplicarla a Indeterminaciónes 0^0 ; ∞^0 ; 1^∞ tomar ln

a) $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}$

Indeterminación de la forma $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, derivamos numerador y denominador y sustituimos x por cero:

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{senx}$

Indeterminación de la forma $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Para evitarla, derivamos numerador y denominador y sustituimos x por cero:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{senx}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(senx)}{\ln(tagx)}$

Indeterminación de la forma $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Para evitarla, derivamos numerador y denominador y sustituimos x por cero:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(senx)}{\ln(tagx)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{senx}}{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x\,tagx}{senx}}{\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{senx}{senx}}{\cos^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\cos^2 x=1$$

c) $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{e}-1\right)$

Indeterminación de la forma $\{\infty\cdot 0\}$. Para evitarla, operamos para llegar a la indeterminación $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ o $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ y aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{e}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$$

g) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-cotagx\right)$

Indeterminación de la forma $\{\infty-\infty\}$. Para evitarla, operamos para llegar a la indeterminación $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ o $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ y aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-cotagx\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{senx}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{senx-x\cos x}{x\cdot senx}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+xsenx}{senx+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{xsenx}{senx+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{senx+x\cos x}{\cos x+\cos x-xsenx}=\frac{0}{2}=0$$

d) $\lim_{x\to 0}(x)^x$

Indeterminación de la forma 0^0. Para evitarla, operamos para llegar a la indeterminación $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ o $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ y aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}(x)^x=k\Rightarrow \ln k=\ln\left(\lim_{x\to 0}(x)^x\right)=\lim_{x\to 0}\ln\left((x)^x\right)=\lim_{x\to 0} x\ln x$$

Por lo tanto: $\ln k=\lim_{x\to 0} x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0} x=0$

$$\ln k=0\Rightarrow k=e^0=1\Rightarrow \lim_{x\to 0}(x)^x=1$$

46. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. Enunciar previamente la regla.

47. $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e} = \dfrac{1}{e}$

48. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{2x}}{x} = -2$

49. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

50. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{e^x} = 0$

51. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$

52. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} 2x}{x + \operatorname{sen} 3x} = -\dfrac{1}{4}$

53. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2} = \infty$

54. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

55. (*) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{sen} x} = -2$

56. (S) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\ln^3 x + 2x} = \dfrac{1}{2}$

57. $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$

58. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x)\operatorname{ctg} x = 0$

59. $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2} = -\dfrac{4}{\pi}$

60. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \dfrac{1}{3}$

61. (S) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}\right) = 0$

62. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right) = \infty$

63. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right) = 1$

76. (S) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$

77. (S) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{\ln(\cos x)} = 0$

78. (S) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2 - x)e^x - (2 + x)}{x^2} = 0$

79. (S) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2 x - \cos x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

80. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x^2}{\sqrt{x}} = 0$

81. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x + e^x\right)^{1/x} = e^2$

82. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{sen} x} = 1$

Resolución

81) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}} = A$ Indeterminación $\boxed{0^0}$ Tomamos ln , $\ln A = \ln \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$

(propidedes de límites funciones y propiedades de logaritmos)

$$\ln A = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln(x+e^x) \quad \boxed{\infty \cdot 0}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln\left(x+e^x\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+e^x)}{x} \left(\frac{0}{0}\right) \quad L\'{}Hopital$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+e^x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1+e^x}{x+e^x}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+e^x}{x+e^x} = 2$$

Por tanto $\ln A = 2 \;\Rightarrow\; A = e^2$

Resolución

81) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{senx} = A$ Indeterminación $\boxed{\infty^0}$ Tomamos ln

(propidedes de límites funciones y propiedades de logaritmos)

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{senx} \qquad \ln A = \ln \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{senx} = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)^{senx}$$

$$\ln A = \lim_{x\to 0^+} \; senx \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+} senx(\ln 1 - \ln x^2) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\ln x}{\frac{1}{senx}} \quad \boxed{\frac{\infty}{\infty} L\'{}Hopital}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-2}{x}}{\frac{\cos x}{sen^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2sen^2 x}{x\cos x} \left(\frac{0}{0} L\'{}H\hat{o}\,pital\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-2senx\cos x}{\cos x - xsenx} = 0$$

Por tanto $\ln A = 0 \;\Rightarrow\; A = e^0 = 1$